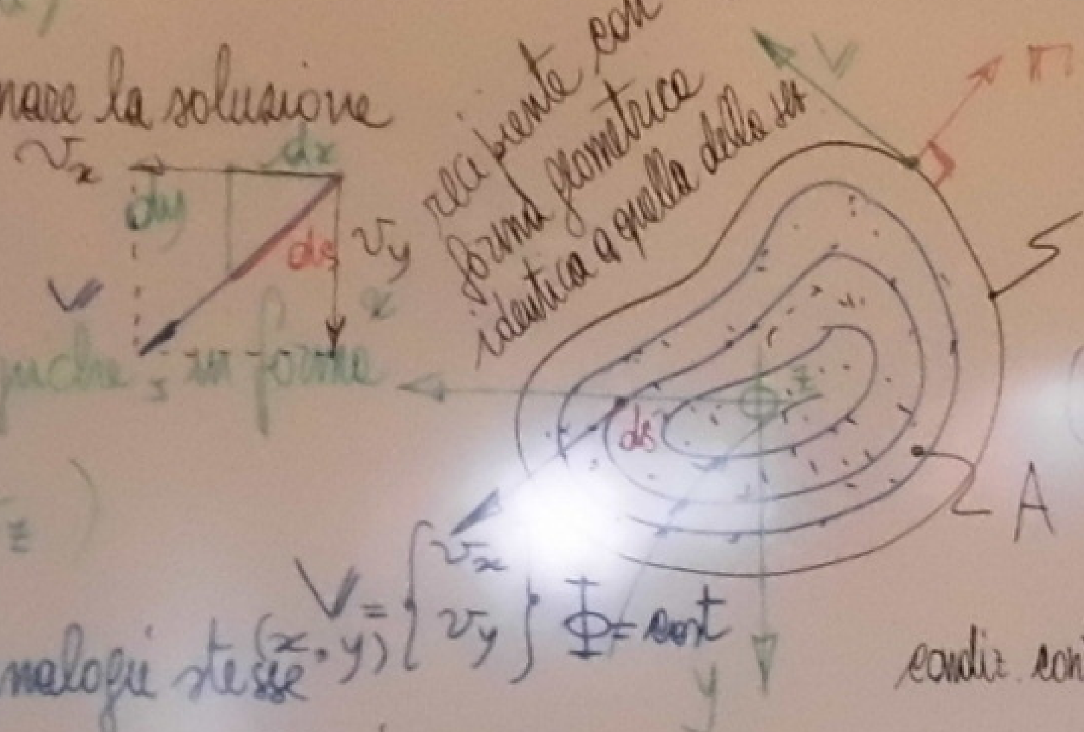
Analogie fisiche

- Utili ad interpretare la risposta a torsione ed a determinare la soluzione (analitica, chiusa o approx.; numerica)
- Utili a visualizzare, comprendere caratteristiche tipiche, in forma qualitativa e/o quantitativa (es. campo delle τ_z)
- Utili ad eseguire prove sperimentali suffragate dalle analogie stesse e rese più facilmente realizzabili, con possibilità di reperire misurazioni accurate in termini di: risposta torsionale, capacità portante, deformabilità a torsione.
- Utili ad ispirare regolamentazioni di progetto/verifica da riportare all'interno di normative a fini pratici

Analogia idrodinamica (Lord Kelvin, 1869)

recipiente con forma geometrica identica a quella della sez.



$\vec{v}(x, y) = \begin{cases} v_x \\ v_y \end{cases}$ $\Phi = \text{cost}$

Moto di un fluido perfetto (non viscoso) incomprimibile, piano a vorticità (velocità angolare) costante

eq. di continuità (conservaz. della massa): $\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \boxed{\operatorname{div} \vec{v} = 0}$ in A $\leftrightarrow$ $v_{x,x} + v_{y,y} = 0$ in A

(ρ: densità; $\vec{v}$: campo di velocità)

$(Q = V \cdot A = \text{cost})$

vorticità costante: $2\omega = \operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \wedge \vec{v} = \text{cost}$ in A

condiz. contorno: $\vec{v} \cdot \vec{n} = v_x n_x + v_y n_y = 0$ su Γ

Torsione: $\operatorname{div} \tau_z = 0$ in A

$-(\operatorname{rot} \tau_z)_z = -c$ in A

$\tau_z \cdot \vec{n} = 0$ su Γ

stesse eq.ni governanti e c.c.

$\vec{v}(x, y) \Leftrightarrow \tau_z(x, y)$

Analogia formale

$v_x = \Phi_{,y}$; $v_y = -\Phi_{,x}$ $\Leftrightarrow$ $\tau_{zx} = \varphi_{,y}$; $\tau_{zy} = -\varphi_{,x}$

Linee di flusso (stream lines)

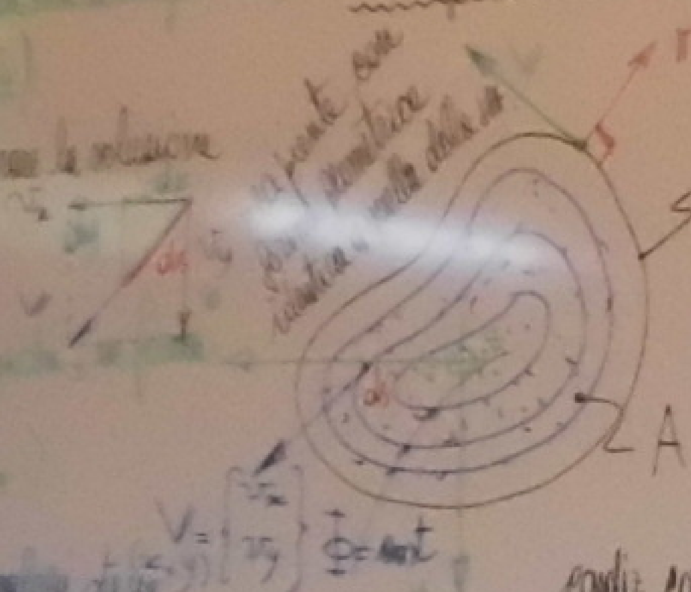
$\Phi = \text{cost} \Rightarrow d\Phi = \Phi_{,x} dx + \Phi_{,y} dy = 0$ $\Leftarrow$ $\Phi(x,y)$ f.ne di flusso (stream function)

$\vec{v}$ tangente alle $\Phi = \text{cost}$ $\Leftarrow$ $\frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$ $\Leftarrow$ $-v_y \, dx + v_x \, dy = 0$ (traiettorie del campo di moto)

τ_z tg. alle $\varphi = \text{cost}$


Analogie fisiche
(analitica, chiusa o approx; numerica)
Analogia idrodinamica (Lord Kelvin, 1869)
Moto di un fluido perfetto (non viscoso) incomprimibile (K→∞; densità cost.)
piano a vorticità (velocità angolare) costante
eq. di continuità
(conservaz. della massa)
campo di velocità
densità
Q = V · A = cost
condiz. contorno : V·n = vx nx + vy ny = 0 su Γ
Torsione : div τz = 0 in A
-(rot τz)z = -c in A
τz · n = 0 su Γ
Linee di flusso (stream lines)
Analogia formale
(stream function)
(di AIRY)
Sez. rettangolare
d = 2b
Da soluz. con sviluppi in serie
e/d
1
2
5
∞
4.80
3 —

Analogia idrodinamica (Lord Kelvin, 1869)



Moto di un fluido perfetto (non viscoso) incompressibile ($K \to \infty$; densità cost.) piano a vorticità (velocità angolare) costante:

eq. di continuità (conservaz. della massa) $\frac{d\rho}{dt} + \rho \, \boxed{\operatorname{div} v = 0}$ in A $\leftrightarrow v_{x,x} + v_{y,y} = 0$ in A

campo di velocità; densità

($Q = V \cdot A = \text{cost}$ costanza della portata)

vorticità costante $2\omega = \operatorname{rot} v = \nabla \wedge v = \text{cost}$ in A

condiz. contorno: $v \cdot n = v_x n_x + v_y n_y = 0$ su Γ

$v(x,y) \Leftrightarrow \tau_z(x,y)$

Analogia formale

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & \cancel{v_z} \end{vmatrix} = k \underbrace{(v_{y,x} - v_{x,y})}_{2\omega_z} = \text{cost} = \overset{\text{cost}}{c}\, k$$

(x,y)

$\Leftrightarrow \tau_{zx} = \varphi_{,y}\,;\; \tau_{zy} = -\varphi_{,x}$

$-(\operatorname{rot} v)_z = -2\omega_z = v_{x,y} - v_{y,x} = -c$

$\tau^{max} = \frac{3 M_t}{a b^2}$ M_t

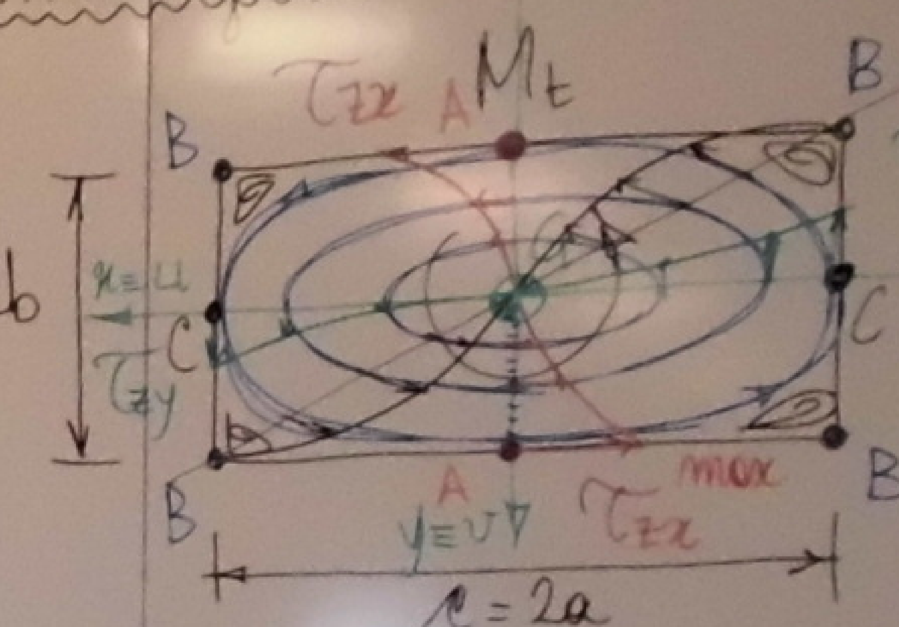
$\varphi(x,y)$ f. potenziale di sforzo (di AIRY)

τ_z tg. alle $\varphi = \text{cost}$ (curve di livello di φ)

$J = \frac{1}{3} a b^3$ molto piatta, sottile

profilo rettangolare

Sez. rettangolare



$A \; \tau_z^{max}$ (a metà lato maggiore)

B. $\tau_z \simeq 0$ ristagno di fluido

C $\tau_{z,C}^{max} < \tau_{z,A}^{max}$ (a metà lato minore)

• Da soluz. con sviluppi in serie:

$$\begin{cases} \tau_z^{max} = k \dfrac{M_t}{c\, d^2} \\ J = \alpha\, c\, d^3 \end{cases}$$

c/d	k	α
1	4.80	0.141
2	4.06	0.229
5	3.44	0.291
∞	3	$\frac{1}{3} = 0.\bar{3}$


Fattore di concentrazione delle tensioni
(meccanica della frattura)
$\left(1+\frac{b}{a}\right)V_0$
V_0
$2V_0$
$\frac{b}{a}\to\infty, \frac{a}{b}\to 0$
$V\simeq 0, \tau\simeq 0$
spigolo appuntito
$\to\infty$
intaglio
"notch"
spigolo rientrante
R
B
$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$
$J_t = \int_A r^2 dA$
$\tau_z = \left(1+\frac{b}{a}\right)\tau_{zt}$
$\tau \to \infty$ st. circolare
$\frac{b}{a}\to\infty$
$\tau_{zt}^{max} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$
$\int_0^R\int_0^{2\pi} r^2 r\,dr\,d\varphi = \frac{1}{4}R^4 2\pi = \frac{\pi R^4}{2}$
(rientranti)
~ 1922
Formula di TREFFTZ
(sperimentale)
τ_{far}
$r\to 0, \tau\to\infty$
(soluz. elastica)
$\tau\to\infty$
es. profilo sottile chiuso con spigolo vivo e raccordo circolare
"smussare gli spigoli vivi"
Analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~ 1903)
w = cost
φ = cost
curve di livello
S = cost - Membrana tesa con tensione costante S
soggetta a pressione interna p = cost
Si registra lo spostamento w fuori piano
Appoggiata su contorno Γ
dA = dx dy
$w(x,y)$
S
Inclinaz. in x+dx
$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx$
p = cost
S dy
$\alpha \simeq tg\alpha \simeq \sin\alpha$
$|\alpha| \ll 1$
Equil. nella direz. z
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{S}$
$\nabla^2 w(x,y) = w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{p}{S}$ in A
$w(x,y) = 0$ su Γ
$\varphi = 0$ su Γ
Equiv. statica
$M_t = \int_A 2\varphi\, dA$
$M_t \sim V$

Fattore di concentrazione delle tensioni
~ 1922
Formula di TREFFTZ
(approssimata)
(SIF)
spigolo appuntito
$\frac{b}{a} \to \infty, \frac{a}{b} \to 0$
$\Rightarrow V \to \infty$
$V \simeq 0, \tau \simeq 0$
$\frac{r}{t} \to 0, \tau \to \infty$
$\tau \to \infty$
$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$
$J_t = \int_A r^2 dA$
$\tau_z = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \tau_{zt}$
$\tau \to \infty$ sez. circolare
$\frac{b}{a} \to \infty$
"smussare gli spigoli vivi"
(rientranti)
Analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~ 1903)
w = cost ↔ φ = cost
curve di livello
S = cost - Membrana tesa con tensione costante S
soggetta a pressione interna p = cost
w = 0 - Si registra lo spostamento w fuori piano
in Γ
Appoggiata su contorno Γ
cilindrico, con curv. solo in z
dA = dxdy
W(x,y)
p = cost
Inclinaz. in x + dx
$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$
S dy sin α
W(x + dx)
W(x)
α ≃ tg α ≃ sin α
|α| << 1
S dy
x + dx
$\frac{\partial w}{\partial x}$
Equil. nella direz. z (eq. indef.)
$S dy \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx\right) - S dy \frac{\partial w}{\partial x} + p dx dy = 0$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{S}$
$\nabla^2 w(x,y) = w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{p}{S}$ cost in A ↔ $\nabla^2 \varphi(x,y) = -\ldots$ in A $w(x,y) \leftrightarrow \varphi(x,y)$
in Γ $w(x,y) = 0$ ↔ $\varphi = 0$ in Γ
Equiv. statica
$M_t = \int_A 2\varphi\, dA = 2 \ldots \frac{S}{p} \int_A w\, dA$
Volume sotteso dalla membrana
$M_t \sim V$
w = cost
spost. membrana ↔ φ
pendenze della membrana ↔ τ
$w_{,x} \leftrightarrow \tau_{zy}$ $-w_{,y} \leftrightarrow \tau_{zx}$
$w \frac{S}{p} = \frac{\varphi}{\ldots} \Rightarrow \varphi = \ldots \frac{S}{p} w$

Analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~ 1903)
S = cost - Membrana tesa con tensione costante S
soggetta a pressione interna p = cost
w = 0 - Si registra lo spostamento w fuori piano
su Γ Appoggiata su contorno Γ
cilindrica, con curv. solo in x
Equil. nella direz. z (eq. indef.)
$S\,dy\left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}dx\right) - S\,dy\frac{\partial w}{\partial x} + p\,dx\,dy = 0$
$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{p}{S}$
$\nabla^2 w(x,y) = w_{,xx} + w_{,yy} = -\frac{p}{S}$ cost in A
su Γ $w(x,y) = 0$
$\nabla^2 \varphi(x,y) = -c$ in A $w(x,y) \leftrightarrow \varphi(x,y)$
$\varphi = 0$ su Γ
$\alpha \simeq tg\alpha \simeq sin\alpha$
$|\alpha| << 1$
Equiv. statica:
$M_t = \int_A 2\varphi\, dA = 2\frac{cS}{p}\int_A w\, dA$
$= 2\frac{cS}{p} V$
$M_t \sim V$
Volume sotteso dalla membrana
(capacità portante)
w = cost
Spost. membrana ↔ φ f.ne pot. di sforzo
Pendenza della membrana ↔ τ_t
$w_{,x} \leftrightarrow \tau_{zy}$ $-w_{,y} \leftrightarrow \tau_{zx}$
$w\frac{S}{p} = \frac{\varphi}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{cS}{p} w$