
Soluzioni analitiche del pb della torsione
- Sezione ellittica
$\Gamma: \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$
$A=\pi ab$
$J_x=\frac{\pi}{4}ab^3$
$J_y=\frac{\pi}{4}a^3b$
$J_G=J_x+J_y=\frac{\pi}{4}ab(a^2+b^2)$
$r_x=\frac{b}{2}, r_y=\frac{a}{2}$
raggi giratori
Approccio agli sforzi: $(e, \varphi(x,y))$
$\nabla^2\varphi(x,y)=-e$ in A
$\varphi=0$ su Γ
pb. di Dirichlet per l'eq. ne di Poisson
$M_t=2\int_A \varphi\, dA$
$\nabla^2\varphi=\varphi_{,xx}+\varphi_{,yy}$
$=K\left(-\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)$
$=-2K\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=-e$
$e=2G\beta$
$=2\frac{M_t}{J}$
$K=\frac{e}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=\frac{M_t}{\pi ab}$
- Equiv. statica:
$M_t=2\int_A\varphi\, dA$
$=2K\int_A\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dA$
$=2K\left(A-\frac{1}{a^2}J_y-\frac{1}{b^2}J_x\right)$
$=2KA\left(1-\frac{1}{a^2}\frac{a^2}{4}-\frac{1}{b^2}\frac{b^2}{4}\right)$
$=2K\pi ab\frac{1}{2}$
$K=\frac{M_t}{A}=\frac{M_t}{\pi ab}$
Pertanto:
$\varphi(x,y)=\frac{M_t}{\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$
$J=\frac{\pi a^3b^3}{a^2+b^2}$
momento d'inerzia torsionale
- Commenti
- per $a=b=R$
$J=J_G=\frac{\pi}{2}R^4$
- $J=\frac{A^4}{4\pi^2 J_G}\simeq\frac{A^4}{40 J_G}$
DSV ha dimostrato che tale formula può essere utilizzata per stimare il momento d'inerzia torsionale di sez. compatte (sez. ellittica equivalente di pari area A e mom. d'inerzia polare J_G)
- Campo delle tensioni tangenziali:
$\tau_{zx}=\varphi_{,y}=\frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2y}{b^2}\right)=-\frac{2M_t}{\pi ab^3}y$
$\tau_{zy}=-\varphi_{,x}=-\frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2x}{a^2}\right)=\frac{2M_t}{\pi a^3b}x$
$\tau^{max}=\frac{2M_t}{\pi a b^2}$
$\tau^{max}=\frac{2M_t}{\pi R^3}$
- Fattore di torsione

Sezione ellittica
2a
2b
M_t
$A = \pi ab$
$J_x = \frac{\pi}{4} a b^3$
$J_y = \frac{\pi}{4} a^3 b$
$J_G = J_x + J_y = \frac{\pi}{4} ab(a^2+b^2)$
$\nabla^2 \varphi(x,y) = -c$ in A
$\varphi = 0$ su Γ
pb di Dirichlet per l'equaz di Poisson
$M_t = 2\int_A \varphi\, dA$
$= K\left(-\frac{2}{a^2}-\frac{2}{b^2}\right)$
$= -2K \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$
$K = \frac{c}{2}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} = \frac{M_t}{\pi ab}$
- Equiv statica:
$M_t = 2\int_A \varphi\, dA$
$= 2K\int_A\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)dA$
$= 2K\left(A-\frac{1}{a^2}J_y-\frac{1}{b^2}J_x\right)$
$= 2K\pi ab\frac{1}{2}$
$K = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab}$
Pertanto
$\varphi(x,y) = \frac{M_t}{\pi ab}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$
$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2+b^2}$
momento d'inerzia torsionale
- Commenti
- per a = b = R
$J = J_G = \frac{\pi}{2}R^4$
$\pi^2 \simeq 10$
- $J = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} \simeq \frac{A^4}{40 J_G}$
DSV ha dimostrato che tale formula può essere utilizzata per stimare il momento d'inerzia torsionale di sez. compatte
- Campo delle tensioni tangenziali:
$\tau_{zx} = \varphi_{,y} = \frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2y}{b^2}\right) = -\frac{2M_t}{\pi ab^3}y$
$\tau_{zy} = -\varphi_{,x} = -\frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) = \frac{2M_t}{\pi a^3 b}x$
lineari in
$a > b$
$\tau^{min} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}$
$\tau^{max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$
$\tau^{max} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$
$y = 0$
lineari lungo r
coord radiale
$|\tau_z| = \sqrt{\tau_{zx}^2+\tau_{zy}^2}$
lineare in r
ψ_G f.ne di ingobbamento
- Fattore di torsione
$\beta = \frac{M_t}{GJ}$
- Approccio agli spostamenti

- Equaz. statica:

$M_t = 2\int_A \varphi \, dA$

$= 2k \int_A \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) dA$

$= 2k\left(A - \frac{1}{a^2} J_y - \frac{1}{b^2} J_x\right)$

$= 2kA\left(1 - \frac{1}{a^2}\frac{a^2}{4} - \frac{1}{b^2}\frac{b^2}{4}\right)$

$= 2k\,\pi ab\,\frac{1}{2}$

$k = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab}$

Pertanto

$\varphi_{(x,y)} = \frac{M_t}{\pi ab}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow$

$J = \frac{\pi a^3 b^3}{a^2 + b^2}$

- Commenti

- per $a = b = R$

$J = J_G = \frac{\pi}{2} R^4$

$J = \frac{A^4}{4\pi^2 J_G} \simeq \frac{A^4}{40 J_G}$ $\quad \pi^2 \simeq 10$

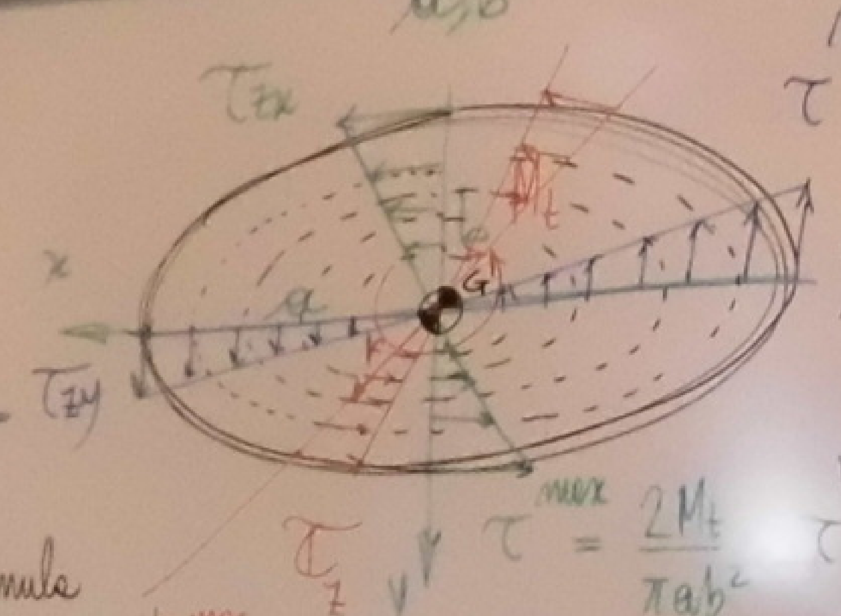
DSV ha dimostrato che tale formula può essere utilizzata per stimare il momento d'inerzia torsionale di sez. compatte (sez. ellittica equivalente di pari area A e mom. d'inerzia polare J_G)

- Campo delle tensioni tangenziali:

$\tau_{zx} = \varphi_{,y} = \frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2y}{b^2}\right) = -\frac{2M_t}{\pi ab^3}\, y$

$\tau_{zy} = -\varphi_{,x} = -\frac{M_t}{\pi ab}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) = \frac{2M_t}{\pi a^3 b}\, x$

lineari in y, x



$\tau^{min} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}$

$\tau^{max} = \frac{2M_t}{\pi ab^2}$

$\tau^{max} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$

lineare lungo r coord. radiale

$r^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{x^2 + m^2 x^2}$

$= \sqrt{1 + m^2}\, x$

$|\tau_z| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2M_t}{\pi ab}\sqrt{\frac{y^2}{b^4} + \frac{x^2}{a^4}}$ lineare in $r(x)$

$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = -\frac{\frac{2M_t}{\pi a^3 b}\, x}{\frac{2M_t}{\pi a b^3}\, y} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{m} = \text{cost}$

lungo $y = mx$

Ψ_G f.ne di ingobbamento

- Fattore di torsione:

$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta \frac{M_t}{G J_G}$; $\frac{1}{J} = \frac{\eta}{J_G} \Rightarrow \eta = \frac{J_G}{J}$

$\eta = \frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2) \frac{a^2 + b^2}{\pi a^3 b^3} = \frac{1}{4}\frac{(a^2 + b^2)^2}{a^2 b^2} > 0$

$= \frac{1}{4}\left(\frac{a^2 + b^2}{ab}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right)^2 = \left(\frac{(a-b)^2 + 2ab}{2ab}\right)^2$

$= 1 + \frac{(a-b)^2}{4a^2b^2} \geq 1$

- Approccio agli spostamenti

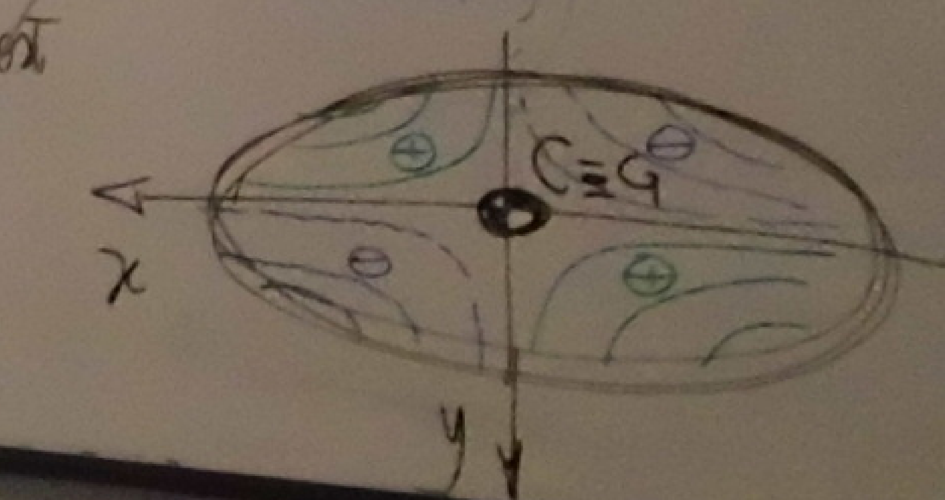
$\Psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta}\varphi_{,y} + y = \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(-\frac{2y}{b^2}\right) + y = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\, y$

$\Psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta}\varphi_{,x} - x = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(-\frac{2x}{a^2}\right) - x = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\, x$

$d\Psi_G = \Psi_{G,x}\, dx + \Psi_{G,y}\, dy = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\underbrace{(y\,dx + x\,dy)}_{d(xy)}$

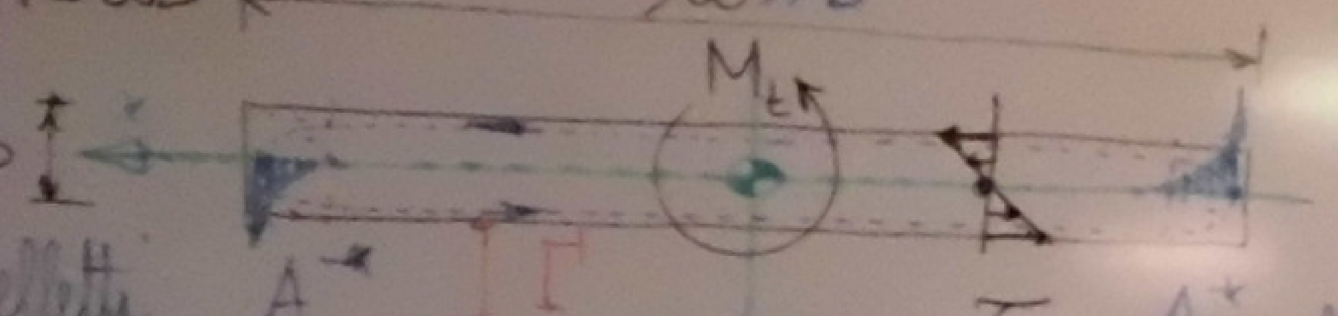
$\Rightarrow \Psi_G(x,y) = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\, xy + \cancel{\text{cost}}$

$\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A}\int_A \Psi_G \, dA = 0$



Sezione rettangolare sottile (profili aperti in parete sottile)

$A = ab$ $\quad a \gg b$



$J_x = \frac{1}{12} a b^3$

$J_y = \frac{1}{12} a^3 b$

effetti di bordo

soluz. approx lineari a farfalla sullo spessore

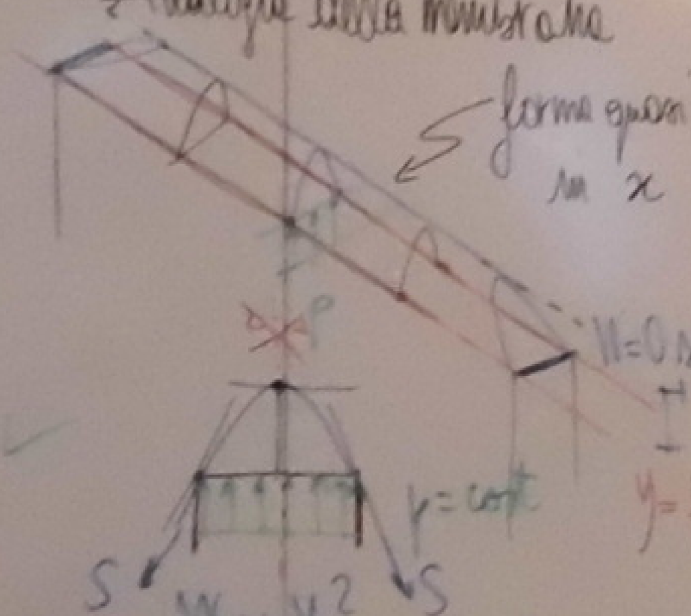
Analogia idrodinamica $\begin{cases} \tau_{zx} = -c\,y \\ \tau_{zy} = 0 \end{cases}$

Eq. di equil. $\quad \cancel{\tau_{zx,x}} + \cancel{\tau_{zy,y}} = 0$ ✓

Eq. di comp. $\quad \underbrace{\tau_{zx,y}}_{-c} - \cancel{\tau_{zy,x}} = -c$ ✓

c.c. $\quad \tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ ✓

- Analogia della membrana



$W_{,y} \sim y$ lin. in y

$y = -\frac{b}{2} \rightarrow \frac{b}{2} + y = 0$

$y = \frac{b}{2} \rightarrow \frac{b}{2} - y = 0$

- F.ne di Airy:

$$\varphi(x,y) = K\left(\frac{b}{2} + y\right)\left(\frac{b}{2} - y\right) = K\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) = \frac{3M_t}{ab^3}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)$$

$\frac{M_t}{J}$

✓ $\varphi = 0$ su $\Gamma - \Gamma^*$

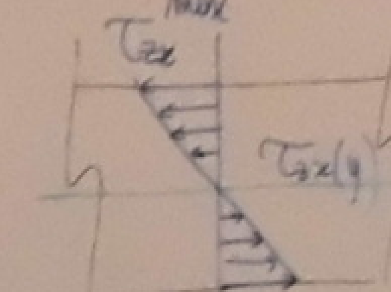
✓ $\nabla^2 \varphi = -2K = -c$

con $K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$

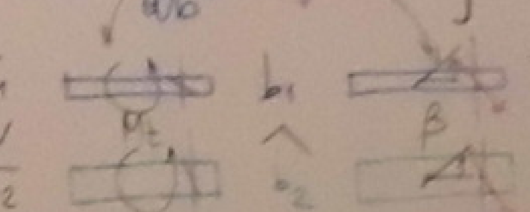
$$\begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{6M_t}{ab^3}\, y = -\frac{2\,G\beta \frac{1}{3}ab^3}{ab^3}\, y = -2G\beta\, y = -\frac{2M_t}{J}\, y \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0 \end{cases}$$

Equiv. statica

$$M_t = 2\int_A \varphi\, dA = 2K\int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) dA = 2K\left(\frac{b^2}{4}ab - \frac{1}{12}ab^3\right) = 2K\frac{1}{6}ab^3 \Rightarrow K = \frac{M_t}{\frac{1}{3}ab^3} = \frac{M_t}{J}$$



$$\tau_{zx}^{max} = \frac{3M_t}{ab^2} = G\beta b = \frac{M_t}{J} b$$

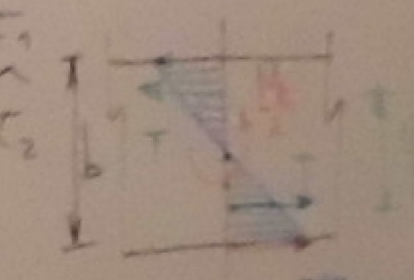


$J = \frac{1}{3}ab^3 = 4J_x \ll J_y$

- N.B. le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti a solo metà del momento torcente M_t

$$\int_A \tau_{zx}\, y\, dA = \int_A 2G\beta y^2\, dA = 2G\beta J_x = 2\frac{M_t}{J}J_x = \frac{M_t}{2}$$

$\tau^* \leftrightarrow \frac{M_t}{2}$



$T = \frac{1}{2}\frac{b}{2}\tau^{max} a$

$M_t = T\frac{2}{3}b = \ldots = \frac{3M_t}{ab^2}$

Sezione rettangolare sottile
$a >> b$
$J_x = \frac{1}{12} a b^3$
$J_y = \frac{1}{12} a^3 b$
M_t
A^*
$A - A^*$
τ_{zx}
$\tau_{zx} = -c y$
$\tau_{zy} = 0$
Analogia della membrana
forma quasi cilindrica in x
Eq. di equil. $\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0$
$\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$
$w = 0$
$v = cost$
- F.ne di Airy:
$\varphi(x,y) = K\left(\frac{b}{2} + y\right)\left(\frac{b}{2} - y\right)$
$= K\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)$
$= \frac{3M_t}{ab^3}\left(\frac{b^2}{4} - y^2\right)$
$\frac{M_t}{J}$
$= -\frac{2M_t}{J} y$
$\varphi = 0$ su $\Gamma - \Gamma^*$
$\nabla^2 \varphi = -2K = -c$
con $K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$
Equiv. statica
$M_t = 2\int_A \varphi \, dA$
$= 2K\int_A \left(\frac{b^2}{4} - y^2\right) dA$
$= 2K\left(\frac{b^2}{4} ab - \frac{1}{12} a b^3\right) = 2K \frac{1}{6} a b^3 \Rightarrow K = \frac{M_t}{\frac{1}{3} a b^3} = \frac{M_t}{J}$
$\tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{6M_t}{ab^3} y = -2G\beta y$
$\tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0$
τ_{zx}^{max}
$\tau_{zx}(y)$
$\tau_{zx}^{max} = \frac{3M_t}{ab^2} = G\beta b = \frac{M_t}{J} b$
$\tau_1 > \tau_2$
$b_1 > b_2$
β
$J = \frac{1}{3} a b^3 = 4 J_x << J_y$
- N.B. Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti a solo metà del momento torcente M_t
$\int_A -\tau_{zx} y \, dA = \int_A 2G\beta y^2 dA$
$= 2G\beta J_x = 2 \frac{M_t}{J} J_x = \frac{M_t}{2}$
$\tau^* \leftrightarrow \frac{M_t}{2}$
$T = \frac{1}{2} \frac{b}{2} \tau^{max} a$
$M_t = T \frac{2}{3} b$
$\tau^{max} = \frac{3M_t}{ab^2}$
F.ne di ingobbamento
$\psi_{,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y = -y$
$\psi_{,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{,x} - x = -x$
$\psi = -xy + cost$

F.ne di Lang:

$\varphi \ldots k\left(\frac{b}{2}+y\right)\left(\frac{b}{2}-y\right) = \frac{3M_t}{ab^3}\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right)$

$\frac{M_t}{J}$

✓ $\varphi = 0$ su Γ-Γ

✓ $\nabla^2\varphi = -2k = -c$

con $k = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$

Equiv. statica

$M_t = 2\int_A \varphi \, dA$

$= 2k\int_A \left(\frac{b^2}{4}-y^2\right) dA$

$= 2k\left(\frac{b^2}{4}ab - \frac{1}{12}ab^3\right) = 2k\frac{1}{6}ab^3 \Rightarrow k = \frac{M_t}{\frac{1}{3}ab^3} = \frac{M_t}{J}$

$\tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\frac{6M_t}{ab^3}y = -\frac{2G\beta\frac{1}{3}ab^3}{\cancel{ab^3}}y = -2G\beta y$ $\quad = -\frac{2M_t}{J}y$

$\tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0$

$\tau_{zx}^{max} = \frac{3M_t}{ab^2} = G\beta b = \frac{M_t}{J}b$

$\tau_1 > \tau_2$ $\quad b_1 < b_2$ $\quad \tau_1 < \tau_2$

$J = \frac{1}{3}ab^3 = 4J_x << J_y$

— N.B. Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti a solo metà del momento torcente M_t

$\int_A -\tau_{zx}\, y \, dA = \int_A 2G\beta y^2 dA$

$= 2G\beta J_x = 2\frac{M_t}{J}J_x = \cancel{2}\frac{M_t}{\cancel{4}J_x}\cancel{J_x} = \frac{M_t}{2}$

$\tau^* \leftrightarrow \frac{M_t}{2}$

$T = \frac{1}{2}\frac{b}{2}\tau^{max} a$

$\frac{M_t}{2} = T\frac{2}{3}b = \frac{ab}{4}\tau^{max}\frac{2}{3}b \Rightarrow \tau^{max} = \frac{3M_t}{ab^2}$

— F.ne di ingobbamento

$\psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta}\overbrace{\varphi_{,y}}^{-2y} + y = -y$

$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta}\cancel{\varphi_{,x}} - x = -x$

$\Rightarrow \psi_G = -xy + \cancel{cost}$

$\psi_G^{\square} = \lim_{\frac{b}{a}\to 0} \psi_G^{ell}$

y varia tra $-\frac{b}{2}$ e $\frac{b}{2}$

su piccolo spessore

per $y = 0 \Rightarrow \psi_G \equiv 0$

$\psi_G^{ell}(x,y) = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}xy$

$\to 1$ per $\frac{b}{a} \to 0$

Sez. circ.

R

$a = b = R$

$\psi_G \equiv 0$

(no ingobbamento)

$\eta = 1$