Torsione nei profili sottili aperti

linea media (luogo centri di circonf inscritte tangenti)

$s = 0$ (s: ascissa curvilinea)

Caratt. geometriche:

$$\bullet\ A = \int_A dA = \int_0^a b(s)\,ds$$

$$\bullet\ J_x = \int_A y^2 dA \simeq \int_0^a y^2(s)\, b(s)\, ds$$

$$\bullet\ J_y = \int_A x^2 dA \simeq \int_0^a x^2(s)\, b(s)\, ds$$

$s = a$ sviluppo della linea media

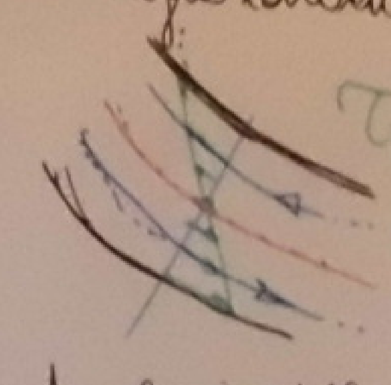
distanze di $P(s)$ dalla linea media dagli assi x, y

– Profilo in parete sottile: $b(s) << a$

– Spessore può variare con s ma con continuità e rimanendo pur sempre piccolo $\left|\frac{db(s)}{ds}\right| = b'(s) << 1$

NO $b_1 \neq b_2$ potenziali concentrazioni di tensione

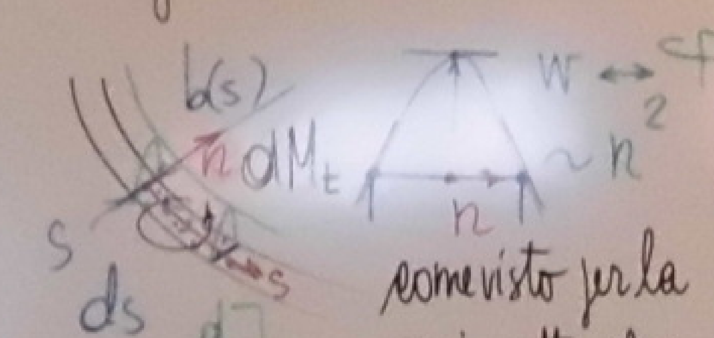
– Analogia idrodinamica



$\tau_{zs} \leftrightarrow v_s$ linee a farfalla sullo spessore

tangenti alla linea media

– Analogia della membrana



come visto per la sezione rettangolare sottile

n: variazione sullo spessore

Si può ipotizzare di ricostruire la risposta dell'intero profilo come quella ottenibile dalla sovrapposizione dei contributi di infiniti rettangolini $b(s)ds$ con soluzione simile a quella vista per il profilo rettangolare sottile.

– Funzione di Airy locale

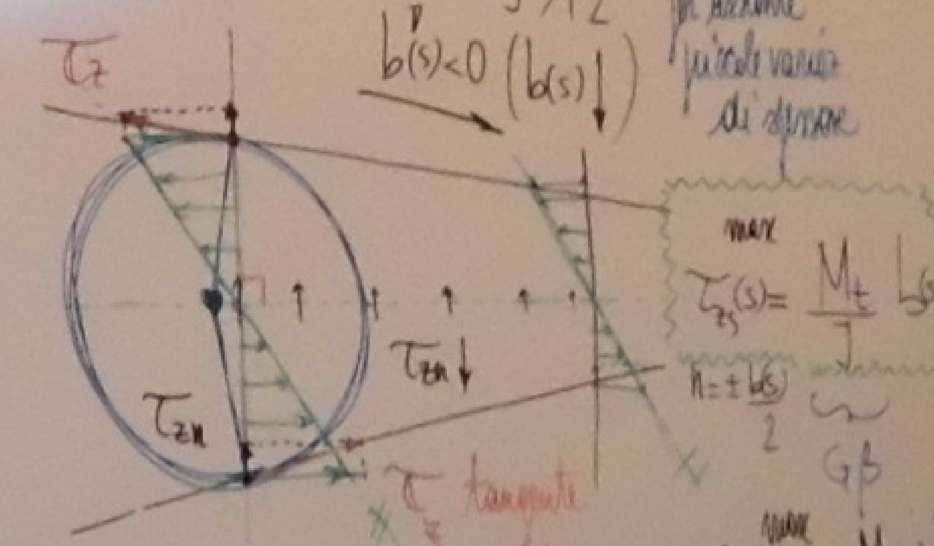
$$\varphi(s,n) = G\beta\left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2\right) \qquad G\beta = \frac{M_t}{J}$$

lineare in n

$$\begin{cases} \tau_{zs}(n) = \varphi_{,n} = \frac{M_t}{J}(-2n) = -\frac{2M_t}{J}n \\ \tau_{zn}(s) = -\varphi_{,s} = \frac{M_t}{J}\frac{1}{4}2\,b(s)\,b'(s) \simeq 0 \end{cases}$$

per spessore piccolo variaz. di spessore

$b'(s) < 0$ ($b(s)\downarrow$)



τ_z tangente al contorno

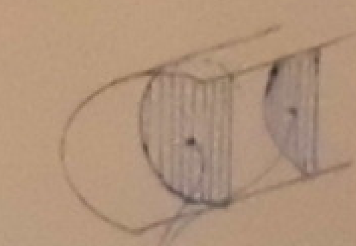
$$\tau_{zs}^{max}(s) = \frac{M_t}{J} b(s) \qquad n = \pm\frac{b(s)}{2}$$

$$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_t}{J} b^{max}$$

$\tau_{zs}(s)$ è max ove $b(s)$ è max

$\tau_{zn}(s)$ presente, decrescente (per $b(s)$ decrescente), è in generale, ma trascurabile ai fini ingegneristici

N.B: La torsione β è supposta costante per l'intera sezione (profilo sottile)

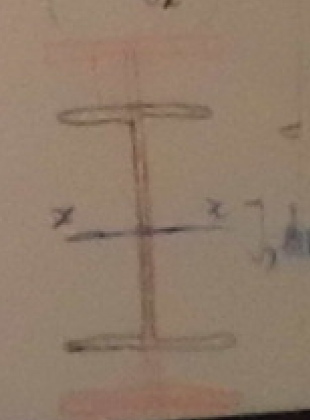


atti trasversali di ingobbamento del profilo nel piano, in modo da garantire la stessa rotazione $\forall \frac{dz}{ds}$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \frac{dM_t}{G\,dJ}$$

$$dJ = \frac{1}{3} ds\, b^3$$

$$\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y$$



– Equivalenza statica

$$M_t = 2\int_A \varphi\, dA$$


Torsione nei profili sottili aperti
S=0 (s ascissa curvilinea)
Caratt. geometriche
$\bullet A = \int_A dA = \int_0^a b(s)\,ds$
$\bullet J_x = \int_A y^2 dA \simeq \int_0^a y^2(s)\,b(s)\,ds$
$\bullet J_y = \int_A x^2 dA \simeq \int_0^a x^2(s)\,b(s)\,ds$
S=a sviluppo della linea media
- Profilo in parete sottile $b(s) \ll a$
potenziali concentrazioni di tensione
- Analogia idrodinamica
$\tau_{zs} \leftrightarrow v_s$
- Analogia della membrana
$w \leftrightarrow \varphi$
dM_t
come visto per la sezione rettangolare sottile
n variazione sullo spessore
Si può ipotizzare di ricostruire la risposta dell'intero profilo come quella ottenibile dalla sovrapposizione dei contributi di infiniti rettangolini $b(s)\,ds$, con soluzione simile a quella vista per il profilo rettangolare sottile.
- Funzione di Airy locale
$\varphi(s,n) = \frac{M_t}{J}\left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2\right)$
lineari in n
$\tau_{zs}(n) = \varphi_{,n} = \frac{M_t}{J}(-2n) = -\frac{2M_t}{J}n$
$\tau_{zn}(s) = -\varphi_{,s} = -\frac{M_t}{J}\frac{1}{2}b(s)\,b'(s) \simeq 0$
si assumono piccole variaz. di spessore
$b'(s)<0 \; (b(s)\downarrow)$
$\tau_{zs}^{max}(s) = \frac{M_t}{J} b(s)$
$n = \pm \frac{b(s)}{2}$
$G\beta$
$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_t}{J} b^{max}$
τ_z tangente al contorno
$\tau_{zn}(s)$ presente, decrescente (per b(s) decrescente), è per equil., ma trascurabile ai fini ingegneristici
N.B: La torsione β è supposta costante per l'intera sezione (profilo sottile)
setti trasversali di irrigidimento del profilo nel piano, in modo da garantire la stessa rotazione ∀ ds
$\left(\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y\right)$
$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \frac{dM_t}{G\,dJ}$
$dJ = \frac{1}{3} ds\, b^3(s)$
J_x dritto, piccolo
$\sim b^3(s)$
- Equivalenza statica
$M_t = 2\int_A \varphi\, dA$
$= 2\int_A \frac{M_t}{J}\left(\frac{b^2}{4} - n^2\right) dA$
$= 2\frac{M_t}{J}\int_0^a \int_{-b(s)/2}^{b(s)/2} \left(\frac{b^2}{4} - n^2\right) dn\, ds$
$= \frac{M_t}{J}\int_0^a \frac{1}{3} b^3(s)\, ds$

- Funzione di Airy locale:

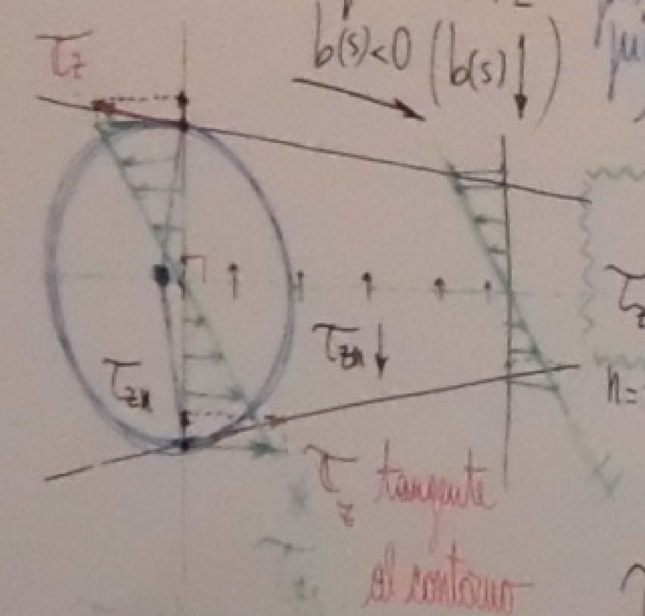
$$\varphi(s,n) = \underbrace{G\beta}_{\frac{M_t}{J}}\left(\frac{b^2(s)}{4} - n^2\right) \quad \text{lineari in } n$$

$$\begin{cases} \tau_{zs}(n) = \varphi_{,n} = \frac{M_t}{J}(-2n) = -\frac{2M_t}{J}\, n(s) \\ \tau_{zn}(s) = -\varphi_{,s} = -\frac{M_t}{J}\frac{1}{\cancel{4}_2} b(s)\, b'(s) \simeq 0 \end{cases}$$

$\frac{2M_t}{J} \simeq 0$

per assunte piccole variaz. di spessore

$b'(s) < 0$ $(b(s)\downarrow)$

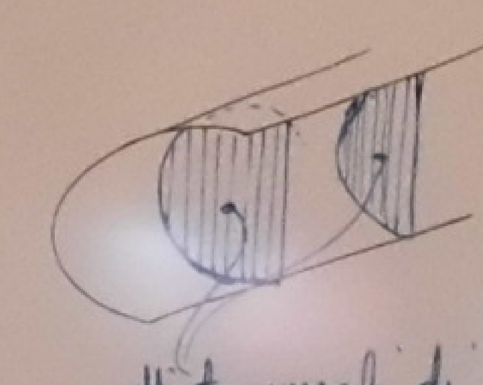


$$\tau_{zs}^{max}(s) = \underbrace{\frac{M_t}{J}}_{G\beta} b(s) \qquad n = \pm\frac{b(s)}{2}$$

$$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_t}{J} b^{max}$$

$\tau_{zn}(s)$ presente, decrescente (per $b(s)$ decrescente), e è per equil., ma trascurabile ai fini ingegneristici

N.B: La torsione β è supposta costante per l'intera sezione (profilo sottile):



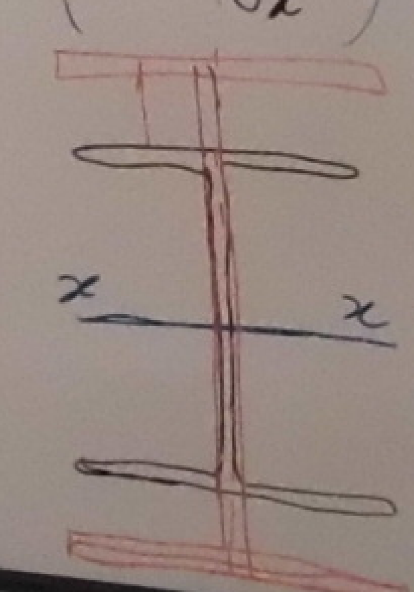
setti trasversali di irrigidimento del profilo nel piano, in modo da garantire la stessa rotazione $\forall$ $\frac{ds}{b(s)}$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \frac{dM_t}{G\, dJ}$$

$$dJ = \frac{1}{3} ds\, b^3(s)$$

$$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b^3(s)\, ds$$

$$\left(\sigma_{zz} = \frac{M_x}{J_x} y\right)$$



J_x elevato, J piccolo: $\sim b^3(s)$

- Equivalenza statica

$$\cancel{M_t} = 2\int_A \varphi\, dA \qquad \underbrace{dn\, ds}_{} \rightarrow b(s)\, ds$$

$$= 2\int_A \frac{M_t}{J_a}\left(\frac{b^2}{4} - n^2\right) dA$$

$$= \frac{2M_t}{J}\int_0^a\int_{-\frac{b(s)}{2}}^{\frac{b(s)}{2}}\left(\frac{b^2}{4} - n^2\right) dn\, ds$$

$$= \frac{2M_t}{J}\int_0^a \underbrace{\left(\frac{b^3(s)}{4} - \frac{n^3}{3}\Big|_{-b/2}^{+b/2}\right)}_{} ds \qquad \frac{2}{3}$$

$$= \frac{M_t}{J}\int_0^a \frac{1}{3} b^3(s)\, ds \qquad \frac{b^3}{4} - \frac{1}{3}\frac{b^3 \cancel{2}}{\cancel{8}_4} = \frac{1}{4_2} b^3\left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6} b^3(s)$$

$$\Rightarrow J = \int_0^a \underbrace{\frac{1}{3} b^3(s)\, ds}_{dJ} = \frac{1}{3}\int_0^a b^3(s)\, ds \underset{b=\text{cost}}{=} \frac{1}{3} a b^3$$

Funzione di ingobbamento (riferita alla linea media)
linea media (luogo centri di circonf inscritte tangenti)
ψ_G = −xy = 0, y = 0
ingobbamento nullo sulla linea media
C ≠ G
ψ_C = ψ_G(s) ≠ 0
ingobbamento non nullo, riferito alla linea media.
approccio agli spost.
o per cinem diretta
o per campo delle τzs conseguente
relazione tra ψ e φ
Campo di spost. (di P(s) = (x(s), y(s)))
linea media
"mappa di spostamento"
Si ottiene:
area settoriale
Integrando
valor medio della funzione area settoriale
f.ne area settoriale

Funzione di ingobbamento (riferita alla linea media)
$\Psi_G = -xy = 0, y = 0$
ingobbamento nullo sulla linea media
$C \neq G$
$\Psi_G = \Psi_G(s) \neq 0$
ingobbamento non nullo, riferito alla linea media
o per sezione diretta
o per campo delle τ_{zs} conseguente
linea media
Campo di spost. (di $P(s) = (x(s), y(s))$)
$s_x = -\beta z\, y(s)$
$s_y = \beta z\, x(s)$
$s_z = \beta \Psi_G(s)$
$= s_x t_x + s_y t_y$
$= \beta z(-y t_x + x t_y)$
$= \beta z(-y n_y - x n_x)$
$= -\beta z\,(x n_x + y n_y)$
$= \beta z\, r_G(s)$
$\vartheta(z) = \beta z$
area settoriale
"mappa di spostamento"
$\frac{\tau_{zs}}{G} = \gamma_{zs} = s_{z,s} + s_{s,z}$
$= \beta(\Psi_{G,s} + r_G(s))$
Si ottiene:
$\frac{d\Psi_G}{ds} - \Psi_{G,s} = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} - 2\frac{1}{2} r_G(s)\, ds$
$d\Psi_G = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} ds - 2 d\Omega_G$
nulla nei profili aperti
– Integrando:
$\Psi_G(s) = -2(\Omega_G(s) - \bar{\Omega}_G)$
$= 2(\bar{\Omega}_G - \Omega_G(s))$
ingobbamento medio nullo
$\bar{\Psi}_G = 0$
$\bar{\Omega}_G = \frac{1}{A}\int_0^a \Omega_G(s)\, b(s)\, ds$
valor medio della funzione area settoriale
$\Psi_G(s) \sim \Omega_G(s)$
f.ne area settoriale
C.T.
$x_C = -\frac{1}{J_x}\int_0^a \Psi_G(s)\, y(s)\, b(s)\, ds$
$y_C = \frac{1}{J_y}\int_0^a \Psi_G(s)\, x(s)\, b(s)\, ds$
$\in$ asse di simm.
– Profili sottili formati da rettangolari sottili
$a = \sum_i a_i$
$\tau_{zs_i}^{max} = \frac{M_{t_i}}{J_i} b_i = \frac{M_t}{J} b_i$
$\tau_{zs}^{max} = \frac{M_t}{J} b^{max}$
$\Psi_G(s_i) \simeq \Omega_G(s_i)$
$r_{G_i}(s)$ C = cost
Ψ_C
$A \simeq \sum a_i b_i$
$J_x = \sum J_{x_i}$
$J_y = \sum J_{y_i}$
$J_{xy} = \sum J_{x_i y_i}$
$J = \sum_i J_i = \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3$
$\beta = \frac{M_t}{G J} = \frac{M_{t_i}}{G J_i} \Rightarrow M_{t_i} = \frac{J_i}{J} M_t$
$J_{x_i} = J_{\eta_i} \sin^2\alpha_i$
$J_{y_i} = J_{\eta_i} \cos^2\alpha_i$
$J_{x_i y_i} = J_{\eta_i} \sin\alpha_i \cos\alpha_i$
$J_{\xi_i} = \frac{1}{12} a_i b_i^3$
$J_{\eta_i} = \frac{1}{12} a_i^3 b_i$
Profili sottili a stella
$\Psi_C \equiv 0$ riferita al centro della stella
$(r_{C_i} \equiv 0)$
$\Omega_C \equiv 0$
no ingobbamento rispetto a C
(torsione secondaria non ha contributi (importanti) da ingobbamento impedito)


Integrando:
valor medio della funzione area settoriale
f.ne area settoriale
"mappa di spostamento"
Si ottiene
linea media
Profili sottili formati da Rettangolari sottili
Profili sottili a stella
no ingobbamento rispetto a C
(torsione secondaria non ha contributi importanti da ingobbamento impedito)
riferita al centro della stella
lineare in s
C.T.