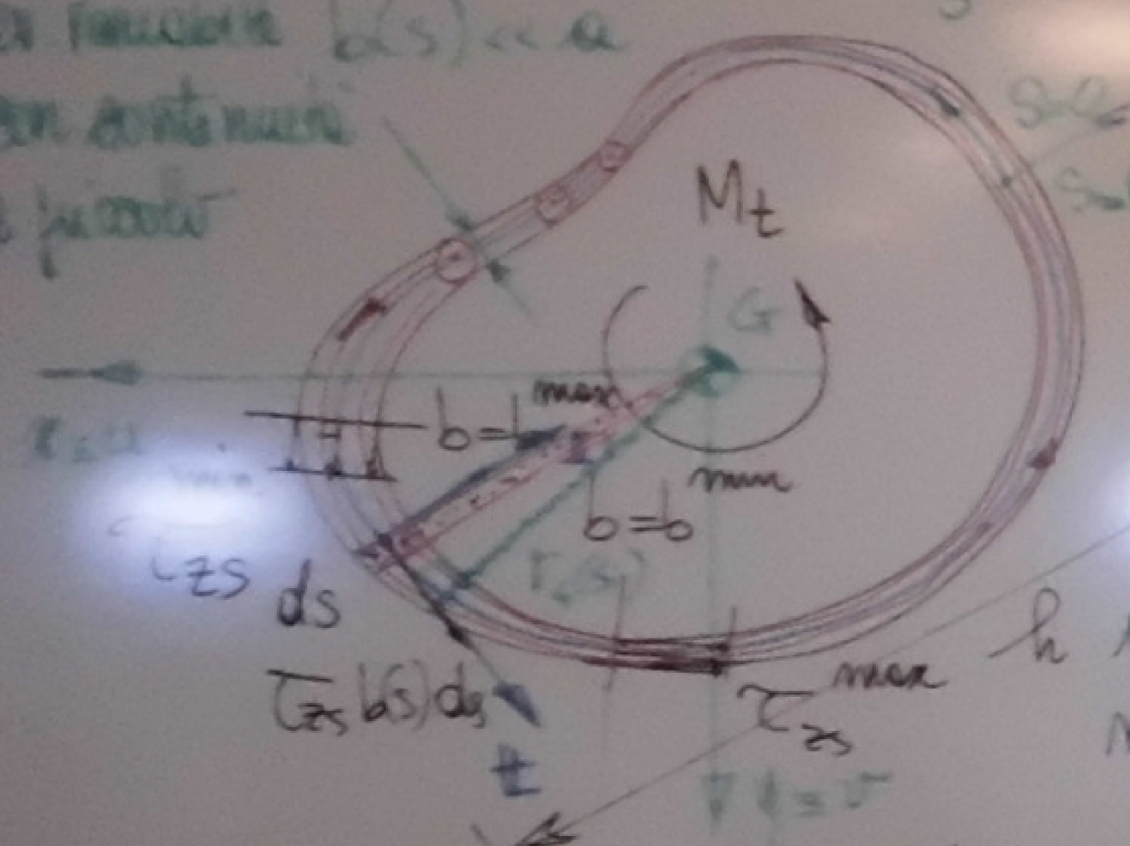
Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari)



h ingombro del profilo nel piano della sez.

– Profilo in parete sottile chiuso (singola maglia chiusa) soggetto a torsione. Si presume che offra alta capacità resistente a torsione (τ_{zs} con bracci di leva dell'ordine di h), con τ_{zs} all'incirca costanti sullo spessore e flusso di tensioni tangenz. costante

– Analogia idrodinamica

$\tau_{zs} \leftrightarrow v_s = \text{cost}$ sullo spessore

$q(s) = v_s(s)\, b(s) = \text{cost}$ lungo la linea media $\leftrightarrow Q = VA = \text{cost}$

$q(s) = \tau_{zs}(s)\, b(s) = \text{cost} \Rightarrow$ flusso delle tensioni tangenziali

eq. alla trasl. in z

$q_1\, dz = q_2\, dz$

$b' < 0$

aperto vs. chiuso

$\tau_{zs} \sim b(s)$ $\qquad$ $\tau_{zs} \sim h$

– Analogia della membrana

φ $\leftrightarrow$ w = cost

w=0 $\qquad$ w=0

pendenza $\frac{\partial w}{\partial n} \simeq$ cost in h

$$\begin{cases} \tau_{zs} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} \simeq \text{cost sullo spes.} \\ \tau_{zn} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \simeq 0 \text{ (trascurabili)} \end{cases}$$

sez. circolare cava

$b \to 0$; $\tau \simeq \bar{\tau} = \text{cost}$

Ω area racchiusa all'interno della linea media

– Formula di BREDT (~1896)

"Ragionamento isostatico" di equil. statica tra $q = \tau_{zs}(s)\, b(s) = \text{cost}$ e M_t

$$M_t = \oint \tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds \cdot r_t(s)$$

$q = \text{cost}$

$= 2q\Omega \Rightarrow q = \frac{M_t}{2\Omega}$

$$\boxed{\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Omega\, b(s)}}$$

– dirett. prop. al mom. torc. appl.

– invers. prop. all'area Ω

– invers. prop. allo spessore b(s)

(τ_{zs}^{max} in $b = b^{min}$)

$\Omega = \pi R^2$

$\Omega \to \infty \quad \tau \to \infty$

– Deformabilità torsionale

È possibile valutare J tramite PLV:

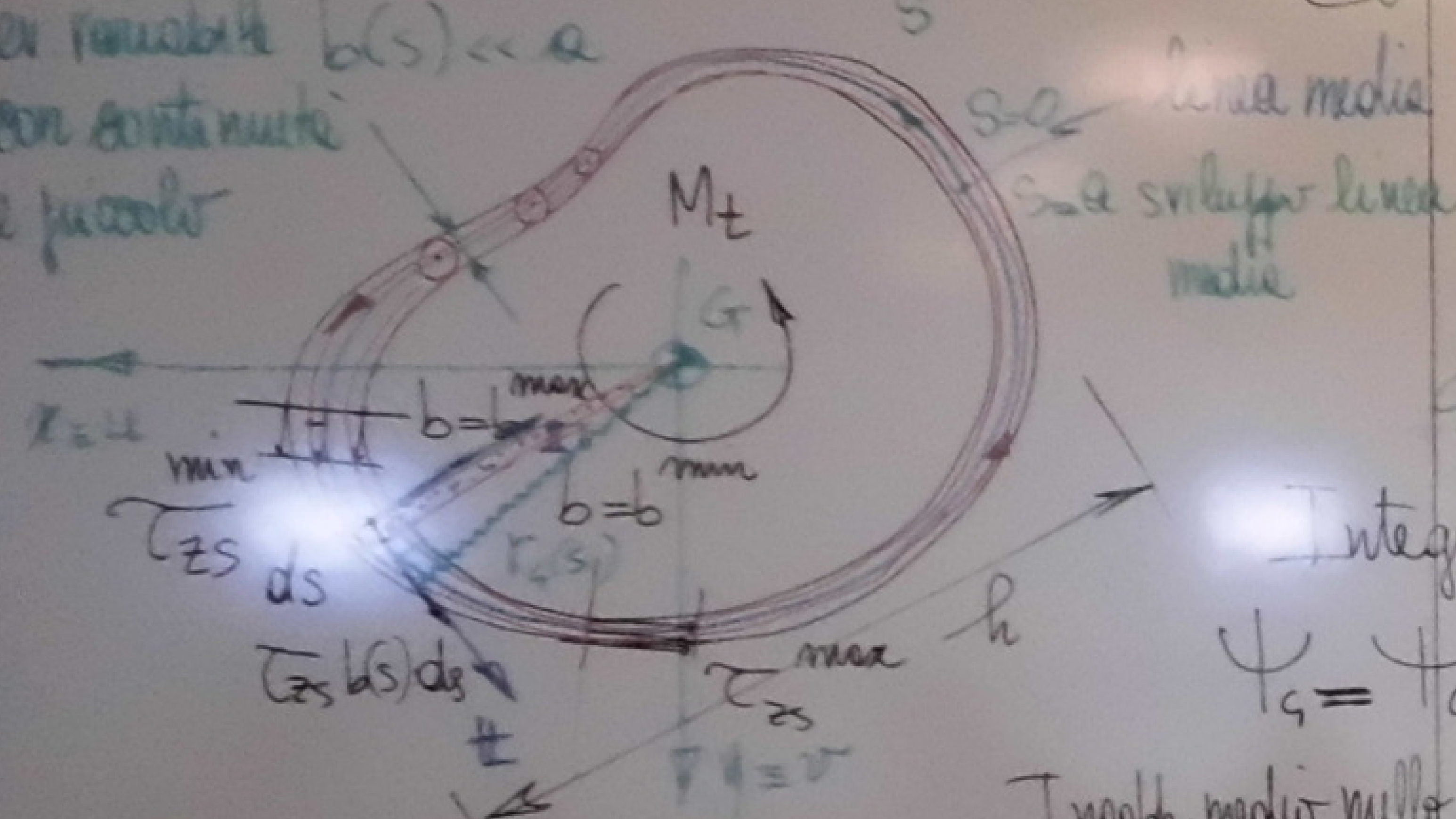
Momento d'inerzia torsionale

$J = \Omega^2$


Torsione nei profili sottili chiusi
$\tau_{zs} \leftrightarrow v_s$ = cost sullo spessore
$q(s) = v_s(s)\, b(s)$ = cost lungo la linea media $\leftrightarrow Q = VA$ = cost
$q(s) = \tau_{zs}(s)\, b(s)$ = cost → flusso delle tensioni tangenziali
M_t
$b = b^{max}$
$b = b^{min}$
τ_{zs}^{max}
ds
h ingombro del profilo nel piano della sez.
- Profilo in parete sottile chiuso (singola maglia chiusa)
soggetto a torsione. Si presume che offra alta capacità resistente
a torsione (τ_{zs} con braccio di leva dell'ordine di h), con τ_{zs}
all'incirca costanti sullo spessore e flusso di tensioni tangenziali costante
- Analogia idrodinamica
sez. circolare cava
$b \to 0$; $\tau \simeq \bar{\tau}$ = cost
portata
$b = R_e - R_i$
eq. alla trasl. in z
$q_1\, dz = q_2\, dz$
$b^{\nabla} < 0$
τ_{zs}
τ_z
dz
aperto vs. chiuso
$\tau_{zs} \sim b(s)$
$\tau_{zs} \sim h$
- Analogia della membrana
w = cost
$w = 0$
and. ~lin.
pendenza $\frac{\partial w}{\partial n}$ ≃ cost in h
$\tau_{zs} = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ ≃ cost sullo spess.
$\tau_{zn} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \simeq 0$ (trascurabili)
Ω
area racchiusa all'interno della linea media
- Formula di BREDT (~1896)
"Ragionamento isostatico di equiv. statica
tra $q = \tau_{zs}(s)\, b(s)$ = cost e M_t
$M_t = \oint \tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds \cdot r_G(s)$
$d\Omega_G$ area settoriale infinitesima
q = cost
$= 2q\Omega \Rightarrow q = \frac{M_t}{2\Omega}$
$\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Omega\, b(s)}$
- dirett. prop. al mom. torc. appl.
- invers. prop. all'area Ω
- invers. prop. allo spessore b(s)
(τ_{zs}^{max} ove $b = b^{min}$)
$\Omega = \pi R^2$
Ω^{max}
$\Omega \to \infty$ $\tau \to \infty$
$\Omega \downarrow$
$\tau \uparrow$ come $\frac{1}{\Omega}$
- Deformabilità torsionale
È possibile valutare J tramite PLV:
$\frac{M_t}{GJ}$
$\frac{M_t^2}{J} = q^2 \oint \frac{ds}{b(s)} = \frac{M_t^2}{4\Omega^2} \oint \frac{ds}{b(s)}$
Momento d'inerzia torsionale
$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$
$= 2\pi b R^3$
$J \sim \Omega^2$

Formula di BREDT (~18%)
"Ragionamento isostatico" di equil. statica
$q = \tau_{zs}(s)\, b(s) = cost$ e M_t
$d\Omega_G$ area settoriale infinitesima
$M_t = \oint \tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds \cdot \frac{r_G(s)}{2}$
q = cost
$\Omega = \pi R^2$
$= 2q\Omega \Rightarrow q = \frac{M_t}{2\Omega}$
$\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Omega b(s)}$
Ω^{max}
$= 2\pi b R^3$
$\Omega = \pi R^2$
- dirett. prop. al mom. torc. appl.
- invers. prop. all'area Ω
- invers. prop. allo spessore b(s)
$(\tau_{zs}^{max}$ ove $b = b^{min})$
$\Omega \downarrow$
$\tau \uparrow$ come $\frac{1}{\Omega}$; $J \downarrow$ come Ω^2
$\Omega \to \infty$ $\tau \to \infty$
$b = R_e - R_i$; $R = \frac{R_e + R_i}{2}$
- Deformabilità torsionale (a valle del calcolo delle τ_{zs})
È possibile valutare J tramite PLV:
$\frac{dL_e}{dz} = M_t \cdot \beta = \oint \tau_{zs} \frac{\tau_{zs}}{G} b(s)\, ds = \frac{dL_i}{dz}$
$\frac{M_t}{GJ}$
$\frac{M_t^2}{J} = q^2 \oint \frac{ds}{b(s)} = \frac{M_t^2}{4\Omega^2} \oint \frac{ds}{b(s)}$
Momento d'inerzia torsionale:
$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \underset{se\ b = cost}{=} \frac{4\Omega^2 b}{a}$
a ↔ sviluppo linea media
$J \sim \Omega^2$
Valutabile stima della bontà di tale rappr. per sezione circolare cava
$J = J_c = \frac{\pi}{2}(R_e^4 - R_i^4)$ vs. $J_B = 2\pi b R^3$

Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari)



Centro di torsione

$$\begin{cases} x_c = -\dfrac{1}{J_x} \oint \Psi_G(s)\, y(s)\, b(s)\, ds \\ y_c = \dfrac{1}{J_y} \oint \Psi_G(s)\, x(s)\, b(s)\, ds \end{cases}$$

$C \in$ asse di simm. retta

F.ne di ingobbamento: $\Psi_G(s)$

$$d\Psi_G = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta}\, ds - 2\, d\Omega_G$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} \qquad G\beta = \frac{M_t}{J}$$

$$= \frac{M_t}{2\Omega b} \frac{ds}{\frac{M_t}{J}} - 2\, d\Omega_G$$

$$= \frac{\cancel{4}^{2}\Omega^{\cancel{2}}}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \frac{1}{\cancel{2\Omega}} \frac{ds}{b(s)} - 2\, d\Omega_G$$

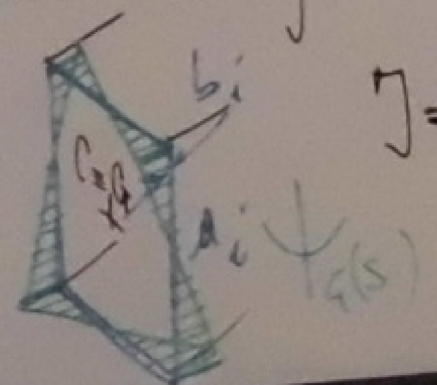
Integrando:

$$\Psi_G = \Psi_G(s) = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - \underbrace{2\Omega_G(s)}_{\text{area settoriale}} + \Psi_{G0}$$

Ingobb. medio nullo:

$$\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A} \int_A \Psi_G\, dA = 0 \Rightarrow \oint \Psi_G(s)\, b(s)\, ds = 0$$

Profili scatolari



$$J = \frac{4\Omega^2}{\sum_i \frac{l_i}{b_i}}$$; Ω_G e Ψ_G sono lineari a tratti nella s.

Resistenza:

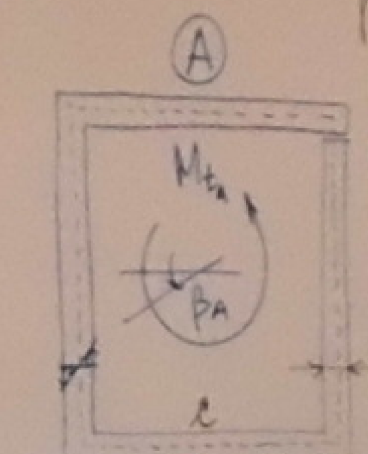
– A parità di M_t ($M_{tA} = M_{tC}$)

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{2} \frac{l}{b} \gg 1$$

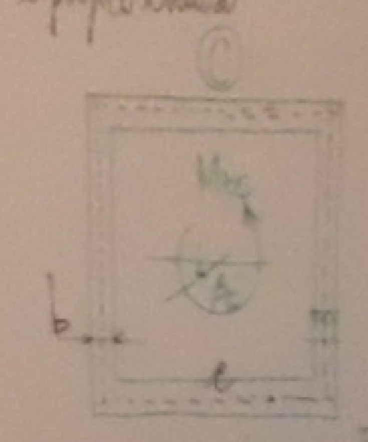
– A parità di resist. τ_0

$$\frac{M_{tC}}{M_{tA}} = \frac{3}{2} \frac{l}{b} \gg 1$$

• Confronto tra profilo aperto e profilo chiuso



VS.



$$J_A = \frac{4}{3} l b^3$$

$$\tau_A^{max} = \frac{M_t}{J_A} b = \frac{M_{tA}}{\frac{4}{3} l b^3} b = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{l b^2}$$

$$\beta_A = \frac{M_{tA}}{G J_A} = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{G l b^3}$$

$$\frac{J_C}{J_A} = \frac{l^3 b}{\frac{4}{3} l b^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{l}{b}\right)^2 \ggg 1$$

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{l b^2} \frac{2 l^2 b}{M_{tC}} = \frac{3}{2} \frac{l}{b} \frac{M_{tA}}{M_{tC}}$$

Deformabilità

– A parità di M_t

– A parità di β

$$\frac{M_{tC}}{M_{tA}}$$

Torsione nei profili sottili chiusi
F. ne di ingobbamento: ψ_G(s)
dψ_G = τ_zs(s)/(Gβ) ds − 2dΩ_G
= M_t/(2Ωb) ds/(M_t/J) − 2dΩ_G
Integrando:
ψ_G = ψ_G(s) = 2Ω/∮ds/b(s) ∫_0^s ds/b(s) − 2Ω_G(s) + ψ_G0
area settoriale
Ingobb. medio nullo:
ψ̄_G = 1/A ∫_A ψ_G dA = 0 ⇒ ∮ψ_G(s) b(s) ds = 0
J = 4Ω²/Σ_i l_i/b_i
Centro di torsione
x_C = −1/J_x ∮ ψ_G(s) y(s) b(s) ds
y_C = 1/J_y ∮ ψ_G(s) x(s) b(s) ds
C ∈ asse di simm. retta
Resistenza:
− A parità di M_t (M_tA = M_tC)
τ_A/τ_C = 3/2 l/b >> 1
− A parità di resist. τ_0
M_tC/M_tA = 3/2 l/b >> 1
• Cf. tra profilo aperto e profilo chiuso
A
VS.
C
b << l ~ 1/10 l
τ_A^max = M_tA/J_A b = M_tA/(4/3 l b³) b = 3/4 M_tA/(l b²)
β_A = M_tA/(G J_A) = 3/4 M_tA/(G l b³)
J_C = 4l⁴b/4l = l³b
τ_C = M_tC/(2Ωb) = M_tC/(2l²b)
β_C = M_tC/(G J_C) = M_tC/(G l³ b)
J_C/J_A = l³b/(4/3 l b³) = 3/4 (l/b)² >>> 1 ≃ 0.75·10² = 75 ~ 2 ord. di grandezza
τ_A/τ_C = 3/4 M_tA/(l b²) · 2l²b/M_tC = 3/2 l/b M_tA/M_tC
β_A/β_C = M_tA/(G J_A) · G J_C/M_tC = J_C/J_A · M_tA/M_tC = 3/4 (l/b)² M_tA/M_tC
Deformabilità
− A parità di M_t (M_tA = M_tC)
β_A/β_C = 3/4 (l/b)² >>> 1
− A parità di β (β_A = β_C)
M_tC/M_tA = 3/4 (l/b)² >>> 1

Torsione nei profili sottili chiusi

Centro di torsione

F.ne di ingobbamento $\Psi_G(s)$

$$d\Psi_G = \frac{\tau_{zs}(s)}{G}\,ds - 2\,d\Omega_G$$

$$= \frac{M_t}{2\Omega b}\,\frac{ds}{G} - 2\,d\Omega_G$$

Integrando

area settoriale

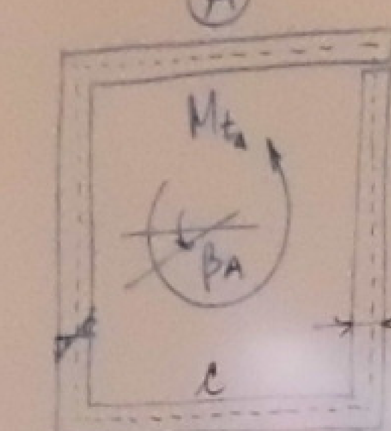
$$\Psi_G = \Psi_G(s) = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - 2\Omega_G(s) + \Psi_{G0}$$

$$\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A}\int_A \Psi_G\,dA = 0 \Rightarrow \oint \Psi_G(s)\,b(s)\,ds = 0$$

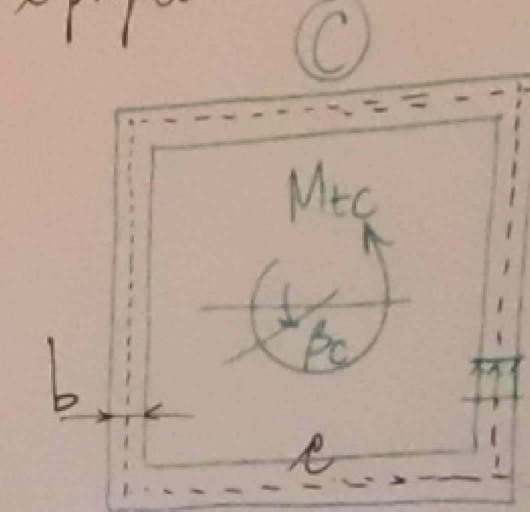
$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b}}$$

- Cf. tra profilo aperto e profilo chiuso

(A) VS. (C)



$b << c \sim \frac{1}{10} c$



$$J_A = \frac{4}{3} c b^3$$

$$\tau_A^{max} = \frac{M_{tA}}{J_A} b = \frac{M_{tA}}{\frac{4}{3} c b^3} b = \frac{3}{4}\frac{M_{tA}}{c b^2}$$

$$\beta_A = \frac{M_{tA}}{G J_A} = \frac{3 M_{tA}}{4 G c b^3}$$

$$J_C = \frac{4 c^4 b}{4 c} = c^3 b$$

$$\tau_C = \frac{M_{tC}}{2\Omega b} = \frac{M_{tC}}{2 c^2 b}$$

$$\beta_C = \frac{M_{tC}}{G J_C} = \frac{M_{tC}}{G c^3 b}$$

$$\frac{J_C}{J_A} = \frac{c^3 b}{\frac{4}{3} c b^3} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 >>> 1 \simeq 0.75 \cdot 10^2 = 75 \sim 2 \text{ ord. di grandezza}$$

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{4}\frac{M_{tA}}{c b^2}\frac{2 c^2 b}{M_{tC}} = \frac{3}{2}\frac{c}{b}\frac{M_{tA}}{M_{tC}}$$ dove $\frac{3}{2}\frac{c}{b} >> 1 \simeq 1.5 \cdot 10 = 15 \sim 1$ ord. di grand.

$$\frac{\beta_A}{\beta_C} = \frac{M_{tA}}{G J_A}\frac{G J_C}{M_{tC}} = \frac{J_C}{J_A}\frac{M_{tA}}{M_{tC}} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 \frac{M_{tA}}{M_{tC}}$$

Resistenza:

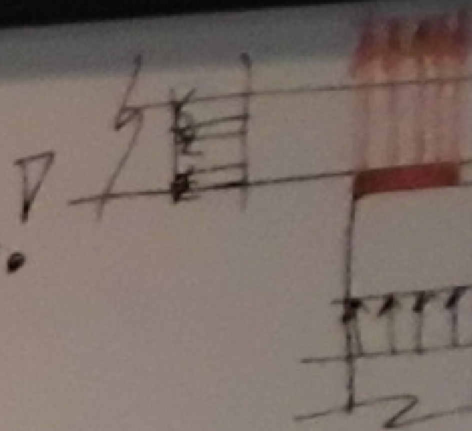
- A parità di M_t ($M_{tA} = M_{tC}$)

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{2}\frac{c}{b} >> 1$$

- A parità di resist. τ_0

$$\frac{M_{tC}}{M_{tA}} = \frac{3}{2}\frac{c}{b} >> 1$$

Att. alle saldature!



Deformabilità:

- A parità di M_t ($M_{tA} = M_{tC}$)

$$\frac{\beta_A}{\beta_C} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 >>> 1$$

- A parità di β ($\beta_{tA} = \beta_{tC}$)

$$\frac{M_{tC}}{M_{tA}} = \frac{3}{4}\left(\frac{c}{b}\right)^2 >>> 1$$