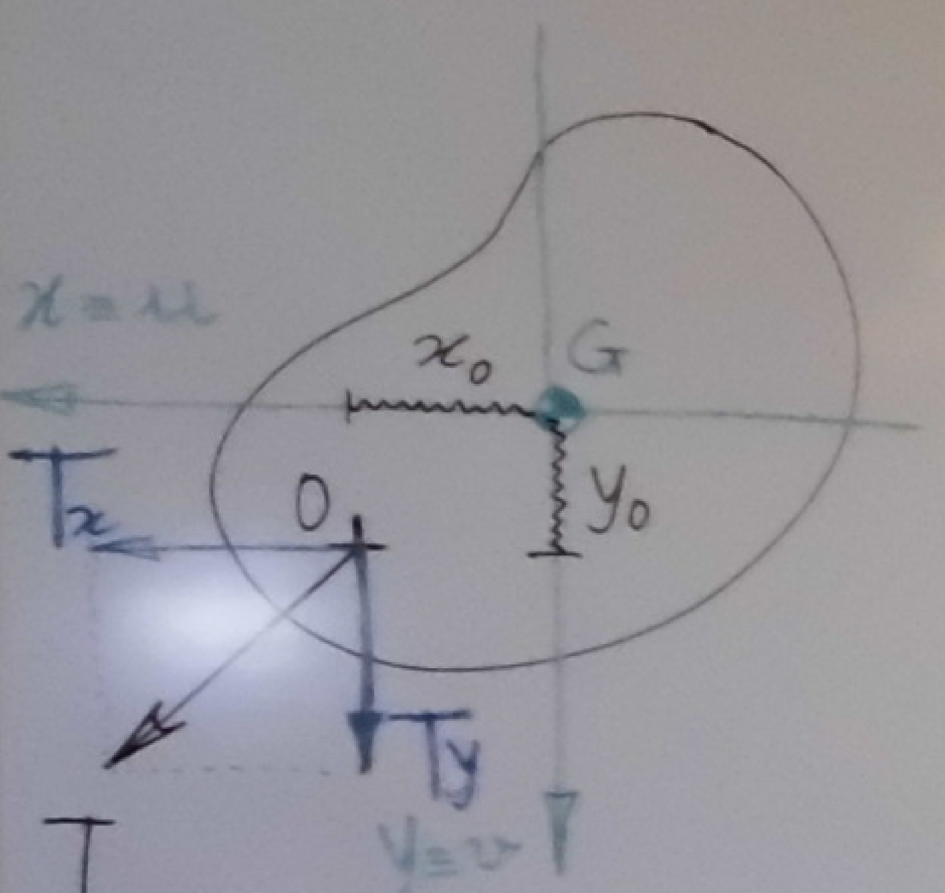
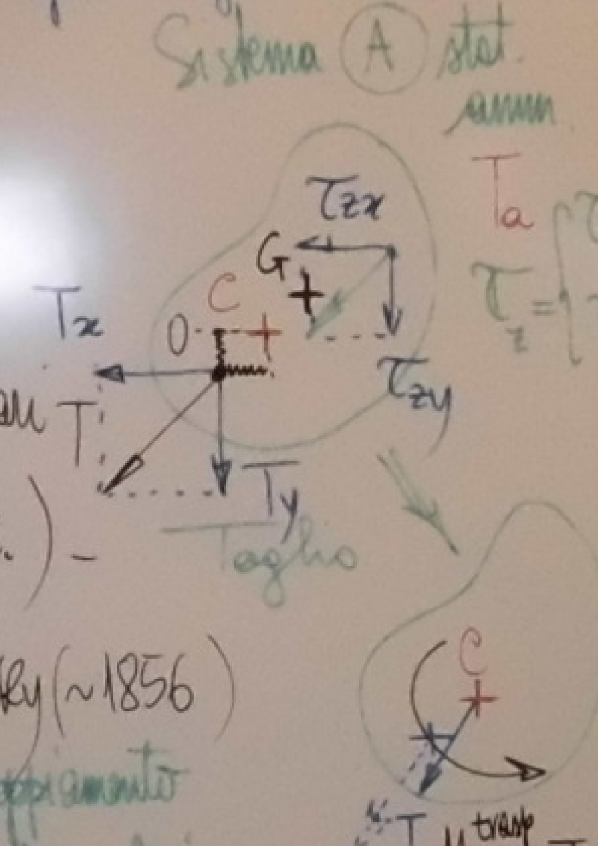
Taglio e centro di taglio



- La soluzione del pb. del taglio, secondo le eq.ni governanti (equilibrio e congruenza) derivate a monte nelle $\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$ (accoppiato a quello della flessione ⇒ σ_{zz} con soluz. analitica: "flessione composta" o taglio) è possibile in forma chiusa solo in casi particolari (sezioni codificate di forma semplice; es. sez. circ.) –
- In generale si utilizzano trattazioni approx., vedi principalmente la trattazione di Jourawsky (~1856)
- Al variare del p.to di applicazione O della risultante tagliante T nasce evidentemente un accoppiamento taglio/torsione legato al momento torcente che si genera per trasporto della forza T parallelamente a sé stessa nel piano della sez.
- In tal senso, si definisca Centro di Taglio (C.Ta.) il p.to di applicazione dell'azione tagliante T per il quale la sezione si inflette (per flessione semplice) SENZA ruotare nel piano della sez. stessa.

- Tale rotazione (nulla) viene stimata in senso energetico tramite applicazione del PLV, associando i pb. di taglio e torsione in modo tale da produrre lavoro interno mutuo nullo (risposte a taglio e a torsione energeticamente ortogonali)

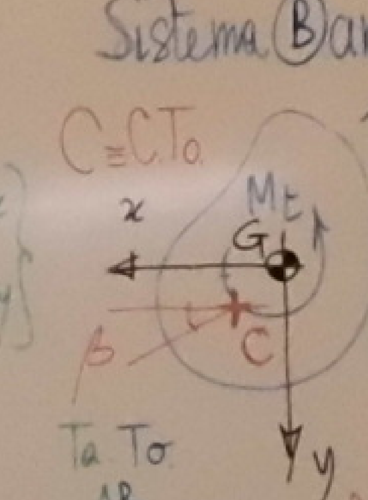
Sistema (A) stat. amm. Sistema (B) cinem. amm.



T_a: $\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$

$M_t^{trasp} = T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c)$

$C \equiv C.T_o$



$$\begin{cases} s_z = -\beta z(y - y_c) \\ s_y = \beta z(x - x_c) \Rightarrow \gamma_{zi} \\ s_z = \beta \psi_c(x, y) \end{cases}$$

T_a T_o AB

$$\frac{dL_e}{dz} = T_x s_{x_c} + T_y s_{y_c} + [T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c)]\beta =$$

$$\int_A (\tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{zy}\gamma_{zy})\, dA = \frac{dL_i^{AB}}{dz} \equiv 0$$

(rotazione nulla della sez. nel suo piano se $O \equiv CT_a$)

Dovendo valere, $T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c) = 0$

$\forall T_x, T_y \Rightarrow \boxed{x_0 = x_c ;\ y_0 = y_c}$

- Si ottiene pertanto che $CT_a \equiv CT_o = CT \equiv C$
- Similmente, potremmo associare torsione e taglio

$$M_t^{T_o} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_o} \cdot \gamma_z^{T_a}\, dA$$

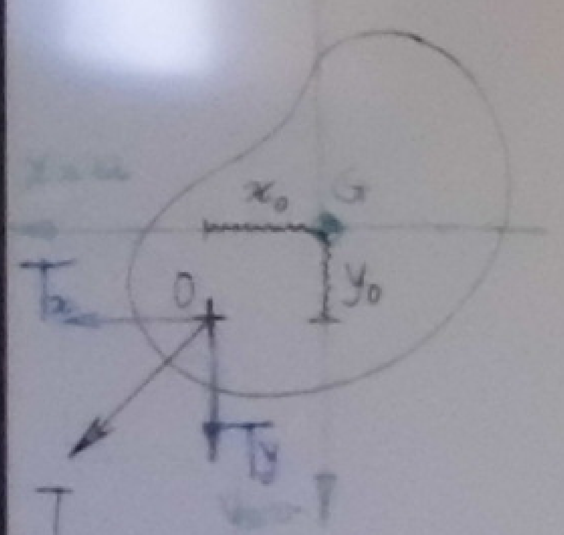
$$= \int_A \frac{\tau_z^{T_o}}{G} \cdot \tau_z^{T_a}\, dA$$

$$= \int_A \tau_z^{T_a} \cdot \gamma_z^{T_o}\, dA = 0$$

(rotazione nulla della sezione nel suo piano)

- Nota la soluz. del pb. del taglio, è possibile determinare CT_a e quindi ($CT_o = C$) oppure viceversa nota la soluz. del pb. della torsione, ...

Taglio e centro di taglio



– La soluzione del pb. del taglio, secondo le eq.ni governanti (equilibrio e congruenza) derivate a monte nelle $\tau_z \begin{cases} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{cases}$

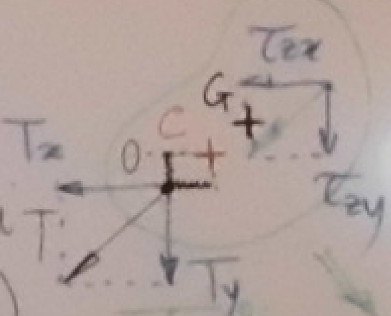
è possibile in forma chiusa solo in casi particolari (sezioni codificate di forma semplice; es. sez. circ.) –

– In generale si utilizzano trattazioni approx., vedi principalmente la trattazione di Jourawsky (~1856)

– In tal senso, si definisce Centro di Taglio (CT_a) il pto di applicazione dell'azione tagliante T per il quale la sezione si inflette ... SENZA ruotare nel piano della sez. stessa.

– Tale rotazione (nulla) viene stimata in senso energetico tramite applicazione del PLV, associando i pb. di taglio e torsione in modo tale da produrre lavoro interno mutuo nullo (risposte a taglio e a torsione energeticamente ortogonali)

Sistema (A) stat. amm.

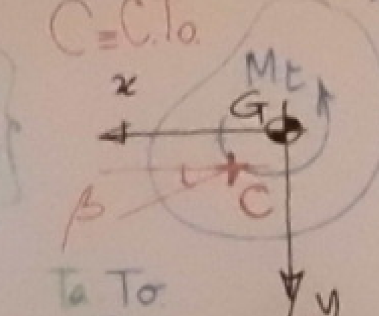


Taglio

$T_a \begin{cases} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{cases}$

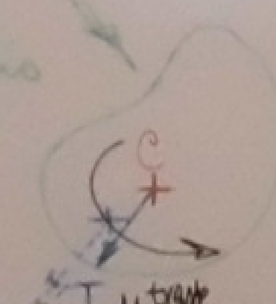
Sistema (B) cinem. amm.

$C \equiv C.T_o$



$$\begin{cases} s_z = -\beta z (y - y_c) \\ s_y = \beta z (x - x_c) \Rightarrow \gamma_{zi} \\ s_z = \beta \Psi_c(x, y) \end{cases}$$

$T_a \; T_o$



$$M_t^{trasp} = T_y (x_0 - x_c) - T_x (y_0 - y_c)$$

$$\frac{dL_e^{AB}}{dz} = T_x \cancel{s_{x_c}}^{0} + T_y \cancel{s_{y_c}}^{0} + \left[T_y (x_0 - x_c) - T_x (y_0 - y_c) \right] \beta = $$

$$\int_A \left(\tau_{zx} \gamma_{zx} + \tau_{zy} \gamma_{zy} \right) dA = \frac{dL_i^{AB}}{dz} \equiv 0$$

$\tau_z^{T_a} \cdot \gamma_z^{T_o}$

Dovendo valere, $\forall T_x, T_y$: $T_y (x_0 - x_c) - T_x (y_0 - y_c) \equiv 0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = x_c \; ; \; y_0 = y_c}$

(rotazione nulla della sez. nel suo piano se $O \equiv CT_a$.)

– Si ottiene pertanto che $CT_a \equiv CT_o \equiv CT \equiv C$

– Similmente, potremmo associare torsione e taglio

$$M_t^{T_o} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_o} \cdot \gamma_z^{T_a} \, dA$$

$\gamma_z = \frac{\tau_z}{G}$ (elastico)

$$= \int_A \frac{\tau_z^{T_o}}{G} \cdot \tau_z^{T_a} \, dA$$

$$= \int_A \tau_z^{T_a} \cdot \gamma_z^{T_o} \, dA = 0$$

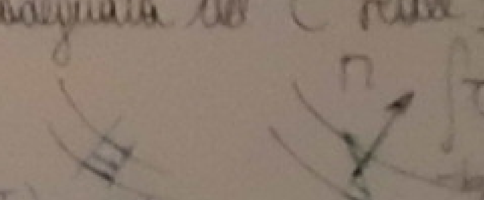
(rotazione nulla della sezione nel suo piano)

– Nota la solut. del pb. del taglio, è possibile determinare CT_a (e quindi $CT_o \equiv C$) oppure, viceversa, note le solut. del pb. della torsione, quindi determinato CT_o (Ψ_a) è noto $CT_a \equiv C$

– Ove ∃ano soluz. approssimate del pb. del taglio (es. Jourawsky) e del pb. della torsione (es. profili sottili) che risultano energeticamente ortogonali ($\tau_z \cdot \gamma_z = 0$)

la stima di CT_a o CT_o da tali soluz. fornisce stima adeguata del C reale

es. profili sottili aperti



$\tau_{zs}(T) = cost$

$$\int_{-t/2}^{+t/2} \tau_{zs}^{T_a} \tau_{zs}^{T_o} \, dn = 0$$

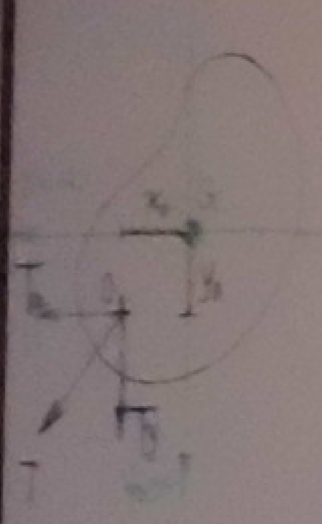
da equiv. statica

$$\int_A \left(\tau_{zy} x - \tau_{zx} y \right) dA = T_y x_c - T_x y_c$$

$T_y = 1, T_x = 0 \Rightarrow x_c$

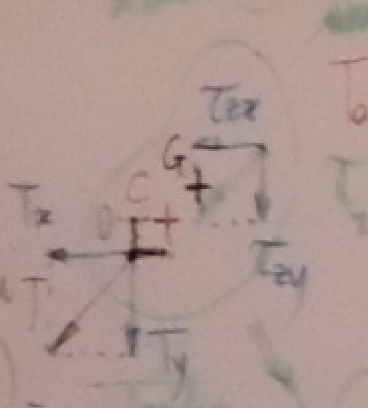
$T_y = 0, T_x = 1 \Rightarrow y_c$

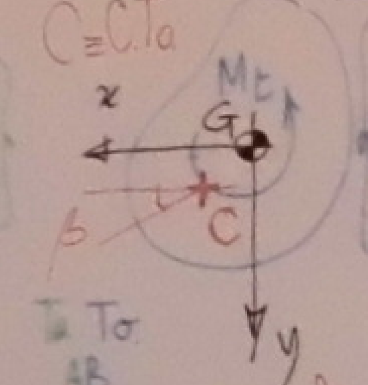
Taglio e centro di taglio



- Tale rotazione nulla viene stimata in senso energetico tramite applicazione del PLV, associando i pb. di taglio e torsione in modo tale da produrre lavoro interno mutuo nullo (rispetto a taglio e torsione energeticamente ortogonali)

Sistema Ⓑ anm. amm.



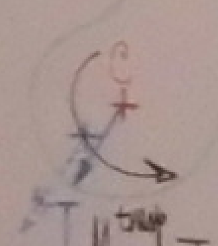


$T_a \quad T_0$

$$\begin{cases} s_z = -\beta z (y - y_c) \\ s_y = \beta z (x - x_c) \Rightarrow \gamma_{zi} \\ s_z = \beta \Psi_c(x,y) \end{cases}$$

$$\frac{dL_i^{AB}}{dz} = T_x s_{x_0} + T_y s_{y_c} + \left[T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c)\right]\beta =$$

$$\int_A \big(\underbrace{\tau_{zx}\gamma_{zx} + \tau_{zy}\gamma_{zy}}_{\tau_z^{T_a}\cdot\gamma_z^{T_0}}\big)\, dA = \frac{dL_i^{AB}}{dz} \equiv 0$$



$$M_t^{\text{trasp}} = T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c)$$

Dovendo valere, $\forall T_x, T_y$ $\quad T_y(x_0 - x_c) - T_x(y_0 - y_c) \equiv 0$

$\Rightarrow \boxed{x_0 = x_c;\ y_0 = y_c}$

(rotazione nulla della sez. nel suo piano x $0 \equiv C.T_a$.)

- Si ottiene pertanto che $C.T_a \equiv C.T_0 \equiv CT \equiv C$
- Similmente, potremmo associare torsione e taglio:

$$M_t^{T_0} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_0} \cdot \frac{\gamma_z^{T_a}}{G}\, dA \quad \text{(elastico)}$$

$$= \int_A \underbrace{\frac{\tau_z^{T_0}}{G}}_{\gamma_z^{T_0}} \cdot \tau_z^{T_a}\, dA$$

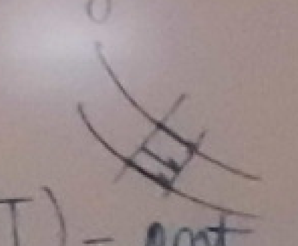
$$= \int_A \tau_z^{T_a} \cdot \gamma_z^{T_0}\, dA = 0$$

(rotazione nulla della sezione nel suo piano)

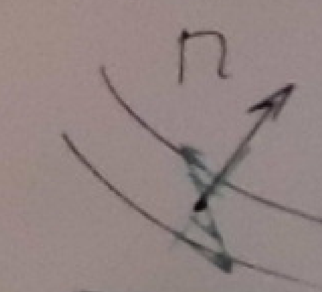
- Nota la solut. del pb. del taglio, è possibile determinare CT_a (e quindi $CT_0 \equiv C$) oppure, viceversa, nota la solut. del pb. della torsione, quindi determinato $CT_0(\Psi_G)$ è noto $CT_a \equiv C$

- Ove ∃ano solut. approssimate del pb. del taglio (es. Jourawsky) e del pb. della torsione (es. profili sottili) che risultino energeticamente ortogonali $\left(\tau_z \cdot \frac{\gamma_z}{G} = 0\right)$ la stima di CT_a o CT_0 da tali solut. fornisce stima adeguata del C reale

es. profili sottili aperti



$\tau_{zs}(T) = \text{cost}$



$$\int_{-b/2}^{+b/2} \tau_{zs}^{T_a}\, \tau_{zs}^{T_0}\, dn = 0$$

$\tau_{zs}(M_t) = $ lin. a farfalla

da equiv. statica

$$\int_A \left(\tau_{zy}^{T_a} x - \tau_{zx}^{T_a} y\right) dA = T_y x_c - T_x y_c$$

$$\begin{cases} T_y = 1,\ T_x = 0 \Rightarrow x_c \\ T_y = 0,\ T_x = 1 \Rightarrow y_c \end{cases}$$

coordinate di C


Taglio nei profili sottili (aperti), secondo trattazione alla Jourawsky (~1856)
Per equil. alla traslazione nella direzione z
flessione associata al taglio
corda di taglio
Centro di taglio (incognito)
formula di Navier (flessione retta)
valor medio
τzs costante lungo la corda
(del tutto efficace ai fini ingegneristici)
formula di Jourawsky
(applicata al caso dei profili sottili aperti)
Profilo sottile aperto soggetto a T=Ty applicata nel C.Ta.

secondo trattazione alla Jourawsky (~1856)
dMx = Ty dz
corda di taglio
Profilo sottile aperto soggetto a T = Ty applicata nel C.T.
τ = τsz b(s) dz
valor medio
Per equil. alla traslazione nella direzione z:
τ = τzs b(s) dz = Ty/Jx Sx dz = dR
τzs(s) = Ty Sx(s) / Jx b(s)
formula di Jourawsky
(applicata al caso dei profili sottili aperti). Le τzs risultano
- dirett. prop. a Ty
- inv. prop. a Jx
- dirett. prop. a Sx(s)
- inv. prop. a b(s)
b(s) < 0
- Si noti che la soluz. ottenuta non dipende dal p.to di applicazione di T
- Supponendo T = Ty applicata in C, l'equiv. statica
Ty xc =
consente il calcolo di C
(Ty = 1)
coordinate del centro di taglio
Mtd = T · d
d = CG

Per equil. alla traslazione nella direzione z:

$$\bar{T}dz \quad T = \bar{\tau}_{zs}\, b(s)\, dz = \frac{T_y}{J_x} S_x^{\triangleright\triangleright} dz = dR$$

$$\bar{\tau}_{zs}(s) = \frac{T_y\, S_x^{\triangleright\triangleright}(s)}{J_x\, b(s)} = -\frac{T_y\, S_x^{\triangleright}(s)}{J_x\, b(s)}$$

formula di Jourawski (applicata al caso dei profili sottili aperti). Le τ_{zs} risultano:

- dirett. prop. a T_y
- inv. prop. a J_x
- dirett. prop. a $S_x^{\triangleright\triangleright}(s)$
- inv. prop. a $b(s)$

$$\bar{\tau}_{zs}(s) = \frac{1}{b(s)} \int \tau_{zs}(s,n)\, dn$$

$\tau_{zs} \neq 0$ se $b(s)$ varia

$b^{\triangleright}(s) < 0$

- Si noti che la soluz. ottenuta non dipende dal p.to di applicazione di T.
- Supponendo $T = T_y$ applicata in C, l'equiv. statica

$$T_y\, x_C = \int_0^a \tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds\, r_G(s) \qquad (T_y = 1)$$

consente il calcolo di

$$= \int_0^a \frac{T_y}{J_x} S_x^{\triangleright\triangleright}(s)\, r_G(s)\, ds$$

$$x_C = \frac{1}{J_x} \int_0^a S_x^{\triangleright\triangleright}(s)\, r_G(s)\, ds$$

$$T = T_x = 1 \qquad y_C = -\frac{1}{J_y} \int_0^a S_y^{\triangleright\triangleright}(s)\, r_G(s)\, ds$$

Coordinate del centro di taglio

$$\tau_{zs}^{T_a} J \qquad \tau_{zs}^{T_o} \qquad \mathcal{L}_i^{T_a T_o} \equiv 0$$

- Att. al momento torcente "parassita" (specie nei sottili aperti)

$$M_{td} = T \cdot d \qquad d = \overline{CG}$$

può condurre a τ_{zs} elevate da momento torcente "parassita" nei profili aperti!