

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

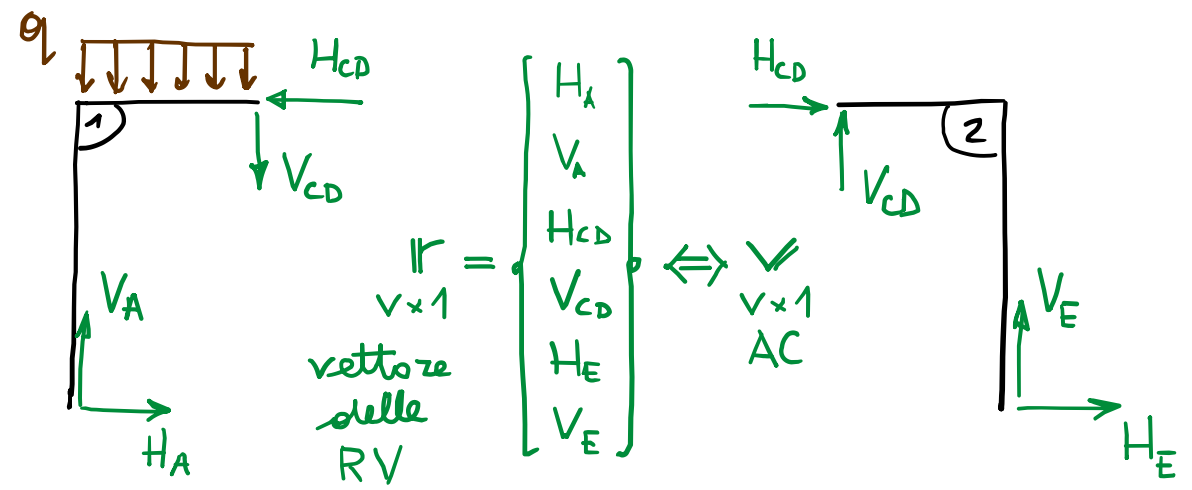
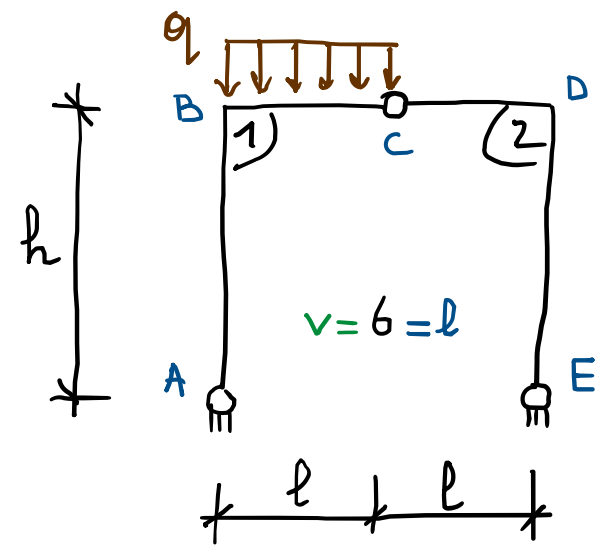
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 06

Analisi Statica (AS) $\rightarrow$ trattazione matriciale (implementabile); dualità cinematica/statica

- Approccio completo $\rightarrow$ rimozione di tutti i g.d.l. ("esploso")



$$r = \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix}$$

$v \times 1$
vettore delle RV

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix}$$

$v \times 1$
AC

- Scrittura delle equazioni di equilibrio ($\rightarrow$ sistema di equilibrio):

$$11 \Leftrightarrow \$, f$$

$(l=3n \times 1)$

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad & \begin{cases} \Sigma F_x^1 = 0 \Rightarrow H_A - H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^1 = 0 \Rightarrow V_A - V_{CD} - ql = 0 \\ \Sigma M_A^1 = 0 \Rightarrow H_{CD}h - V_{CD}l - \frac{ql^2}{2} = 0 \end{cases} \\ \textcircled{2} \quad & \begin{cases} \Sigma F_x^2 = 0 \Rightarrow H_E + H_{CD} = 0 \\ \Sigma F_y^2 = 0 \Rightarrow V_E + V_{CD} = 0 \\ \Sigma M_E^2 = 0 \Rightarrow -H_{CD}h - V_{CD}l = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\$ = \begin{bmatrix} H_A & V_A & H_{CD} & V_{CD} & H_E & V_E \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & -l & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -h & -l & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} H_A \\ V_A \\ H_{CD} \\ V_{CD} \\ H_E \\ V_E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -ql \\ -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

Per isoperione, con le corrispondenze curate:

$$E = C^T \Leftrightarrow C = E^T$$

dualità

(C, E di rango pieno, nonsing.)

$$r = -E^{-1} \cdot f \Leftrightarrow E \cdot r = -f \Leftrightarrow \$ =$$

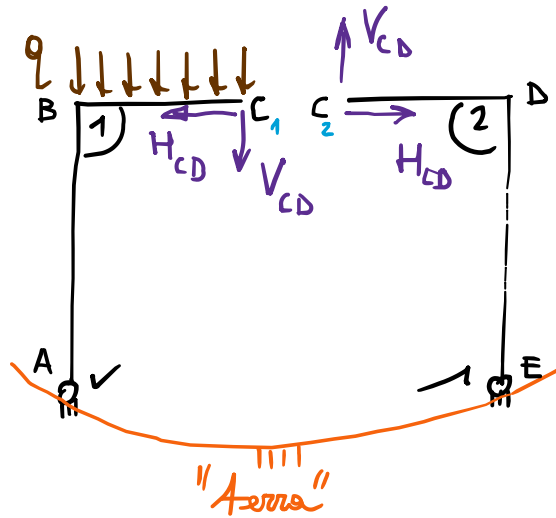
Soluz.

risultante forze

$l=3n \times v$
matrice di equilibrio reattive

attive

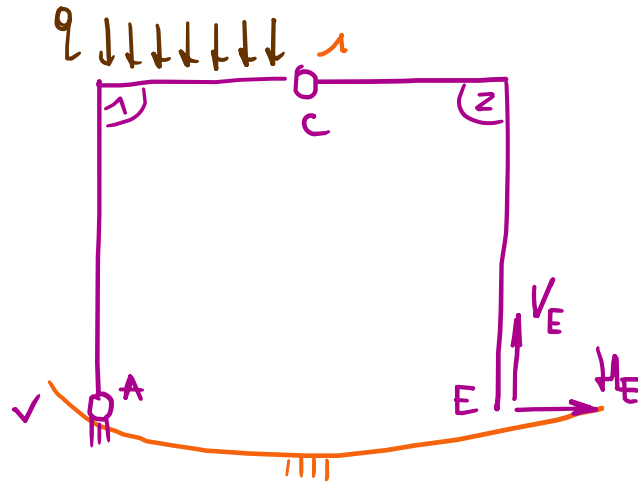
- Analogamente per analisi con sistema risolto (schema ad albero):



$$\begin{aligned} \checkmark \sum M_A^1 &= 0 \\ \curvearrowright \sum M_E^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 2l & -l \\ -l & -l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_{CD} \\ V_{CD} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{E}^T \cdot \mathbf{r}^T + \mathbf{f}^T = \mathbf{0} \\ &\quad \text{L } \mathbf{C}^T; \text{ sottomatrice di } \mathbf{E} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} H_{CD} = \frac{ql^2}{4l} \\ V_{CD} = -\frac{ql}{4} \end{cases}$$

$$r[\mathbf{E}^T] = 2, \det[\mathbf{E}^T] = -2ll \neq 0$$



$$\begin{aligned} \checkmark \sum M_A^{1+2} &= 0 \\ \curvearrowright \sum M_C^2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \begin{bmatrix} 0 & 2l \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} H_E \\ V_E \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{ql^2}{2} \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{0} \\ &= \mathbf{E}^{TT} \cdot \mathbf{r}^{TT} + \mathbf{f}^{TT} = \mathbf{0} \\ &\quad \text{L } \mathbf{C}^{TT}; \text{ non sottomatrice di } \mathbf{E} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} H_E = -\frac{ql^2}{4l} \\ V_E = \frac{ql}{4} \end{cases}$$

$$r[\mathbf{E}^{TT}] = 2, \det[\mathbf{E}^{TT}] = -2ll \neq 0$$

Sistema di equilibrio $s = E \cdot r + f = 0 \Leftrightarrow E \cdot r = -f$

- Esistenza della soluzione (se il sistema è coerente, "consistent") $\leftrightarrow$ sistema equilibrabile
- Unicità della soluzione (determinazione statica)

— Sistema coerente $\overset{CNS}{s.s.e} \quad r[E] = r[E, -f]$ (th. di Rouché-Capelli)

non

<

— con unica solut. s.s.e $r[E] = r[E, -f] = v$

infinite

<

deficienza di rango rispetto a v

$\rightarrow I = N[E] = v - r[E] \geq 0$ $\overset{\text{grado di indelet. statica, o di iperst.}}{\text{grado di indelet. statica, o di iperst.}}$ $\overset{\text{rango}}{\text{rango}}$ $L \leq \min\{l, v\}$ sist. di equilibrio

deficienza di rango rispetto a l $\leftarrow$ grado di indelet. cinem., o di labilità

$L = N[C] = l - r[C] \geq 0$ $\overset{\text{grado di indelet. cinem., o di labilità}}{\text{grado di indelet. cinem., o di labilità}}$ $\updownarrow$ sist. di congruenza

— poiché si è notato, per ispezione (poi dim. via PLV) che $E = C^T$; $C = E^T \Rightarrow r[E] = r[C] = r$
 $\Rightarrow$ dualità cinematica/statica

$$I - L = v - \cancel{r} - l + \cancel{r}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} I = L + v - l \\ L = I + l - v \end{cases}$$

N.B. gradi di indelet. cinematica alimentano gradi di indelet. statica (e viceversa)

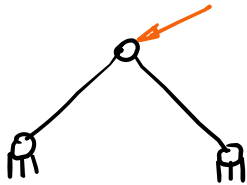
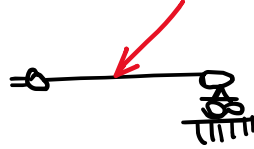
Classificazione

1) $L=0, I=0$

$r=l \quad r=v \Rightarrow v=l=r$



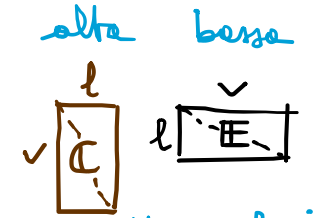
quadrato



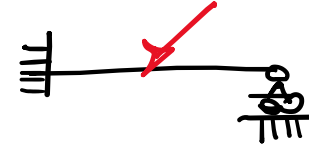
Strutture
isostatiche
(sistemi cinem.
e statici
isodeterminati)

2) $L=0, I>0$

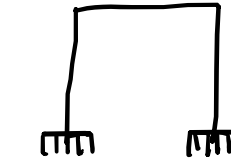
$r=l \quad r<v \Rightarrow v>l=r$



rettangolari



$I=1$

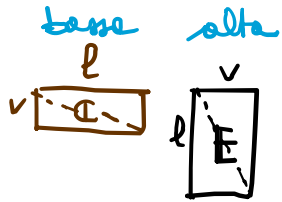


$I=3$

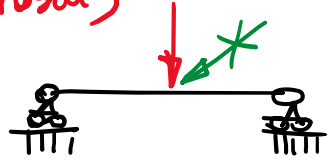
Strutture
iperstatiche
(sistemi cinem.
det. e statici
indet.)

3) $L>0, I=0$

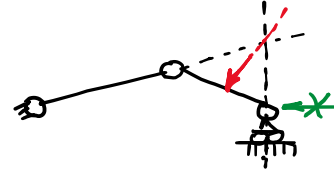
$r<l \quad r=v \Rightarrow r=v<l$



rettangolari



$L=1$

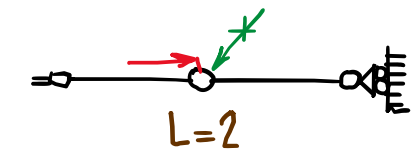


Strutture
iperstatiche (se equilibrabili)
(sistemi cinem.
indet. e statici
determinati)

4) $L>0, I>0$

$r<l \quad r<v \Rightarrow v \leq l$

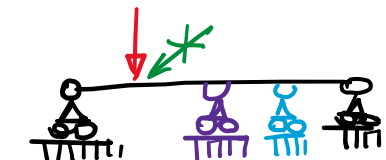
Strutture
indeterminate
(sistemi cinem.
e statici
indeterminati)



$L=2$

$v<l \quad I=1$

"iperstatica è assiale"



$L=1$

$v=l \quad I=1$

$v>l \quad I=2$