Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

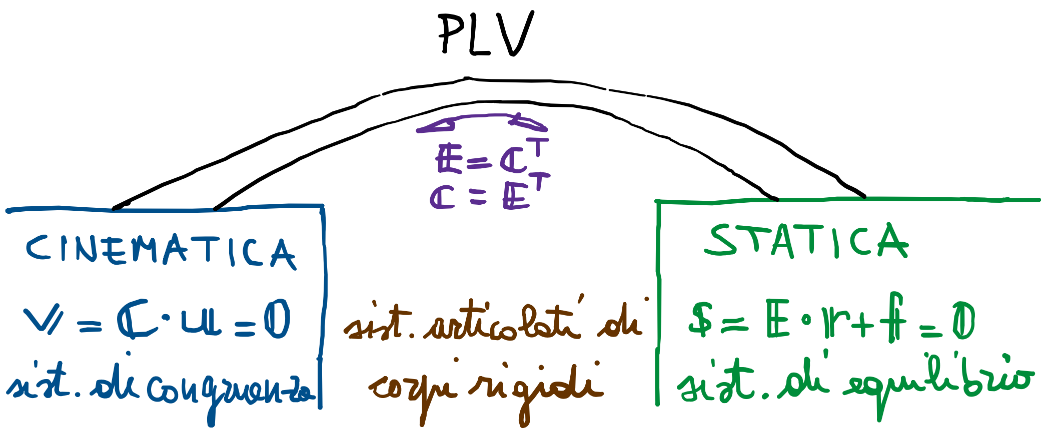
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) – Meccanica delle Strutture (sistemi di travi)



- PLV: "ponte" tra le sponde della cinematica e della statica.
- non aggiunge eq.ni governanti al problema ma consente di mettere in comunicazione le due "sponde".
- riferito potenzialmente a sistemi "virtuali", cioè non necessariamente coincidenti col sistema reale (peraltro associabili tramite lavori mutui), quindi indip. dal comportamento del materiale.
- principio ⇒ teorema dimostrabile (Meccanica dei continui)

Definizioni:

Ⓐ sistema di quantità statiche equilibrate, forze e azioni interne, staticamente ammissibili

Ⓑ sistema di quantità cinematiche congruenti, spostamenti e deformaz., cinematicamente ammissibili

PLV: CN di equilibrio e di congruenza

$$\forall \; A, B \Rightarrow \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB}$$

ove

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \sum_i F_i^A \cdot s_i^B + W_i^A \cdot \varphi_i^B + R_i^A \cdot \bar{s}_i^B$$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_{str} N^A \cdot dn^B + T^A \cdot dt^B + M^A \cdot d\varphi^B$$

$\neq 0$ per sistemi deformabili

Manifestazioni operative (Princ. Spostamenti/Forze Virtuali):

PSV: CS di equilibrio

Ⓑ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓐ equil.

- calcolo di RV e AI nei sist. articolati di corpi rigidi ($\mathcal{L}_i = 0$)

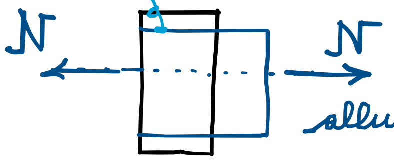
PFV: CS di congruenza

Ⓐ, $\mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \Rightarrow$ Ⓑ congruente

- calcolo di componenti di spost. e soluzione di strutture iperst.

– Deformazioni elementari del concio di trave: (elastiche + anelastiche) ⇒ ad es. termiche (coazioni impresse di natura termica)

contraz. trasv. legata a ν, coeff. di Poisson



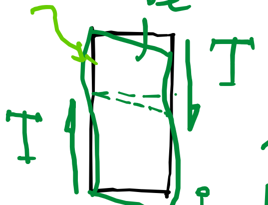
$dn_e = \varepsilon_e \, ds = \frac{N \, ds}{EA}$ — EA rigidezza assiale

E: modulo di elast. longitudinale

A: area sezione trasv. ($EA \to \infty$)

ingobbamento fuori piano della sez.

$\mu \geq 1$ fattore di taglio



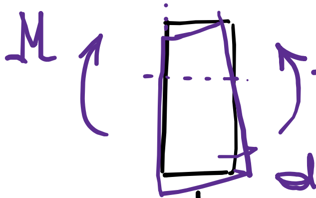
scorrimento

$\bar{dv}_e = \bar{\gamma}_e \, ds = \mu \frac{T \, ds}{GA}$ — GA rigidezza tagliante

G: modulo di elast. tangenz.

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

($GA \to \infty$)



rotazione

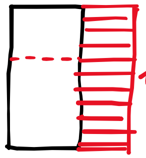
$d\varphi_e = \chi_e \, ds = \frac{M \, ds}{EJ}$ — EJ rigidezza flessionale

J: momento d'inerzia sezione trasversale

prevalenti nei sist. di trave

$+\Delta T$ incremento di temp. uniforme

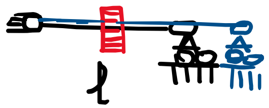
α: coeff. di dilatazione termica $\sim 10^{-5} \div 10^{-6} \, {}^\circ C^{-1}$



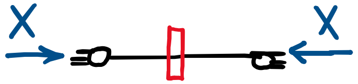
$\varepsilon_t = \alpha \, \Delta T$ def. termica

$dn_t = \varepsilon_t \, ds$

$\Delta l_t = \varepsilon_t \, l$



def. sì, sforzo NO

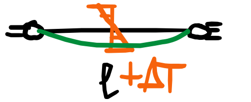


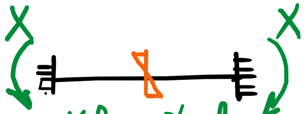
def. NO, sforzo SÌ

$\frac{Xl}{EA} = \varepsilon_t \, l$

$X = \alpha \Delta T EA$

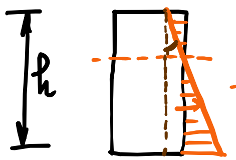
$-\Delta T$ $\quad \Delta\varphi = \chi_t \, l$





$\frac{Xl}{EJ} = \chi_t \, l$

$X = \chi_t EJ = \frac{2\alpha \Delta T}{h} EJ$



$-\Delta T_2$

$+\Delta T_1$

$\chi_t = \alpha \frac{\Delta T_1 + \Delta T_2}{h} = \vartheta_t$ curvatura termica

$d\varphi_t = \chi_t \, ds$

- **Dualità** (via PSV): AB

(A) reale: r, f

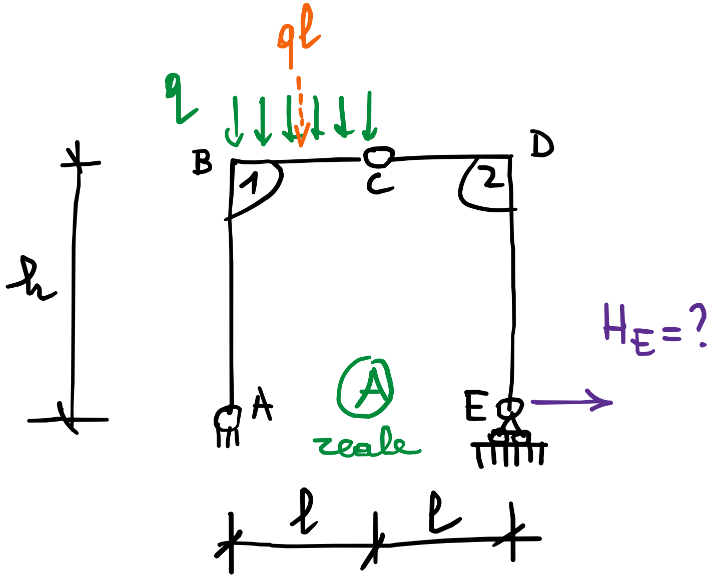
(B) virtuale $v = C \cdot u$ congr.

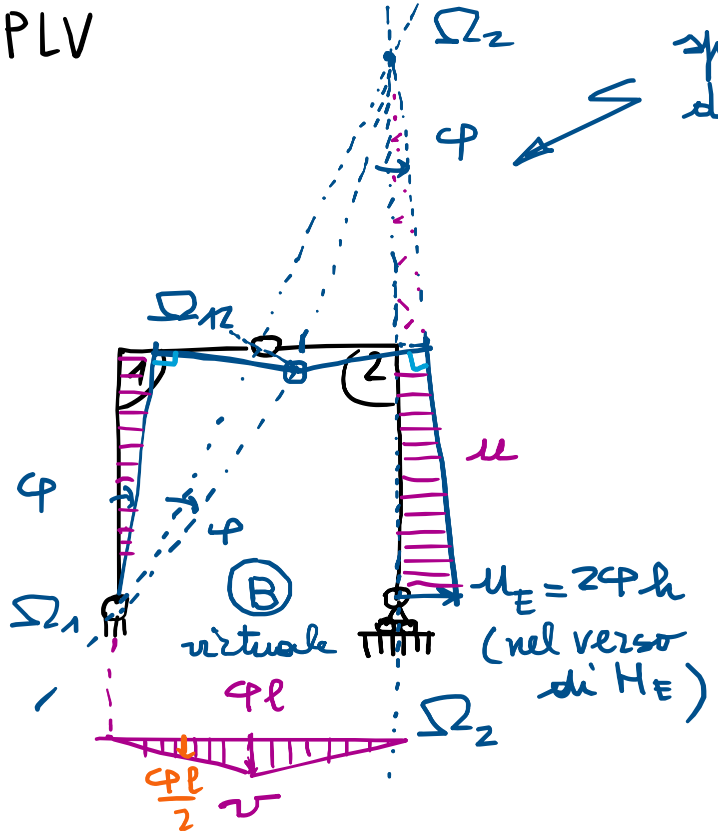
$\Rightarrow \mathcal{L}_e = 0$ equil.

$= r \cdot v + f \cdot u$

$= r \cdot C \cdot u + f \cdot u = (C^T r + f) \cdot u = 0 \quad \forall u \Rightarrow C^T r + f = 0$ equil. $\Leftrightarrow s = E \cdot r + f = 0 \Rightarrow \boxed{E = C^T; \; C = E^T}$

– Calcolo di RV e AI tramite PLV (PSV, CS di equilibrio):





spostata che si produrrebbe in assenza del gdv associato ad H_E

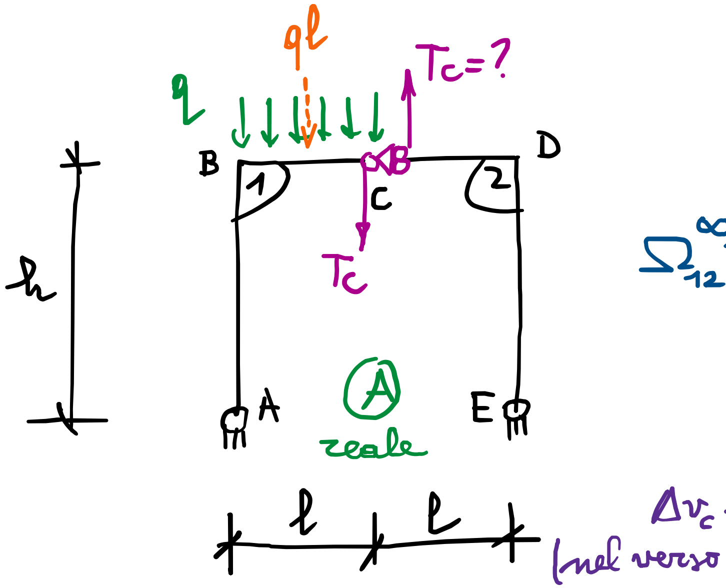
calcolo selettivo di H_E:

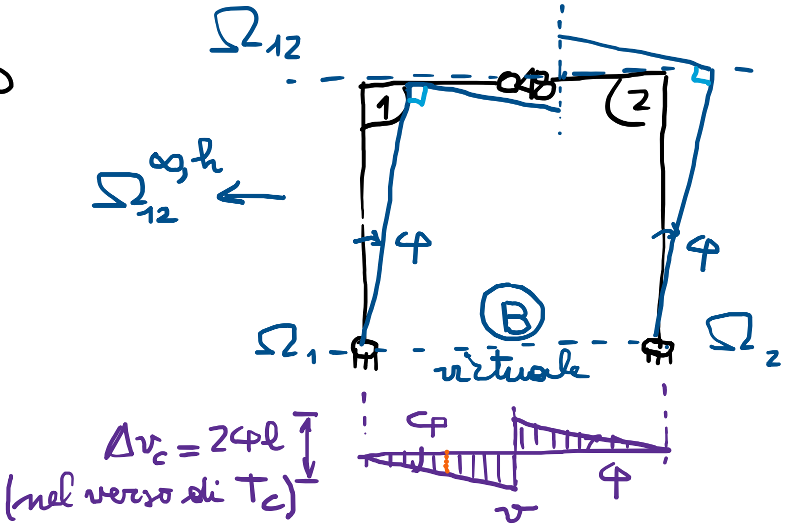
unica eq.ne nella sola incognita H_E

$$\mathcal{L}_e^{AB} = \overbrace{H_E\, 2\varphi h}^{>0\ (\text{es.})} + \overbrace{ql\,\frac{\varphi l}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ \text{è}\ >0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{H_E = -\frac{ql^2}{4h}}$$

(segno meno: H_E risulta opposta ad u_E, spostata che produce lavoro positivo per q)





$$\mathcal{L}_e^{AB} = T_c\,\overbrace{(\varphi l + \varphi l)}^{\Delta v_c = 2\varphi l} + \overbrace{ql\,\frac{\varphi l}{2}}^{\mathcal{L}_{eq}\ \text{è}\ >0} = 0 \quad \forall\varphi$$

$$\boxed{T_c = -\frac{ql}{4}}$$

(idem: T_c finale opposto a Δv_c)