Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

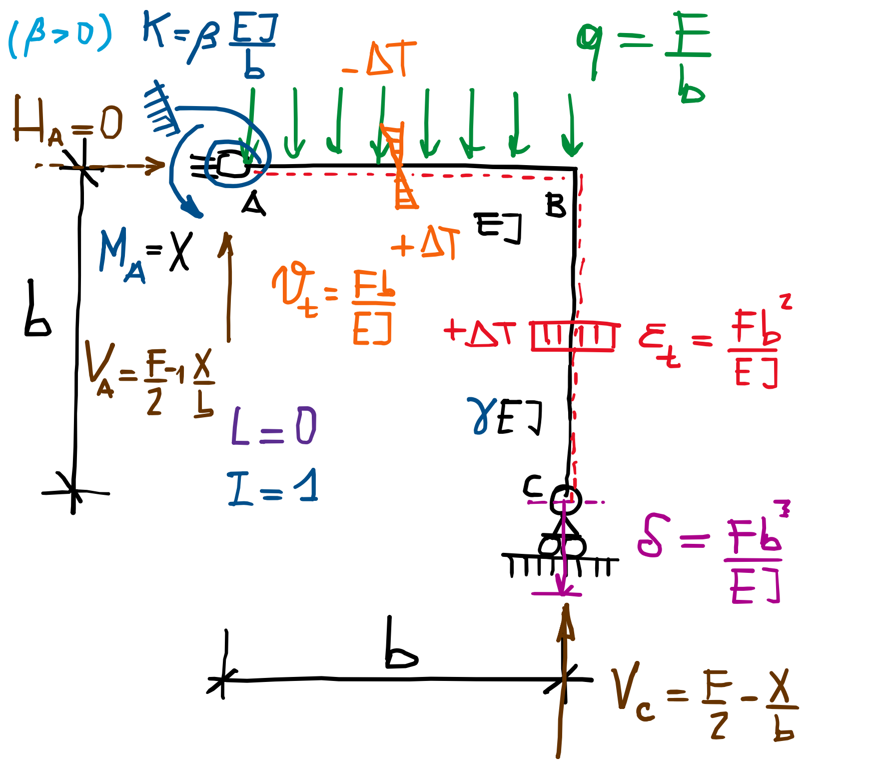
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

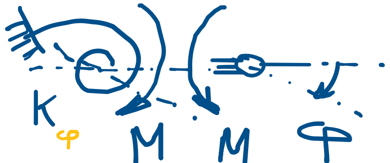
LEZIONE 08

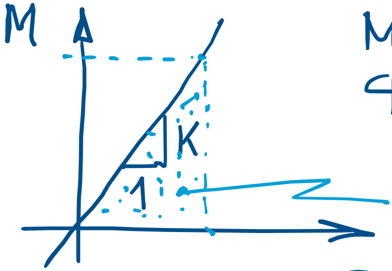
Soluzione di strutture staticamente indeterminate (tramite PLV ⇒ PFV, (5 di congruenza)



Dati:

- carico uniformemente ripartito $[q] = \frac{[F]}{[L]}$
- molla elastica (lineare) rotazionale ⇒ vincolo cedevole elastic.





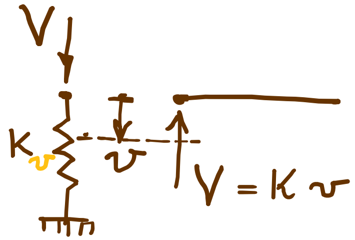
$M = K\varphi$
$\varphi = \frac{1}{K} M$

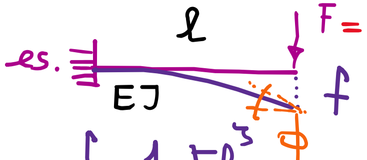
Legge di Hooke

$\mathcal{E} = \frac{1}{2} M\varphi = \left\langle \begin{matrix} \frac{1}{2} K\varphi^2 \\ \frac{1}{2}\frac{1}{K} M^2 \end{matrix} \right.$ energia elastica

$K \to 0$ $M \to 0$ (no molla)
$K \to \infty$ $\varphi \to 0$ (incastro)

similmente per molla elongazionale





$f_1 = \frac{1}{3} \frac{F\ell^3}{EJ}$ coeff. di influenza

$\phi_1 = \frac{1}{2} \frac{F\ell^2}{EJ}$

$K = \frac{M}{\varphi} \sim \frac{\cancel{F}b}{\frac{\cancel{F}b^2}{EJ}} = \frac{EJ}{b}$

rigidezza elastica > 0

Equazioni di equilibrio:

$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow H_A = 0$

$\Sigma M_C = 0 \Rightarrow V_A = \frac{F}{2} + \frac{M_A}{b}$

$\Sigma M_A = 0 \Rightarrow V_C = \frac{F}{2} - \frac{M_A}{b}$

RV = RV(X)

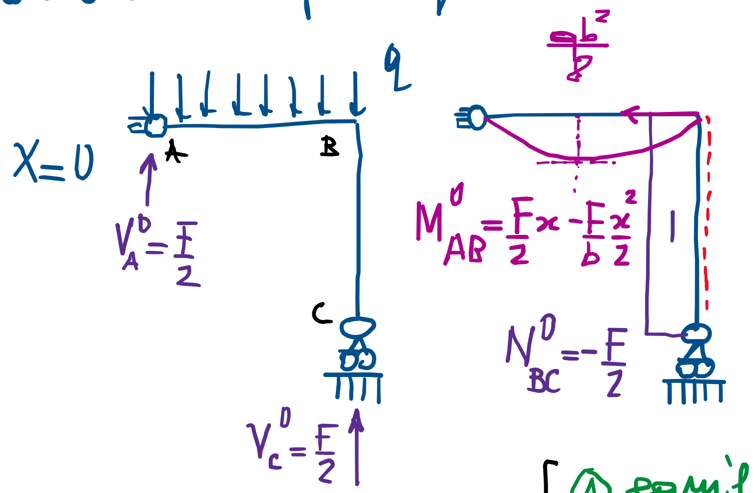
($\Sigma F_y = 0$ ✓ $V_A + V_C = F$)

- cedimento vincolare (permanente, anelastico) $\delta \sim \frac{Fb^3}{EJ}$
- deformazione termica uniforme $\varepsilon_t \sim \frac{Fb^2}{EJ}$
- curvatura termica // (lungo AB) $\vartheta_t \sim \frac{Fb}{EJ}$ come per $\chi_e = \frac{M}{EJ}$

↑ scelta inc. iperstatica X (metodo delle forze) ⇒ eq. di congruenza $\varphi_A = X/K$

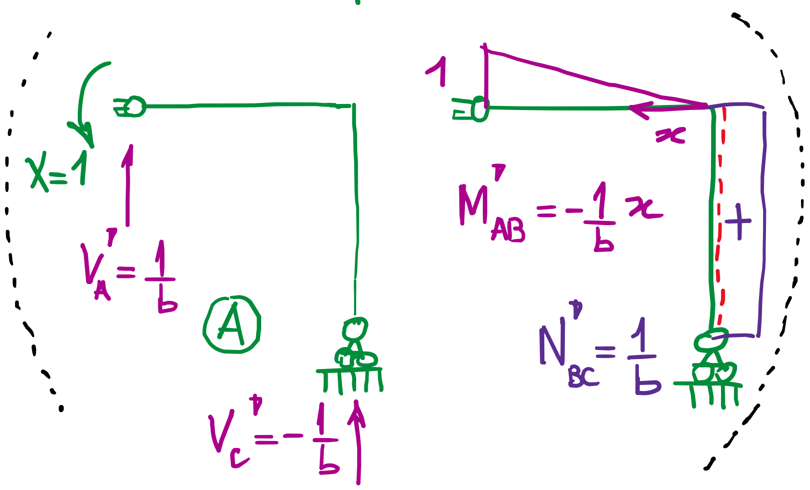
Soluzione mediante PLV (PFV)

- Struttura principale isostatica



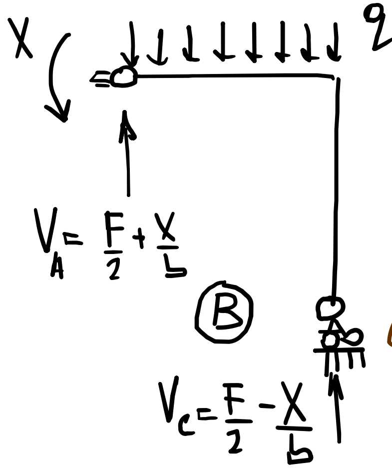
$+X$

- Strutture fittizia



$=$

- Struttura reale



PSE

$$\begin{cases} RV = RV^0 + X\,RV' \\ AI = AI^0 + X\,AI' \end{cases}$$

(quantità statiche)

- Scrittura del PFV: $\begin{cases} \text{A equil.} \\ \delta_e^{AB} = \delta_i^{AB} \end{cases} \Rightarrow$ B congruente

$$\underbrace{\frac{1}{b}\cancel{v_A} + \left(-\frac{1}{b}\right)(-\delta) + 1\left(-\frac{X}{K}\right)}_{\text{cedimenti vincolari}} = \int_{Str} M' \underbrace{\frac{(M^0 + XM')\,ds}{EJ}}_{d\varphi_e \text{ reale}} + \underbrace{\int_B^C N'\varepsilon_t\,ds + \int_A^B M'\vartheta_t\,ds}_{\text{effetti termici}}$$

⇒ eq.ne di congruenza in X

$$X = -\frac{\int_{Str} \frac{M'M^0\,ds}{EJ} - \frac{\delta}{b} + \int_B^C N'\varepsilon_t\,ds + \int_A^B M'\vartheta_t\,ds}{\int_{Str} \frac{M'^2\,ds}{EJ} + \frac{1}{K}} = -\frac{-\frac{1}{24}\frac{Fb^2}{EJ} - \cancel{\frac{Fb^2}{EJ}} + \cancel{\frac{1}{b}\frac{Fb^2}{EJ}} - \frac{1}{2}\frac{1}{\cancel{b}}b^{\cancel{2}}\frac{Fb}{EJ}\frac{12}{12}}{\frac{1}{3}\frac{b}{EJ} + \frac{1}{\beta}\frac{b}{EJ}} =$$

$$= \frac{\frac{13}{24}}{\frac{1}{3} + \frac{1}{\beta}}\frac{\frac{Fb^{\cancel{2}}}{\cancel{EJ}}}{\frac{\cancel{b}}{\cancel{EJ}}} = \frac{13}{\cancel{24}_{8}}\frac{\cancel{3}\beta}{3+\beta}Fb = \boxed{\frac{13}{8}\frac{\beta}{3+\beta}Fb = X}$$

$\beta \to 0,\ X \to 0$

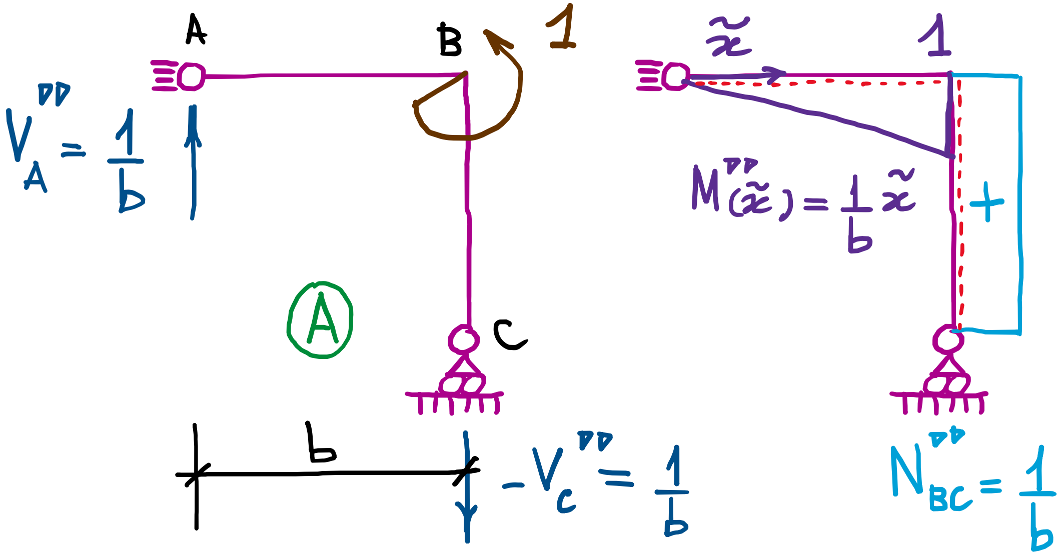
$\beta \to \infty,\ X \to \frac{13}{8}Fb$

$\to V_A = \frac{1}{8}\frac{12 + 17\beta}{3+\beta}F,\ V_C = \frac{3}{8}\frac{4 - 3\beta}{3+\beta}F \Rightarrow$ N.B.: $V_C \leq 0$ per $\beta \geq \frac{4}{3}$

• <u>Calcolo di componenti di spostamento</u>, a valle del calcolo dell'incognita iperstatica X e avendo quindi note $RV = RV(X)$ e $AI = AI(X)$ finali, per il valore di X trovato, tale da imporre la congruenza, in corrispondenza del gdv ritenuto iperstatico, mediante scrittura del PLV (PFV, quale CS di congruenza).

<u>Esempio</u>: calcolo di φ_B (utile a rappresentare la deformata qualitativa; si noti che B risulta nodo "fisso", cioè con $u_B = v_B = 0$)

– Nuova scrittura del PLV, con ulteriore struttura fittizia (o ausiliaria, virtuale), avente solo una coppia unitaria in B:



PFV (B str. reale): M finale, $M(\tilde{x}) = -X + V_A \tilde{x} - \frac{q\tilde{x}^2}{2}$ con X, V_A finali

$$1\,\varphi_B + \frac{1}{b}\,\delta = \int_{str} M''\,\frac{(M^0 + X M')}{EJ}\,ds + \int_A^B M''\,\vartheta_t\,ds + \int_B^C N''\,\varepsilon_t\,ds$$

Risulta: $\varphi_B = \frac{13}{48}\,\frac{6+\beta}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (rotazione antioraria)

Mentre: $\varphi_A = -\frac{X}{K} = -\frac{13}{6\cdot 8}\,\frac{6\cdot 1}{3+\beta}\,\frac{Fb^2}{EJ}$ (" oraria, $\varphi_B > |\varphi_A|$ $(\beta > 0)$)

Quindi, per moto rigido BC $(+\Delta\ell_t^{BC})$: $u_C = \varphi_B\, b$, $v_C = -\delta$