Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

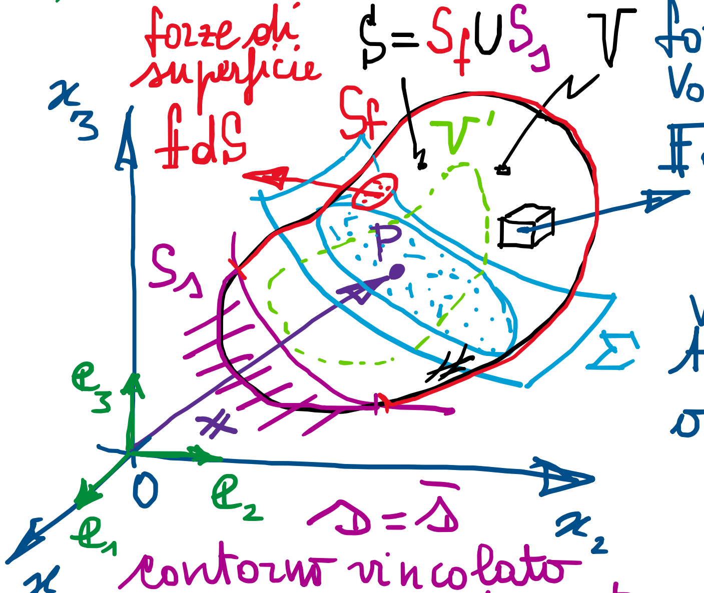
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

II Meccanica dei Solidi (o dei mezzi continui) $\Rightarrow \forall P \in V$ punto materiale

Statica dei continui: analisi dello stato di sforzo o tensione

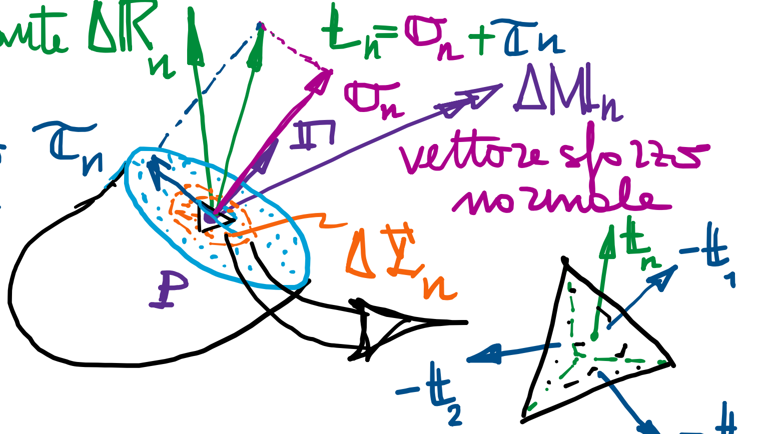


contorno vincolato
$\mathbf{s}$: vettore spostamento

versore normale locale in P

$$\{\mathbf{n}\} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix}, \quad n_i = \cos \widehat{\mathbf{n}\mathbf{e}_i} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_i$$

coseni direttori



$d\Sigma_i = n_i\, d\Sigma_n$ tetraedro di Cauchy

$\mathbf{t}_{-n}(*) = -\mathbf{t}_n(*)$

- $\lim\limits_{\Delta\Sigma_n \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{R}_n}{\Delta\Sigma_n} = \mathbf{t}_n(*)$ vettore sforzo di Cauchy
- $\lim\limits_{\Delta\Sigma_n \to 0} \dfrac{\Delta\mathbf{M}_n}{\Delta\Sigma_n} = \mathbf{0}$ (continuo non polare di Cauchy)

Relazione di Cauchy (~1822)

eq. di equil. alla traslazione

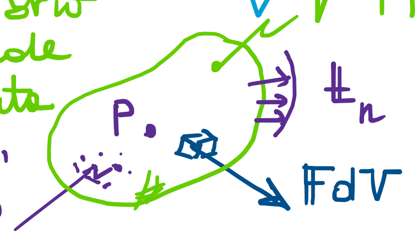
$$\mathbf{t}_n = \mathbf{t}_1 n_1 + \mathbf{t}_2 n_2 + \mathbf{t}_3 n_3 = \sum_i \mathbf{t}_i n_i$$

$$\Updownarrow$$

$$t_{nj} = \underbrace{t_{ij}}_{\sigma_{ij}} n_i \Leftrightarrow \mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}^{(T)}\cdot\mathbf{n} = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}$$

$\boldsymbol{\sigma}$ tensore sforzo di Cauchy

Equilibrio in sede indefinita $\forall V' \cap V$



Equil. alla traslazione: Equazioni indefinite di equilibrio

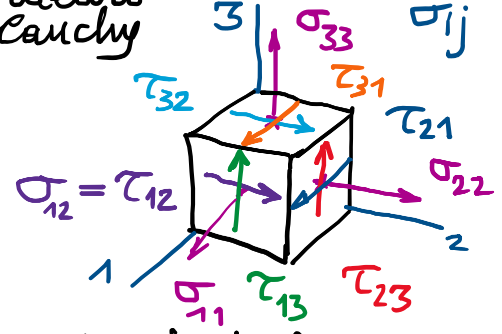
$$\int_{V'} \mathbf{F}dV + \int_{S'} \underbrace{\mathbf{t}_n}_{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}} dS = \mathbf{0}$$

Th. div.

$$\int_{V'} \mathbf{F}dV + \int_{V'} \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}\, dV = \mathbf{0}$$

$$\int_{V'} (\mathbf{F} + \operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})\, dV = \mathbf{0}, \ \forall V'$$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \text{ in } V}$ $(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{F})$



significato fisico delle comp.ti di sforzo σ_{ij}

$$[\boldsymbol{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

equil. alla rotazione: tensore doppio simmetrico

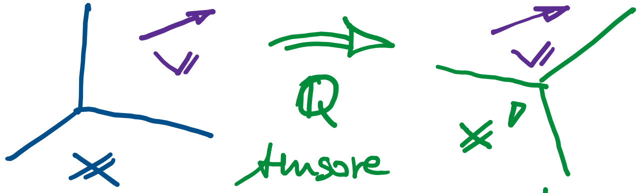
$$\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma} \Leftrightarrow \sigma_{ji} = \sigma_{ij}$$

Teorema della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div}\mathbf{g}\, dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{g}\, dS$$

$\mathbf{g}$: campo tensoriale (es. g_{ij}) $\quad \underbrace{\operatorname{div}}_{\text{divergenza}} = \nabla\cdot = \overbrace{\dfrac{\partial}{\partial \mathbf{x}}}^{\text{gradiente}}\cdot$

- Trasformazione delle componenti al variare del sistema di riferimento



tensore ortogonale del 2° ord.

sistema ruotato

$$\boxed{\{v\}' = [Q]\cdot\{v\}} \iff v_i' = Q_{ij}\, v_j$$

$$\left(\{v\} = \underbrace{[Q]^{-1}}_{[Q]^T}\{v\}'\right)$$

$$Q^T\cdot Q = Q\cdot Q^T = \mathbb{I}$$

$\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ordine $\quad [\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$, $\quad I_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

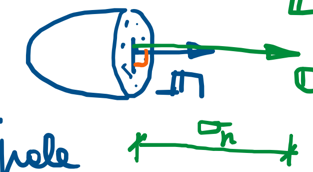
Kronecker

$(\mathrm{tr}\,\mathbb{I} = 3)$

$$Q_{ji}\,Q_{jk} = Q_{ij}\,Q_{kj} = \delta_{ik}$$

$$\{t_n\}' = [Q]\cdot\{t_n\}$$
$$= [Q]\cdot[\sigma^T]\cdot\{n\}$$
$$= \underbrace{[Q]\cdot[\sigma^T]\cdot[Q]^T}_{[\sigma^T]'}\cdot\{n\}' = [\sigma^T]'\{n\}' \Rightarrow \boxed{[\sigma]' = [Q]\cdot[\sigma]\cdot[Q^T]} \iff \sigma_{ij}' = Q_{ik}\,\sigma_{ke}\,Q_{je}$$

- Tensioni principali $(\tau_n = 0)$



dizez. principale di sforzo

$$\left.\begin{aligned} t_n &= \sigma^T\cdot n \\ \sigma_n &= \sigma_n\, n \end{aligned}\right\} \quad \sigma\cdot n = \sigma_n\, n$$

autovalori

autovettori

pb. agli autovalori associato a σ

$(n \neq 0)$

$$\iff (\sigma - \sigma_n\,\mathbb{I})\cdot n = 0 \quad \text{Soluz. non banali sse:}$$

eq.ne caratteristica

$$-\det(\sigma - \sigma_n\mathbb{I}) = +\sigma_n^3 - I_1\,\sigma_n^2 - I_2\,\sigma_n - I_3 = 0 \Rightarrow \text{3 radici } \sigma_{I}, \sigma_{II}, \sigma_{III}$$

INVARIANTI

primo $\quad I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma = \sigma_{ii}$

secondo $\quad I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \mathrm{tr}^2\sigma\right) \qquad \sigma^3 - I_1\sigma^2 - I_2\sigma - I_3\mathbb{I} = 0$

terzo $\quad I_3 = \det\sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\sigma\right)$

da Th. di Cayley-Hamilton

L'operatore traccia è invariante:

$$\mathrm{tr}[\sigma]' = Q_{ik}\,\sigma_{ke}\,Q_{ie} = Q^T_{ki}\,Q_{ie}\,\sigma_{ke} = \delta_{ke}\,\sigma_{ke} = \sigma_{kk}$$
$$= \mathrm{tr}[\sigma]$$

Componenti volumetrica e deviatorica:

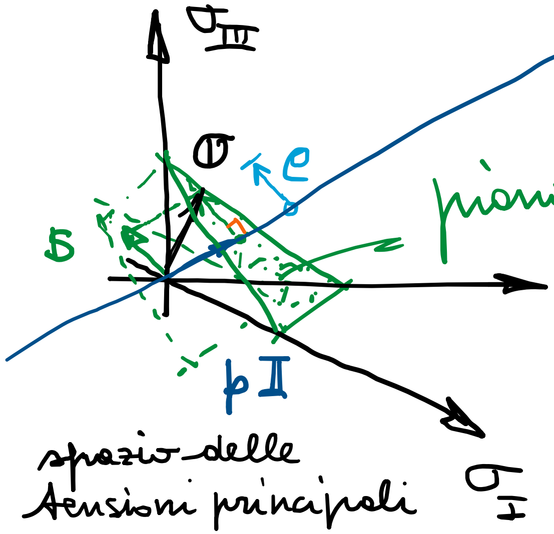
$$\sigma = \sigma_V + \sigma_D$$

$$= p\,\mathbb{I} + s \Rightarrow s = \sigma - \underbrace{\frac{\operatorname{tr}\sigma}{3}}_{\frac{I_1}{3}}\,\mathbb{I}$$

tensione media $\;p = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3}$

deviatore di sforzo

$$\left(\operatorname{tr}s = \operatorname{tr}\sigma - \frac{\operatorname{tr}\sigma}{\cancel{3}}\,\cancel{3} \equiv 0\right)$$



asse idrostatico
$\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$

piano deviatorico ($\perp$ all'asse idrostatico)

spazio delle tensioni principali

Problemi agli autovalori:

$$\sigma_V \cdot n = \sigma_V\, n \quad \text{autoval. } p$$

$$p\,\mathbb{I}\cdot n = p\; n \quad \text{autovett. } n \text{ arbitrari}$$

$$s \cdot n = s_n\, n$$

"shiftati" di p

autoval. $s_n = \sigma_n - p$

$$(\sigma - p\mathbb{I})\cdot n = \sigma\cdot n - p\,n = s\,n \Rightarrow \sigma\cdot n = \underbrace{(s+p)}_{\sigma_n}\, n \quad \text{autovet. } n \text{ stessi}$$

Invarianti del deviatore:

$$\begin{cases} J_1 \equiv \operatorname{tr}s \equiv 0 \\ J_2 = \frac{1}{2}\operatorname{tr}s^2 \\ J_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}s^3 \end{cases}$$

$$s^3 - \cancel{\ldots s^2} - J_2\, s - J_3 = 0 \quad \text{(eq.ne in forma depressa)}$$

Si cerca soluz. nella forma:

$$s_i = \frac{2}{\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha_i = \frac{2}{3}\underbrace{\sqrt{3J_2}}_{\sigma_{eq}^{VM}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\underbrace{\sqrt{2J_2}}_{e}\cos\alpha$$

Sostituendo:

$$\frac{4\cdot 2}{3\sqrt{3}}\,J_2^{3/2}\cos^3\alpha - J_2\,\frac{2\cdot 3}{3\sqrt{3}}\sqrt{J_2}\cos\alpha = J_3$$

$$\frac{2}{3\sqrt{3}}\,J_2^{3/2}\,\underbrace{\left(4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha\right)}_{\cos 3\alpha} = J_3 \Rightarrow \boxed{\cos 3\alpha = \frac{3\sqrt{3}}{2}\,\frac{J_3}{J_2^{3/2}}}$$

ove
$$\begin{cases} J_2 = \frac{1}{3} I_1^2 + I_2 \\ J_3 = I_3 + \frac{1}{3} I_1\left(\frac{2}{9} I_1^2 + I_2\right) \end{cases}$$

relazioni tra invarianti J_i e I_i

$$\sigma_i = s_i + p \leftarrow s_i \leftarrow \alpha_i \begin{cases} 0 \le \alpha_1 = \frac{1}{3}\arccos\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{J_3}{J_2^{3/2}} \le \frac{\pi}{3} \\ \alpha_2 = \alpha_1 + \frac{2}{3}\pi \\ \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{2}{3}\pi \end{cases}$$

Comportamento e resistenza dei materiali:

- Elastico: disaccoppiamento di risposta elastica isotropa volumetrica e deviatorica:

$p = K\vartheta$ (deformazione volumetrica) ; $s = 2Ge$ (deviatore di deformaz.)

$K = \dfrac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

$G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

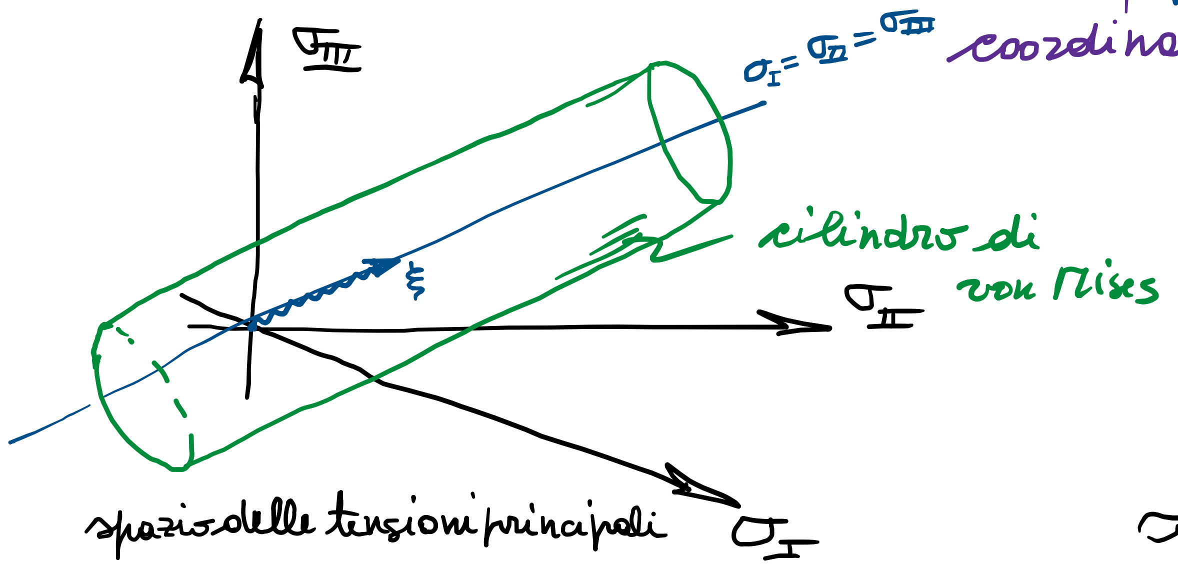
E: modulo di elasticità longitudinale o di Young

ν: coeff. di contrazione trasversale o di Poisson

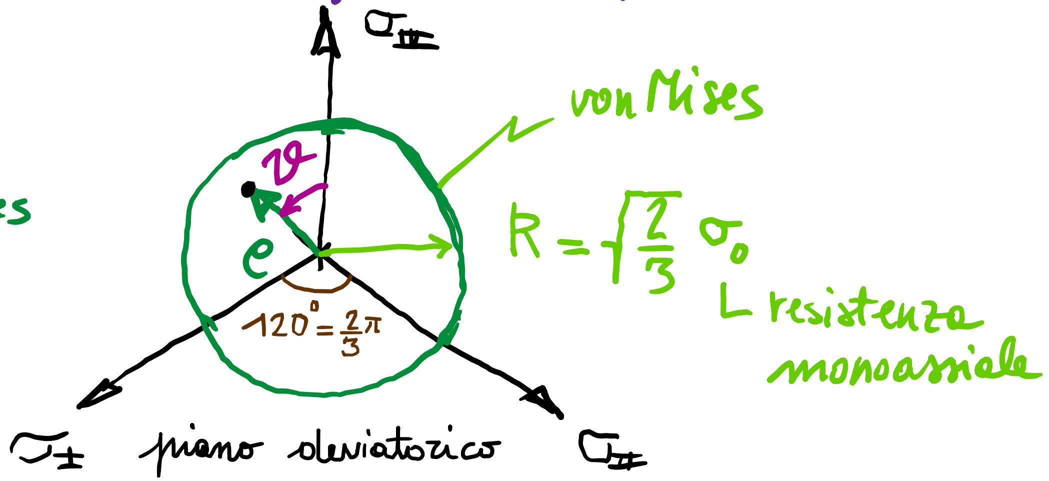
- Plastico: risposta oltre il campo elastico per diversi materiali (metallici, lapidei) ⇒ Teoria della Plasticità

funzione di snervamento: $f(\sigma) = f\left(\xi = \dfrac{\overbrace{tr\,\sigma}^{I_1}}{\sqrt{3}},\ \rho = \sqrt{2J_2},\ \vartheta = \alpha\right)$ (s; p, s; J_3)

coordinate di Haigh-Westergaard



spazio delle tensioni principali



piano deviatorico