

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

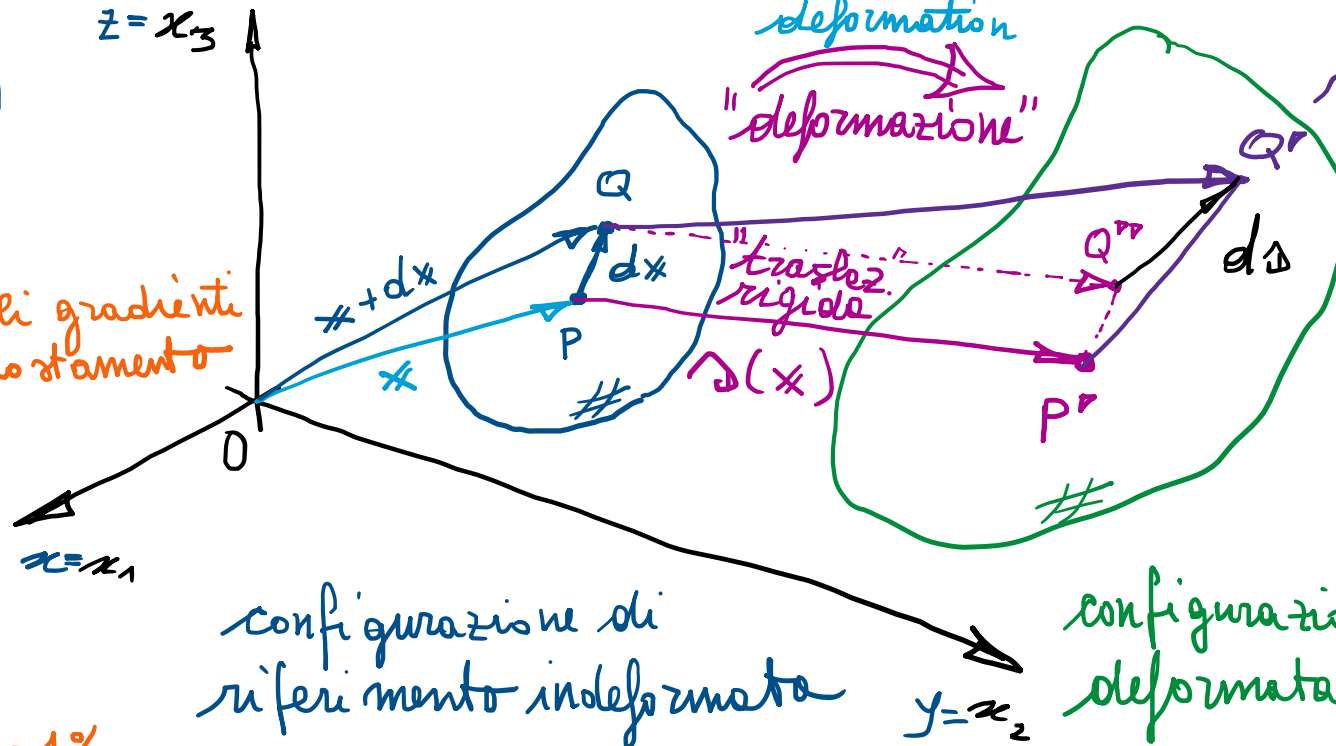
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

Cinematica dei continui: (definizione di deformazione; equazioni di congruenza interna)

- Misura (intensiva) della deformazione (in regime di piccole deformazioni) → piccoli gradienti di spostamento

$z = x_3$



$$\Delta(x + dx) = \Delta(x) + d\Delta$$

$$\begin{aligned} d\Delta &= \Delta(x + dx) - \Delta(x) \\ &= \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x} \cdot dx + \dots \\ &= \nabla \Delta(x) \cdot dx \\ &= \Psi \cdot dx \end{aligned}$$

$\Delta(x)$ vettore spostamento
 $\Delta_i(x_k)$
 $\Psi(x)$ tensore di deformazione
 $\Psi_{ij}(x_k)$

configurazione di riferimento indeformata

configurazione corrente deformata

derivata parziale

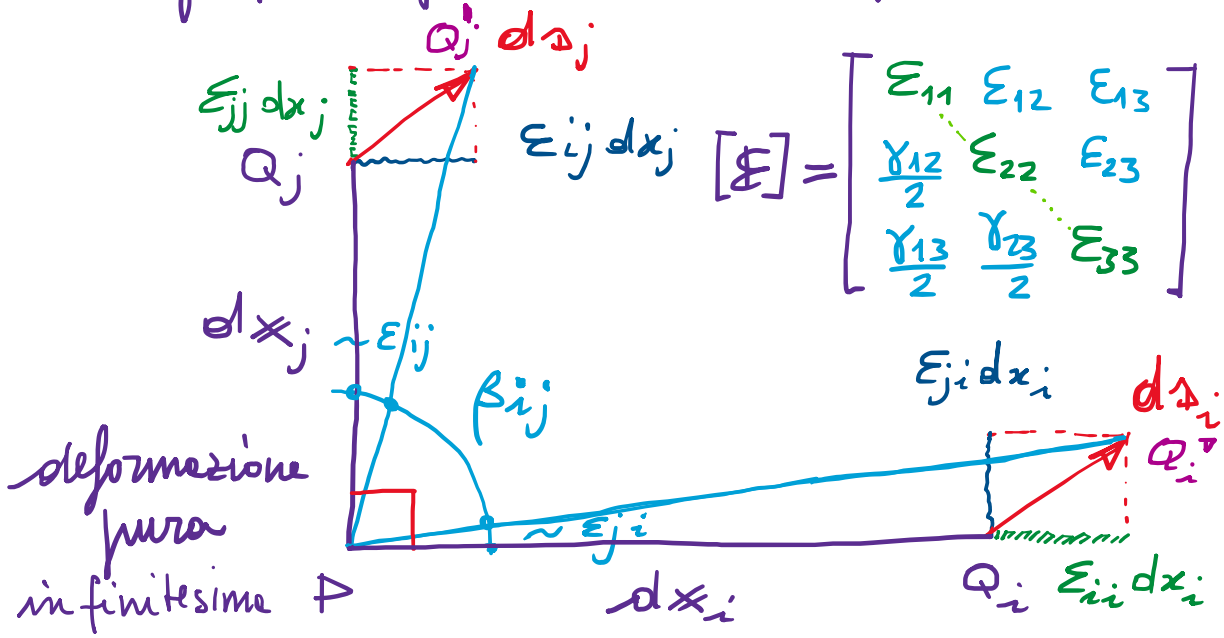
$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}; \quad \nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i} = \partial_i$$

$\Psi(x) = \nabla \Delta(x) = \frac{\partial \Delta(x)}{\partial x}$ tensore gradiente di spostamento (2° ordine) (deve contenere la deformazione pura: "strain")

$\Psi = \mathbb{E} + \mathbb{V}$ decomposizione additiva di Ψ ($\Psi_{ij} = \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j} = \Delta_{i,j}$, 9 componenti) "strain"

con: $\mathbb{E} = \frac{1}{2}(\Psi + \Psi^T)$ parte simmetrica $[\mathbb{E}^T = \mathbb{E}; \quad \mathbb{E}_{ji} = \mathbb{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\Delta_{i,j} + \Delta_{j,i})]$ deformazione pura
 $\mathbb{V} = \frac{1}{2}(\Psi - \Psi^T)$ parte emisimmetrica $[\mathbb{V}^T = -\mathbb{V}; \quad \mathbb{V}_{ji} = -\mathbb{V}_{ij} = -\frac{1}{2}(\Delta_{i,j} - \Delta_{j,i})]$ rotazione rigide infinitesime

- Significato fisico di $\mathbb{E}$ (componenti ε_{ij}): $\Psi = \mathbb{E} \rightarrow d\mathbf{s} = \Psi \cdot d\mathbf{x} = \mathbb{E} \cdot d\mathbf{x} \Leftrightarrow ds_i = \varepsilon_{ij} dx_j$

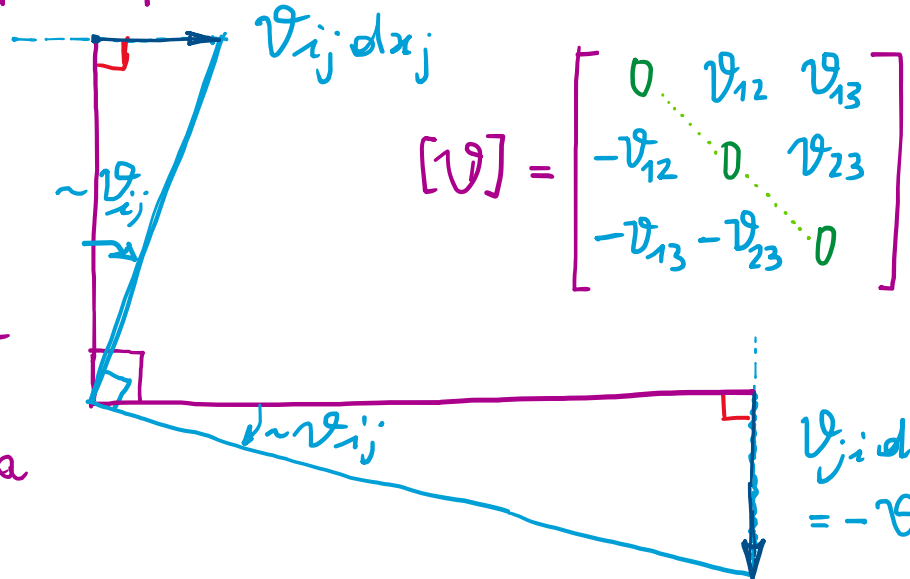


ϵ_{ij} allungamento specifico nella direzione i

$i \neq j$

$\varepsilon_{ij} = \frac{\gamma'_{ij}}{2}$	$\gamma'_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\pi}{2} - \beta_{ij}$
⋮	scorrimento angolare tra fibre i e j
⋮	deformazione tagliante

- Significato fisico di $\mathcal{V}$ (componenti $\mathcal{V}_{ij}$): $\kappa\psi = \mathcal{V} \quad (\mathcal{V}^T = -\mathcal{V}; \mathcal{V}_{ji} = -\mathcal{V}_{ij}) \quad [\mathcal{V}_{ii} \equiv 0]$


$$i=j \quad v_{ii} \equiv 0$$

$i \neq j$ v_{ij} rotazione rigida infinitesima delle fibre i, j (rispetto all'asse K)

$$-2\omega_K = 2\dot{\vartheta}_{ij} = \dot{\vartheta}_{i,j} - \dot{\vartheta}_{j,i} \quad (2\dot{\omega} = \text{rot } \underline{v} = \nabla \wedge \underline{v})$$

$$V_{ji} dx_i = -\Theta_{ij} dx_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocità
angolare

Equazioni di congruenza in termini (o di compatibilità)

- CN di congruenza per il campo $\varepsilon_{ij}(x_k)$:

Scarto Residuo

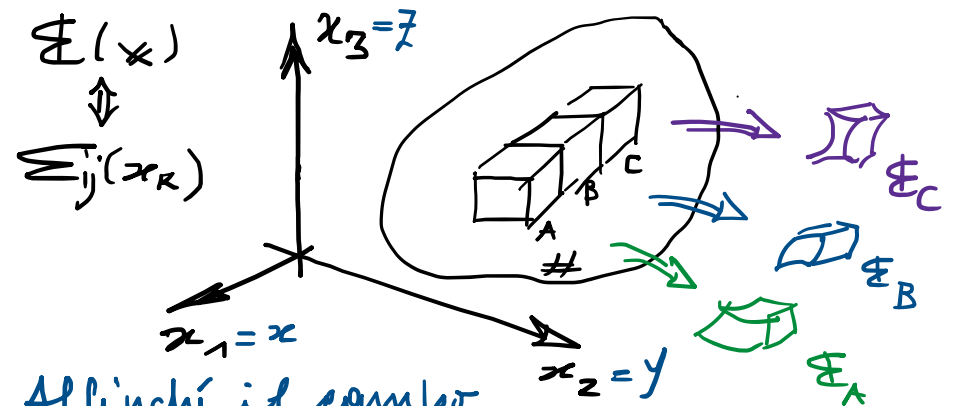
$$3 \left\{ \begin{array}{l} S_{zz} = R_z = \varepsilon_{xx,yy} + \varepsilon_{yy,xx} - \varepsilon_{xy,xy} - \varepsilon_{xy,xy} = 0 \quad (*) \\ S_{xx} = R_x = \varepsilon_{yy,zz} + \varepsilon_{zz,yy} - 2\varepsilon_{yz,yz} = 0 \\ S_{yy} = R_y = \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,zz} - 2\varepsilon_{zx,zx} = 0 \end{array} \right.$$

$$3 \left\{ \begin{array}{l} S_{yz} = U_x = -\varepsilon_{xx,yz} - \varepsilon_{yz,xx} + \varepsilon_{xy,xz} + \varepsilon_{xz,xy} = 0 \\ S_{zx} = U_y = -\varepsilon_{yy,zx} - \varepsilon_{zx,yy} + \varepsilon_{yz,yx} + \varepsilon_{yx,yz} = 0 \quad (*) \\ S_{xy} = U_z = -\varepsilon_{zz,xy} - \varepsilon_{xy,zz} + \varepsilon_{zx,zy} + \varepsilon_{zy,zx} = 0 \end{array} \right.$$

- Scrittura compatta (de Saint Venant) ~ 1884

$$\boxed{\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}} \quad 3^4 = 81 \Rightarrow 6 \text{ distinte}$$

(rot = $\nabla \wedge$) $\mathcal{S} = \text{rot rot } \mathcal{E} = 0$; $\mathcal{R} = \nabla \mathcal{U} = 0$



Affinché il campo di deformazione risulti compatibile ("riasssemblaggio dei dodici deformati") le variazioni spaziali di $\mathcal{E}(x)$ deve soddisfare certe relazioni

Se $\mathcal{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathcal{U} + \nabla \mathcal{U}^T) \Leftrightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)$:

$\cancel{\partial_x \partial_{xyy}} + \cancel{\partial_y \partial_{yxx}} - 2 \frac{1}{2}(\cancel{\partial_x \partial_y} + \cancel{\partial_y \partial_x})_{,xy} = 0$

per il Th. di Schwarz sulla invertibilità dell'ordine delle derivazioni (se $\mathcal{E}$ è congruente, allora $= 0$)

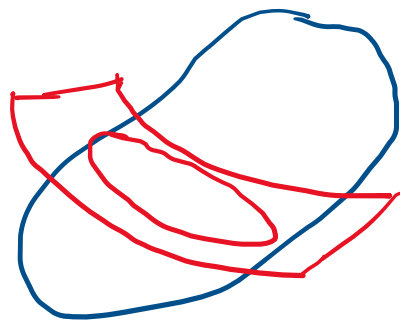
(equivalenti a 3 relazioni indipendenti, in quanto valgono le identità di Bianchi seguenti)

Identità di Bianchi (3 relazioni): [per Th. di Schwarz]

$$\begin{cases} R_{x,x} + U_{z,y} + U_{y,z} \equiv 0 \\ U_{z,x} + R_{y,y} + U_{x,z} \equiv 0 \\ U_{y,x} + U_{x,y} + R_{z,z} \equiv 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \nabla \cdot \mathbb{S} = \text{div } \mathbb{S} = 0, \quad S_{ij,j} = 0$$

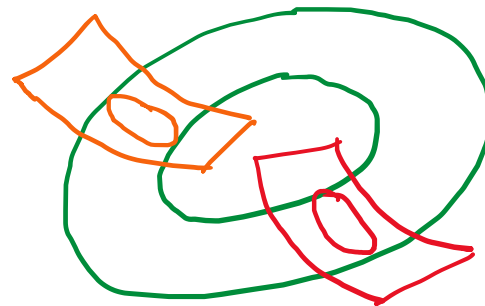
anche per campo $\mathbb{S}(x)$ non congruente

Sono CS di congruenza? (integrando $\mathbb{S}$ si



ottiene un
campo $\mathbb{S}$
compatibile?)

Sì, per corpi monotonici
(si scindono in due parti con
un unico taglio)



No, per corpi pluriconnessi
(es. biconnesso)

$$\Delta \mathbb{S} \neq 0$$

Occorre in più una
condizione di
compatibilità alla
interfaccia che giunga
ad imporre $\Delta \mathbb{S} = 0$

(per ogni interfaccia
aggiuntiva, rispetto a
corpo monotonico)