Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

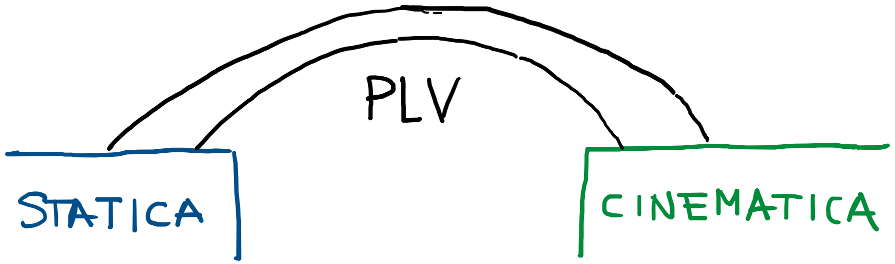
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 16

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) → Meccanica dei continui (dei Solidi)

"Ponte" tra statica e cinematica



Sistema A staticamente ammissibile: Famiglia di quantità statiche equilibrate

$F^A, f^A ; \sigma^A$

$\mathrm{div}\,\sigma + F = 0$ in V

$t_n = n \cdot \sigma = f$ su S_f

"virtuali"

no causa-effetto $\not\Leftrightarrow$

Sistema B cinematicamente ammissibile: Famiglia di quantità cinematiche congruenti

$s^B, \bar{s}^B ; \varepsilon^B$

$\varepsilon^B = \frac{1}{2}\left(\nabla s^B + \nabla s^{BT}\right)$ in V

$s^B = \bar{s}^B$ su S_s

Enunciato del PLV (CN di equilibrio e di congruenza):

$$\forall \begin{rcases} \text{Sistema A} \\ \text{Sistema B} \end{rcases} : \mathcal{L}_e^{AB} = \int_V \underbrace{F^A \cdot s^B}_{F_i^A s_i^B} dV + \int_{S_f} \underbrace{f^A \cdot s^B}_{f_i^A s_i^B} dS + \int_{S_s} \underbrace{n \cdot \sigma^A \cdot \bar{s}^B}_{n_i \sigma_{ij}^A \bar{s}_j^B} dS = \int_V \underbrace{\sigma^A : \varepsilon^B}_{\sigma_{ij}^A \varepsilon_{ij}^B} dV = \mathcal{L}_i^{AB}$$

(valido indipendentemente dal comportamento del materiale)

Manifestazioni del PLV (CS): strumenti applicativi, operativi ("metodi")

- PSV (CS di equilibrio)

$$\begin{rcases} \text{Sistema B cinem. amm.} \\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \end{rcases} : \text{Sistema A static. amm.}$$

(v. "metodo degli spostamenti")

- PFV (CS di congruenza)

$$\begin{rcases} \text{Sistema A static. amm.} \\ \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \end{rcases} : \text{Sistema B cinem. amm.}$$

(v. "metodo delle forze")

Dim. del PLV (CN di equil. e congruenza) $\Rightarrow$ Teorema dei Lavori Virtuali

$\begin{cases} \text{Hp.}: A,\ B \text{ ammiss.} \\ \text{Tesi}: \mathcal{L}_e^{AB} = \mathcal{L}_i^{AB} \end{cases}$

[Th. della divergenza:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{g}\, dV = \int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{g}\, dS, \quad \mathbf{g}: \text{campo tensoriale}$$

$\int_V g_{i,i}$ … $\int_S n_i g_i$ — es. vettore g_i

$\left[\operatorname{div}(\ ) = \nabla\cdot(\ ) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\cdot(\ )\right]$]

Sia $\mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s} \Leftrightarrow g_i = \sigma_{ij} s_j \Rightarrow \operatorname{div}\mathbf{g} = ?$

($\mathbf{g}$ vettore, $\boldsymbol{\sigma}$ tensore doppio, $\mathbf{s}$ vettore)

regola del prodotto

$$\text{scalare} = g_{i,i} = (\sigma_{ij} s_j)_{,i} = \underbrace{\sigma_{ij,i}}_{(\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})_j} s_j + \underbrace{\sigma_{ij}}_{=\sigma_{ji}} \underbrace{s_{j,i}}_{\psi_{ji}}$$

$=\sigma_{ji}$ $(\boldsymbol{\sigma}^T = \boldsymbol{\sigma})$ simm.

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{s}) = (\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma})\cdot\mathbf{s} + \boldsymbol{\sigma} : \underbrace{\nabla\mathbf{s}^T}_{(\boldsymbol{\varepsilon}^{(T)} + \boldsymbol{\vartheta}^T)}$$

$\nabla\mathbf{s} = \boldsymbol{\psi} = \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\vartheta}$

simm. $\boldsymbol{\varepsilon}^T = \boldsymbol{\varepsilon}$, $\varepsilon_{ji} = \varepsilon_{ij}$

emis. $\boldsymbol{\vartheta}^T = -\boldsymbol{\vartheta}$, $\vartheta_{ji} = -\vartheta_{ij}$

$$\sigma_{ij}\vartheta_{ji} = \sigma_{11}\cancel{\vartheta_{11}} + \sigma_{12}\cancel{\vartheta_{21}} + \dots + \sigma_{21}\cancel{\vartheta_{12}} + \dots \equiv 0$$

$(\boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\vartheta}^T = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\vartheta} \equiv 0)$

$$\mathcal{L}_i^{AB} = \int_V \overset{A}{\boldsymbol{\sigma}} : \overset{B}{\boldsymbol{\varepsilon}}\, dV = \int_V \left[\operatorname{div}(\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}) - (\operatorname{div}\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}\right] dV$$

th. Div.

$$= \int \mathbf{n}\cdot\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}\, dS - \int_V (\operatorname{div}\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}})\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}\, dV$$

A static amm.

B cinemat. amm.

$$= \int_{S_s} \mathbf{n}\cdot\overset{A}{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\overset{B}{\bar{\mathbf{s}}}\, dS + \int_{S_f} \overset{A}{\mathbf{f}}\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}\, dS + \int_V \overset{A}{\mathbf{F}}\cdot\overset{B}{\mathbf{s}}\, dV = \mathcal{L}_e^{AB} \quad \text{c.v.d.}$$

(idem per CS di equilibrio o di congruenza)

Proprietà del "problema elastico lineare"

- Principio di Sovrapposizione degli Effetti (PSE) [Valido per la linearità di tutte le equaz. governanti ⇒ operatori lineari]

α (Sistema 1 : $\mathbb{F}^1, \mathbf{f}^1, \bar{s}^1 \Rightarrow \sigma^1, \varepsilon^1, s^1$)

β (Sistema 2 : $\mathbb{F}^2, \mathbf{f}^2, \bar{s}^2 \Rightarrow \sigma^2, \varepsilon^2, s^2$)

es. $\mathrm{div}(\alpha\,\sigma^1 + \beta\,\sigma^2) = \alpha\,\mathrm{div}\,\sigma^1 + \beta\,\mathrm{div}\,\sigma^2$

algebrici e differenziali

$\alpha\,\mathbb{F}_1 + \beta\,\mathbb{F}_2,\ \alpha\,\mathbf{f}_1 + \beta\,\mathbf{f}_2,\ \alpha\,\bar{s}^1 + \beta\,\bar{s}^2 \Rightarrow \alpha\,\sigma^1 + \beta\,\sigma^2,\ \alpha\,\varepsilon^1 + \beta\,\varepsilon^2,\ \alpha\,s^1 + \beta\,s^2$

combinazione lineare dei dati — combinazione lineare delle soluzioni

- Buona posizione del problema (∃ un numero finito di soluzioni con dipendenza continua dai dati)
  - ∃ la soluzione (Teoria dell'Elasticità ⇒ Sokolnikoff, 1956)
  - Unicità della soluzione (∃!: esiste un'unica soluzione) ⇒ Th. di Kirchhoff ~1859

Dim.: Da PSE con $\alpha = -\beta = 1$, con $\mathbb{F} = \mathbb{F}^1 = \mathbb{F}^2$, $\mathbf{f} = \mathbf{f}^1 = \mathbf{f}^2$, $s = \bar{s}^1 = \bar{s}^2$

$\Delta\mathbb{F} \equiv 0, \quad \Delta\mathbf{f} \equiv 0, \quad \Delta\bar{s} \equiv 0$ (stessi dati)

Hp. (ragionamento per assurdo): $\Delta\sigma = \sigma^1 - \sigma^2 \neq 0$, $\Delta\varepsilon = \varepsilon^1 - \varepsilon^2 \neq 0$, $\Delta s = s^1 - s^2 \neq 0$

(diverse soluzioni)
(es. moti rigidi arbitrari)

$\Delta\sigma = \mathbb{E} : \Delta\varepsilon$

Da PLV (A, B sist. reale)

$$\mathcal{L}_e \equiv 0 = 2\int_V \frac{1}{2}\Delta\sigma : \Delta\varepsilon \, dV = 2\int_V \omega(\Delta\varepsilon)\, dV = \mathcal{L}_i \Rightarrow \Delta\varepsilon = 0,\ \Delta\sigma = 0;\ \Delta s \neq 0 \text{ in generale}$$

assurdo — ipotesi smentite

$\omega(\Delta\varepsilon) > 0 \ \forall \Delta\varepsilon \neq 0$ def. pos.

(linearità + elasticità)

unicità su sforzo e deformazione

- Approcci risolutivi
  - analitico (soluzioni esatte o approssimate)
  - numerico (soluzioni approssimate) ⇝ Calcolo Numerico

    v. CMSS

    processo di discretizzazione

    (∞ gdl ⇒ n. finito di gdl)

    Metodo degli Elementi Finiti (FEM)

    " " " di contorno (BEM)

    Metodo delle Differenze Finite (FD)

    Metodo degli Elementi Discreti (DEM)

    ⇝ (es. murature)

- Metodologie di analisi (metodi)
  - Diretto : Dati → Soluzione (soluzione esatta, in forma chiusa, solo per casi particolari)
  - Semi-inverso : Dati ⇄ Soluzione parzialmente nota (a meno di un certo n. di parametri)
  - Inverso : Dati ← Soluzione (es. Structural Health Monitoring (SHM), Identificazione parametrica mediante analisi inversa, Model updating)

    es. note sperimentalmente

    Input ⇄ Output