Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

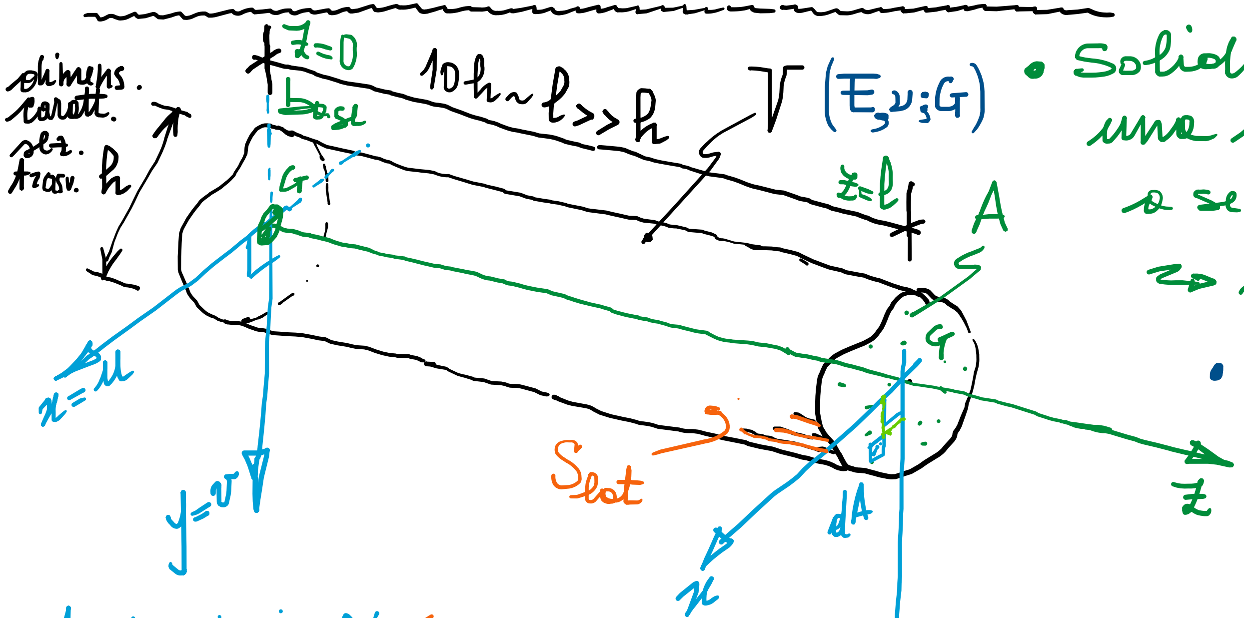
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Problema di de Saint Venant (~1855) _ Caso di problema elastico lineare particolare:



- Solido "tipo trave" di forma allungata, cioè con una dimensione prevalente rispetto alle altre due, a sezione costante (di area A) ed asse rettilineo ⇒ cilindro o prisma di DSV.
- Composto da materiale elastico, lineare, isotropo, omogeneo $\forall x \in V \Rightarrow E, \nu; G$ cost
- Privo di vincoli esterni ($S_u = \phi$) ⇒ soluz. in termini di spostamento nota a meno di moti rigidi.
- Privo di forze di volume ($\mathbb{F} = 0$ in V).
- Privo di forze di superficie su S_{lat} ($\mathbb{f} = 0$ su S_{lat}).
- Soggetto solamente a forze di superficie sulle basi ($z=0$, $z=l$), di distribuzione non specificata e note solo in termini di risultanti (tali da formare un sistema di forze autoequilibrato).

Assi principali d'inerzia: (scelta del sistema di rif.)

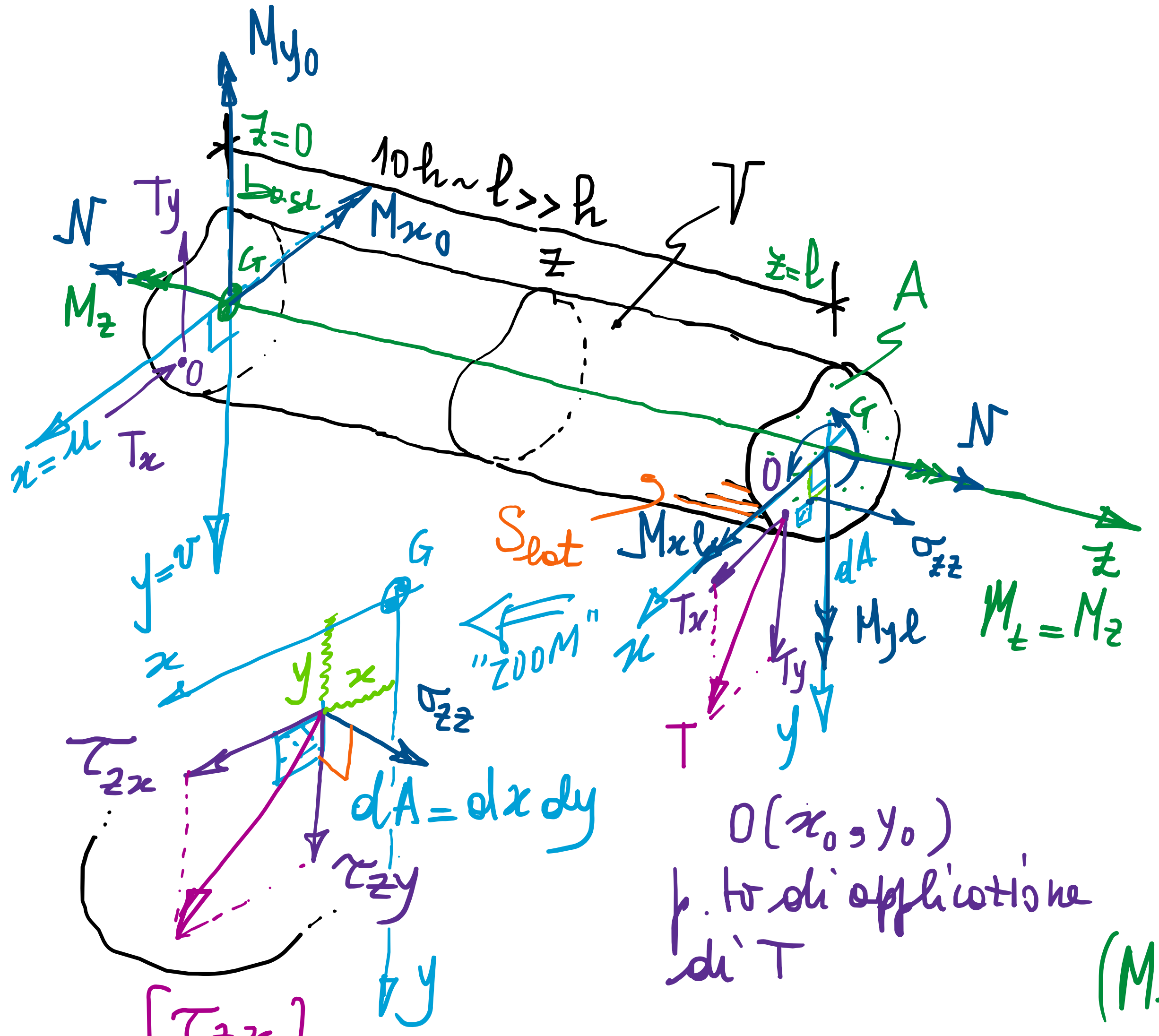
- baricentrici; $G \in x, y \Rightarrow S_x = \int_A y\, dA = 0$; $S_y = \int_A x\, dA = 0$ (momenti statici nulli)
- mutuamente perpendicolari; $x \perp y$
- coniugati $\underset{CNS}{\Longleftrightarrow}$ $J_{xy} = \int_A xy\, dA = 0$

(l'uno contiene il "centro" relativo all'altro)

momento d'inerzia centrifugo nullo

NB: Se ∃ asse di simm. retta, tale asse è principale (insieme al ⊥ per G)

Postulato di DSV: La reale distribuzione di queste forze di superficie, a parità di risultanti, è ininfluente ai fini della soluzione (salvo per possibili "effetti di bordo" localizzati).



$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$,

vettore delle tensioni tangenziali nel piano della sezione

σ_{zz} sforzo normale al piano della sezione

Risultanti ⇒ casi di DSV: (equivalenza statica)

$N = \int_A \sigma_{zz}\, dA = \text{cost}$ Azione assiale o normale

$T_x = \int_A \tau_{zx}\, dA = \text{cost}$

$T_y = \int_A \tau_{zy}\, dA = \text{cost}$

Azioni taglianti o tagli (componenti)

$M_x = \int_A \sigma_{zz}\, y\, dA = M_{x_0} + T_y z$

$M_y = -\int_A \sigma_{zz}\, x\, dA = M_{y_0} - T_x z$

Azioni flettenti (momenti ")

lineari in z

$(M_t = M_z) + T_y x_0 - T_x y_0 = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$ con

M_t azione torcente (momento ") costante

Equivalenza statica tra risultanti e campo di sforzo da esse indotto.

- Soluzione tramite approccio semi-inverso (agli sforzi):

- Hp. fondamentale di DSV: $\boxed{\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \tau_{xy} = 0}$; restano σ_{zz} ; $\underbrace{\tau_{zx}, \tau_{zy}}_{\tau_z}$

suffragata dall'osservaz. sperimentale
(e supportata dall'unicità della soluzione)

$(=\tau_{yx})$

componenti di sforzo da determinare, in $(x, y; z)$.

- Equaz. indefinite di equilibrio:

$$\mathrm{div}\, \sigma + \cancel{F} = 0 \text{ in } V \iff \sigma_{ij,i} = 0$$

(campo di sforzo solenoidale o a divergenza nulla)

$$\left\{\begin{array}{l} \cancel{\sigma_{xx,x}} + \cancel{\tau_{yx,y}} + \tau_{zx,z} = 0 \\ \cancel{\tau_{xy,x}} + \cancel{\sigma_{yy,y}} + \tau_{zy,z} = 0 \\ \tau_{xz,x} + \tau_{yz,y} + \sigma_{zz,z} = 0 \end{array}\right.$$

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}(x,y) \\ \tau_{zy}(x,y) \end{Bmatrix} \text{ indip. da } z$$

$$\Rightarrow \left(\boxed{\mathrm{div}\, \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z}} \right) \frac{\partial}{\partial z}$$

equazione di equilibrio

$$\Rightarrow 0 = -\sigma_{zz,zz}$$

σ_{zz} lineari in z

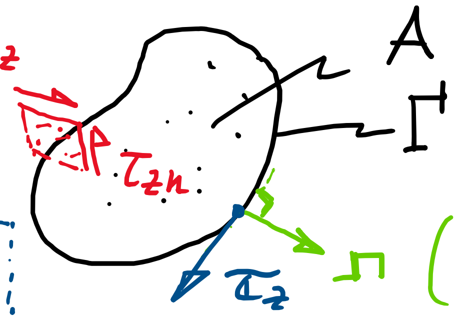
- Condizioni al contorno:

$$n \cdot \sigma = f = 0 \text{ su } S_{lat} \text{ (su } \Gamma) \iff n_i \sigma_{ij} = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} n_x \cancel{\sigma_{xx}} + n_y \cancel{\tau_{yx}} + \cancel{n_z} \tau_{zx} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \cancel{\tau_{xy}} + n_y \cancel{\sigma_{yy}} + \cancel{n_z} \tau_{zy} \overset{\checkmark}{=} 0 \\ n_x \tau_{xz} + n_y \tau_{yz} + \cancel{n_z} \sigma_{zz} = 0 \end{array}\right.$$

sup. laterale scarica

$0 = \tau_{nz}$



τ_z, su Γ, tangente al contorno

n $(n_z = 0)$

equilibrio al contorno $\boxed{\tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0, \quad \tau_z \perp n}$

• Legame costitutivo:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = -\nu\,\varepsilon_{zz} = -\nu\,\frac{\sigma_{zz}}{E}$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\sigma_{zz}}{E}$$

lineari in z;

deformazioni normali

$(\gamma_{xy}=0)$ $\quad \gamma_z = \begin{Bmatrix}\gamma_{zx}\\ \gamma_{zy}\end{Bmatrix} = \frac{\tau_z}{G}$

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G} = \frac{2(1+\nu)\tau_{ij}}{E} \qquad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

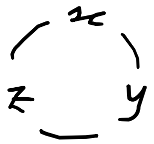
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\,\tau_{ij}$$ indip. da z

deformazioni taglianti

• Equazioni di congruenza interna:

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} \underset{\text{di DSV}}{=} \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{il,jk} \qquad 81 \to \underline{6} \to 3$$

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,\cancel{yy}} + \varepsilon_{yy,\cancel{xx}} = 2\,\varepsilon_{\cancel{xy},xy} \quad \checkmark \\ \varepsilon_{yy,\cancel{zz}} + \varepsilon_{zz,yy} = 2\,\varepsilon_{yz,\cancel{yz}} \quad \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ lin. in } y \\ \varepsilon_{zz,xx} + \varepsilon_{xx,\cancel{zz}} = 2\,\varepsilon_{zx,\cancel{zx}} \quad \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ lin. in } x \end{cases}$$



$$\begin{cases} \varepsilon_{xx,yz} + \varepsilon_{yz,xx} = \cancel{\varepsilon_{xy,xz}} + \varepsilon_{xz,xy} \\ \varepsilon_{yy,zx} + \varepsilon_{zx,yy} = \varepsilon_{yz,yx} + \cancel{\varepsilon_{yx,yz}} \\ \varepsilon_{zz,xy} + \cancel{\varepsilon_{xy,zz}} = \varepsilon_{zx,\cancel{zy}} + \varepsilon_{zy,\cancel{zx}} \quad \Rightarrow \sigma_{zz} \text{ indip. da } xy \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varepsilon_{zx,xy} - \varepsilon_{zy,xx} = \varepsilon_{xx,yz} \\ \varepsilon_{zx,yy} - \varepsilon_{zy,yx} = -\varepsilon_{yy,zx} \end{cases}$$

Sforzo normale: costanti $a_0, a_1, a_2 ; b_0, b_1, b_2$

$$\sigma_{zz}(x,y;z) = a_0 + a_1 x + a_2 y - z(\cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y)$$

$$= (a_0 - \cancel{b_0} z) + (a_1 - b_1 z)x + (a_2 - b_2 z) y$$

Infatti:

$$\int_A \operatorname{div} \tau_z \, dA \overset{\text{Th. Div.}}{=} \int_\Gamma \cancel{n \cdot \tau_z} \, d\Gamma$$

$$\int_A -\sigma_{zz,z} \, dA = \cancel{b_0} A = 0$$

Per equivalenza statica:

$$N = \int_A \sigma_{zz} \, dA = (a_0 - b_0 z) A + (a_1 - b_1 z) \cancel{S_y} + (a_2 - b_2 z) \cancel{S_x} = \text{cost} \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{N}{A} \; ; \; b_0 = 0}$$

$$\begin{cases} M_x = \int_A \sigma_{zz} y \, dA = (a_0 - b_0 z) \cancel{S_x} + (a_1 - b_1 z) \cancel{J_{xy}} + (a_2 - b_2 z) J_x \\ M_y = -\int_A \sigma_{zz} x \, dA = -(a_1 - b_1 z) J_y \end{cases}$$

$$J_x = \int_A y^2 \, dA \qquad J_y = \int_A x^2 \, dA \qquad \text{momenti di inerzia}$$

$$M_{x_0} + T_y z = M_x = (a_2 - b_2 z) J_x$$

$$M_{y_0} - T_x z = M_y = -(a_1 - b_1 z) J_y$$

$$\Rightarrow \quad a_2 - b_2 z = \frac{M_x}{J_x} \; ; \; a_2 = \frac{M_{x_0}}{J_x} , \; b_2 = -\frac{T_y}{J_x}$$

$$a_1 - b_1 z = -\frac{M_y}{J_y} \; ; \; a_1 = -\frac{M_{y_0}}{J_y} , \; b_1 = -\frac{T_x}{J_y}$$

campo lineare

$$\boxed{\sigma_{zz}(x,y;z) = \frac{N}{A} + \frac{M_x(z)}{J_x} y - \frac{M_y(z)}{J_y} x}$$

(vedi tenso-flessione deviata, per PSE, dovuti a N, M_x, M_y)

- Equazione di congruenza (nelle τ_{zx}, τ_{zy}):

$$\frac{1+\nu}{\cancel{E}} \underbrace{\left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)}_{f}{}_{,x} = -\frac{\nu}{\cancel{E}} \sigma_{zz,zy} = +\nu\, b_2$$

$$\frac{1+\nu}{\cancel{E}} \left(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x}\right)_{,y} = +\frac{\nu}{\cancel{E}} \sigma_{zz,zx} = -\nu\, b_1$$

sia $\boxed{\bar{\nu} = \frac{\nu}{1+\nu}}$

Integrando: $\int df = \int f_{,x}\, dx + \int f_{,y}\, dy$

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(b_2 x - b_1 y\right) - c$$

costante di integrazione arbitraria (sarà legata a M_t)

$$= \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{T_x}{J_y} y\right) - c$$

equazione di congruenza

- Problema nelle $\tau_z = \{\tau_{zx}, \tau_{zy}\}^T$: (due equazioni governanti) (equazioni differenziali del 1° ordine)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = -\sigma_{zz,z} = \cancel{b_0} + b_1 x + b_2 y = -\left(\frac{T_x}{J_y} x + \frac{T_y}{J_x} y\right) & \text{eq. di equil. in } A \\ -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = \bar{\nu}\left(-\frac{T_y}{J_x} x + \frac{T_x}{J_y} y\right) - c & \text{eq. di congruenza in } A \end{cases}$$

c.c. $\quad \tau_z \cdot n = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0$ su Γ (contorno della sez. trasversale)