Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

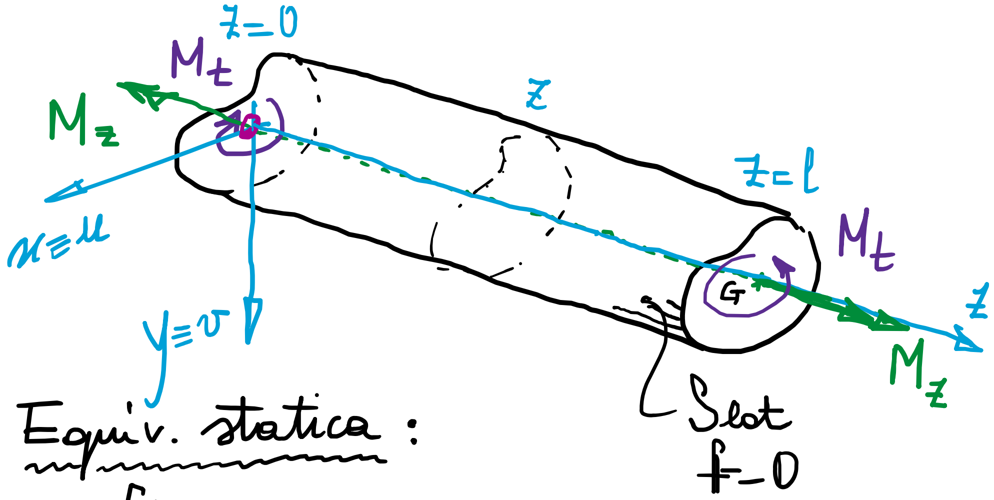
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

• Caso di DSV della torsione:

$N = T_x = T_y = 0 \,;\; M_x = M_y = 0 \qquad (\sigma_{zz} \equiv 0)$



• Presente solo un momento torcente, nel piano della sezione, costante: $M_t = M_z = \text{cost}$

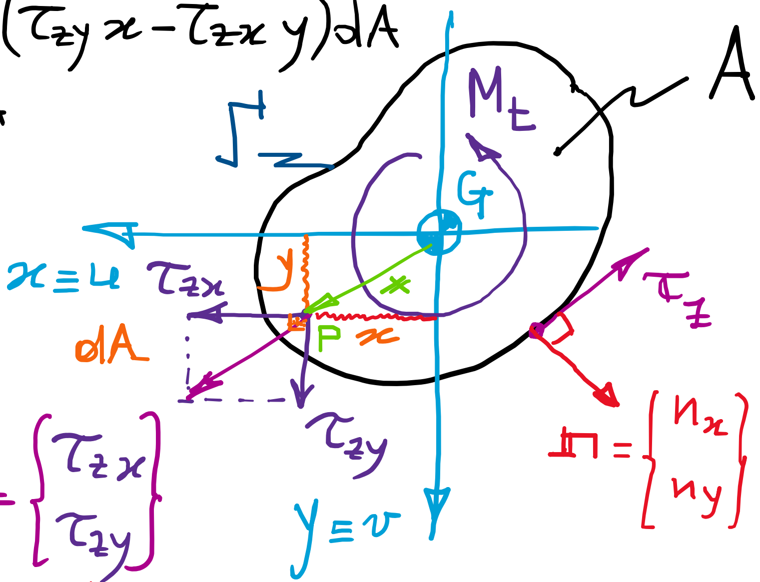
• Equazioni governanti: (differenziali lineari)

$$\begin{cases} \operatorname{div} \tau_z = \tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \;\ldots\ldots\; \text{equilibrio} \\ \qquad \operatorname{div}(\,) = \nabla \cdot (\,) \qquad\qquad \text{in } A \\ -(\operatorname{rot} \tau_z)_z = \tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -\underset{\substack{\updownarrow \\ M_t}}{c} \;\ldots\ldots\; \text{congruenza} \end{cases}$$

c cost

Equiv. statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$



$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$

vettore delle tensioni tangenziali $\tau_z = \tau_z(x,y)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{rotore}}}{\operatorname{rot}}\, \tau_z = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gradiente}}}{\nabla} \underset{\substack{\downarrow \\ \text{prodotto vettoriale}}}{\wedge} \tau_z = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ {}_{,x} & {}_{,y} & {}_{,z} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{vmatrix} = k\,(\tau_{zy,x} - \tau_{zx,y}) = \underbrace{-(\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x})}_{(\operatorname{rot}\tau_z)_z}\, k$$

(τ_z tangente al contorno su Γ)

c.c.: $\tau_z \cdot n = \tau_{zx}\, n_x + \tau_{zy}\, n_y = 0$ su Γ condizione (equilibrio) al contorno

hp. S_{lat} scarica

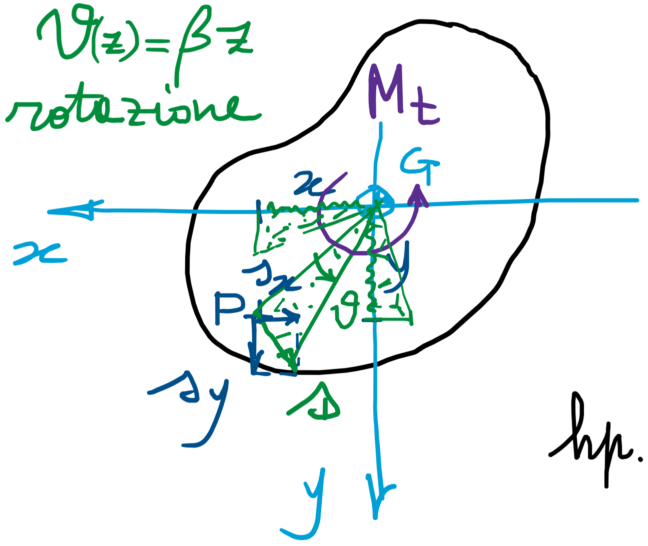
- Approccio agli spostamenti (pigliamo a priori la congruenza; imponiamo l'equilibrio):

$cost = \beta = \frac{d\vartheta}{dz}$ (>0) angolo unitario di torsione (rotazione per unità di lunghezza) $\frac{[1]}{[L]}$

(ϑ "torsione")

$\vartheta(z) = \beta z$ rotazione

rotazione rigida della sezione nel suo piano. ($d\vartheta = \beta\, dz$)



Campo di spostamenti: (osservazione sperimentale)

$$
hp.\ \begin{cases} s_x(y,z) = -\overbrace{\beta z}^{\vartheta}\, y \\ s_y(x,z) = \beta z x \\ s_z(x,y) = \beta\, \underbrace{\Psi_G(x,y)}_{} \end{cases}
$$

atto di moto piano rotatorio (rispetto a G)

spostamento fuori piano

incognite $\beta,\ \Psi_G(x,y)$

funzione di ingobbamento (riferita a G)

note a meno di moti rigidi

In genere si impone $\bar{\Psi}_G = \frac{1}{A}\int_A \Psi_G\, dA \equiv 0$ (valor medio)

(spostamento medio fuori piano nullo)

- Sezione indeformata nel piano:

$$
\begin{cases} \varepsilon_{xx} = s_{x,x} \equiv 0 \\ \varepsilon_{yy} = s_{y,y} \equiv 0 \\ \gamma_{xy} = s_{x,y} + s_{y,x} = -\cancel{\beta z} + \cancel{\beta z} \equiv 0 \end{cases}
$$

- Inoltre:

$\varepsilon_{zz} = s_{z,z} \equiv 0$ (Ψ_G f.ne solo di x e y) $\leftrightarrow$ $\sigma_{zz} = 0$

– Campo di deformazione: (scorrimenti angolari) $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ modulo di taglio

$$\gamma_z \leftrightarrow \begin{cases} \gamma_{zx} = s_{z,x} + s_{x,z} = \beta\,(\psi_{G,x} - y) \\ \gamma_{zy} = s_{z,y} + s_{y,z} = \beta\,(\psi_{G,y} + x) \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \gamma_z = \frac{\tau_z}{G} \\ \tau_z = G\gamma_z \\ \text{legge cost.} \end{matrix} \quad \boxed{\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta\,(\psi_{G,x} - y) \\ \tau_{zy} = G\beta\,(\psi_{G,y} + x) \end{cases}}$$

campo delle tensioni tangenziali

$$\frac{c}{2G} = \beta = \frac{M_t}{GJ}\,; \quad \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$$

– Eq. di congruenza: Th. Schwarz

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = G\beta\,(\cancel{\psi_{G,xy}} - \overset{y_{,y}}{1} - \cancel{\psi_{G,yx}} - \overset{x_{,x}}{1}) = -2G\beta \overset{\checkmark}{=} -c \qquad \boxed{c = 2G\beta}$$

significato fisico

– Eq. di equilibrio:

$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = G\beta\,\underbrace{(\psi_{G,xx} - \overset{y_{,x}}{0} + \psi_{G,yy} + \overset{x_{,y}}{0})}_{\nabla^2\psi_G \text{ laplaciano}} = G\beta\,(\psi_{G,xx} + \psi_{G,yy})$$

$$= \cancel{G\beta}\ \boxed{\nabla^2\psi_G(x,y) = 0}$$ equazione di Laplace in A (derivate seconde)

(la f.ne di ingobbamento deve soddisfare l'eq.ne di Laplace in A)

– c.c. di equilibrio:

$$0=\tau_{zx}\, n_x + \tau_{zy}\, n_y = \cancel{G}\beta\left[\left(\psi_{G,x}-y\right)n_x + \left(\psi_{G,y}+x\right)n_y\right]=0 \quad \text{su } \Gamma$$

$$\frac{\partial \psi_G}{\partial n} = \psi_{G,n} = \psi_{G,x}\, n_x + \psi_{G,y}\, n_y = y\, \overset{t_y}{n_x} - x\, \overset{-t_x}{n_y} \quad \text{su } \Gamma$$

$$= \mathbf{x}\cdot\mathbf{t} = x t_x + y t_y$$

$$= r(s)\,\dot r(s) \quad (*)$$

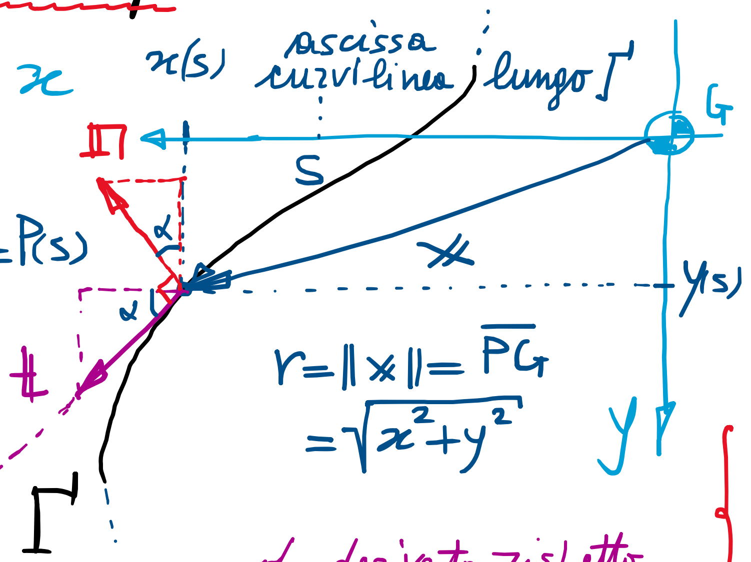
derivata direzionale nella direzione $\mathbf{n}$ ($\perp$ al contorno Γ): $\nabla\psi_G\cdot\mathbf{n}$

"flusso" di ψ_G nella direzione n assegnato: c.c. di Neumann-Dini

– Si ottiene pertanto un pb. di Neumann-Dini per l'eq.ne di Laplace:

$$\boxed{\begin{aligned} &\nabla^2\psi_G(x,y)=0 \ \text{in } A\\ &\psi_{G,n} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{t} \ \text{su } \Gamma\end{aligned}}$$

pb. differenziale del 2° ord. alle derivate parziali

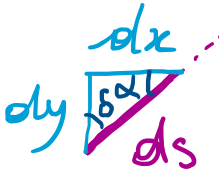


$$r=\|\mathbf{x}\|=\overline{PG}=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$(*)\quad x t_x + y t_y = x\dot x + y\dot y = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\underbrace{\left(x^2+y^2\right)}_{r^2(s)} = \frac{1}{2}\left(2x\dot x + 2y\dot y\right)$$

$$\psi_{G,n} = \frac{1}{2}\frac{d r^2(s)}{ds} = r(s)\,\dot r(s)$$

$\neq 0$ se distanza variabile



$\frac{d}{ds}$ derivata rispetto a s

$$\cos\alpha = \frac{dx}{ds} = \dot x(s) = t_x$$

$$\cos\delta = \frac{dy}{ds} = \dot y(s) = t_y$$

$$\mathbf{t} = \frac{d\mathbf{x}}{ds} = \begin{Bmatrix}\dot x(s)\\ \dot y(s)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} t_x\\ t_y\end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} t_y\\ -t_x\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x\\ n_y\end{Bmatrix} = \mathbf{n} \qquad (\mathbf{n}\cdot\mathbf{t}=0)$$

Sezione circolare

$$\begin{aligned}&\nabla^2\psi_G=0\\ &\psi_{G,n}=0\end{aligned} \Rightarrow \psi_G\equiv 0$$

$r=R=\text{cost} \Rightarrow \dot r = 0$

no ingobbam.

– Da equivalenza statica:

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}\, x - \tau_{zx}\, y)\, dA$$

$$= \int_A \Big[\overbrace{G\beta(\psi_{G,y} + x)}^{\tau_{zy}}\, x - \overbrace{G\beta(\psi_{G,x} - y)}^{\tau_{zx}}\, y \Big] dA$$

$$J = \frac{M_t}{G\beta} = \underbrace{\int_A (x^2 + y^2)\, dA}_{J_G} - \underbrace{\int_A (\psi_{G,x}\, y - \psi_{G,y}\, x)\, dA}_{J_G > J^*_{\psi_G} \geq 0} = J_G - J^*_{\psi_G} > 0$$

momento d'inerzia torsionale

momento d'inerzia polare rispetto a G

$$J_G = \int_A r^2\, dA$$

inerzia legata all'ingobbamento fuori piano

- $J^*_{\psi_G} = \int_A \left[(\psi_{G,x})^2 + (\psi_{G,y})^2 \right] dA \geq 0$ (× 2 Th. div.) si può dim. (con $\nabla^2 \psi_G = 0$ in A)

- $J = \frac{M_t}{G\beta} = \frac{1}{(G\beta)^2} \int_A (\underbrace{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2}_{\tau_z^2})\, dA$ (via PLV)

$$= \left(\frac{2}{e}\right)^2 \int_A \tau_z^2\, dA > 0$$

$$d\vartheta = \beta\, dz = \frac{M_t}{\boxed{GJ}}\, dz$$

rigidezza torsionale

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} = \eta\, \frac{M_t}{G J_G} \; ; \quad \eta = \frac{J_G}{J} = \frac{J_G}{J_G - J^*} = \frac{1}{1 - J^*/J_G} \geq 1$$

fattore di torsione ≥ 1

proprietà geometrica della sezione trasversale