

Università degli studi di Bergamo  
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni  
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

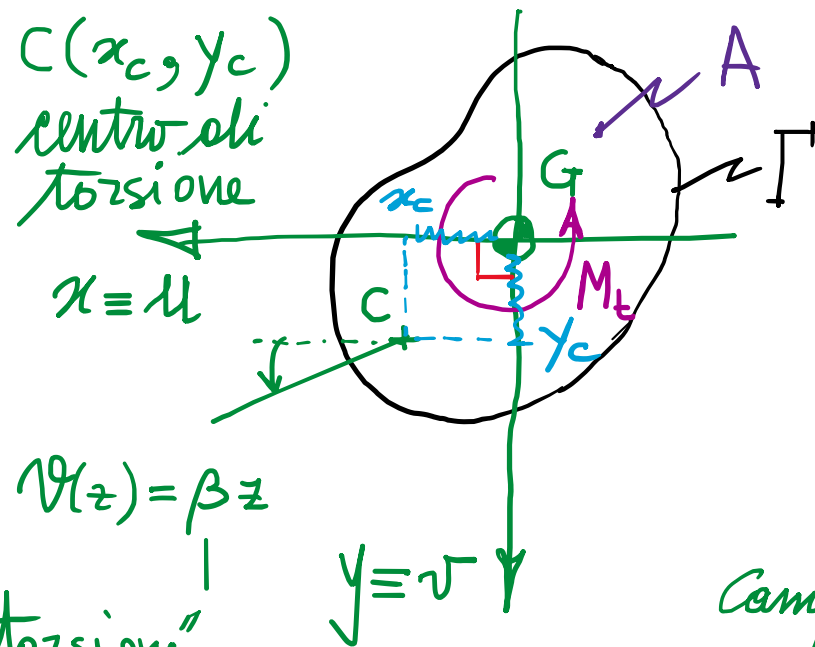
prof. Egidio RIZZI  
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 19

# Centro di torsione

Nell'approccio agli spostamenti si presume un campo di spostamenti ricomprensente:

- una rotazione rigida nel piano della sezione (rispetto a punto C, detto centro di torsione, in generale discosto dal baricentro G);
- un ingobbamento fuori piano della sezione, riferibile a tale punto:



$C(x_c, y_c)$   
centro di  
torsione

$\theta \equiv \psi$

$\theta(z) = \beta z$

$y \equiv v$

Campo di spostamenti ( $x_c \neq 0, y_c \neq 0$ ):

$$\begin{cases} \Delta x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta y = \beta z (x - x_c) \\ \Delta z = \beta \Psi_c(x, y) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{rotazione rigida rispetto a C} \\ \text{funzione di ingobbamento} \\ \text{riferito a C} \end{array} \right\}$$

Campo delle tens. tangenziali:

$$\begin{cases} \tau_{zx} = G\beta (\Psi_{c,x} - y + y_c) \\ \tau_{zy} = G\beta (\Psi_{c,y} + x - x_c) \end{cases} \left. \begin{array}{l} \text{Eq. di congr.} \checkmark \\ \text{Eq. di equil.} \end{array} \right\}$$

definite a  
meno di compon.  
rototraslatorie  
fuori piano

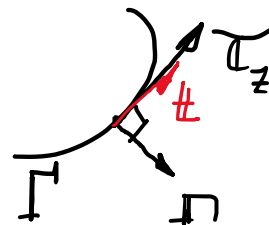
$\nabla^2 \Psi_c = 0$  in A  
eq. di Laplace

"torsione"  
(angolo unitario  
di torsione)  
 $\beta = \frac{d\theta}{dz} = \text{cost}$

Condizione al contorno:

$$\tau_z \cdot \Pi = \tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma$$

$$= \cancel{G\beta} \left[ (\psi_{c,x} - y + y_c) n_x + (\psi_{c,y} + x - x_c) n_y \right] = 0$$



$$\underbrace{\psi_{c,x} n_x + \psi_{c,y} n_y}_{\text{derivata direzionale } \psi_{c,n} \text{ nella direz. } n} + y_c \underbrace{\frac{dx}{dn}}_{\text{stesso termine noto visto per } \psi_G} - x_c \underbrace{\frac{dy}{dn}}_{\text{stesso termine noto visto per } \psi_G} = n_x y - n_y x = \mathbf{x} \cdot \mathbf{t}$$

$$\underbrace{(\psi_c + y_c x - x_c y)}_{\psi^*},_n = n_x y - n_y x \text{ c.c. di Neumann-Dini}$$

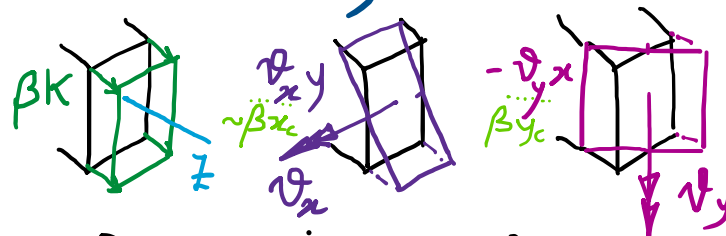
$$\psi^* \text{ differisce da } \psi_c \text{ per un campo lineare in } x \text{ e } y \Rightarrow \nabla^2 \psi^* = 0 \text{ in } A \text{ (e } \nabla^2 \psi_c = 0)$$

$\psi^*$  e  $\psi_G$  devono risolvere lo stesso pb. di N-D per l'equazione di Laplace:

$$\Rightarrow \psi^* = \psi_G + K \text{ (differiscono al più per una costante)}$$

Pertanto:

$$\psi_c(x, y) = \psi_G(x, y) + \underbrace{K - y_c x + x_c y}_{\text{comp.te di moto rigido fuori piano della sezione}}$$



comp.te di moto rigido fuori piano della sezione

valore medio  $\bar{\psi}_c = \bar{\psi}_G + K \xrightarrow{=0} 0$

- Si definisce centro di torsione il punto C rispetto al quale avviene la rotazione rigida nel piano della sezione e risultano nulle le seguenti rotazioni medie fuori piano della sezione rispetto agli assi x e y:

$$\begin{cases} \bar{\vartheta}_x = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_z}{y} \underbrace{y^2}_{dJ_x} dA = \frac{1}{J_x} \int_A \frac{\Delta_z}{y} dJ_x = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c y dA = 0 \\ \bar{\vartheta}_y = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_z}{x} \underbrace{x^2}_{dJ_y} dA = -\frac{1}{J_y} \int_A \frac{\Delta_z}{x} dJ_y = 0 \Rightarrow \int_A \psi_c x dA = 0 \end{cases}$$

PLV: flessione torsione

$$\begin{cases} \cancel{M_x} \bar{\vartheta}_x = \int_A \cancel{\frac{M_x}{J_x}} y dA \Delta_z \\ \cancel{M_y} \bar{\vartheta}_y = \int_A \cancel{-\frac{M_y}{J_x}} x dA \Delta_z \end{cases}$$

ingobbamento  
medio nullo  
fuori piano

$$\begin{cases} \bar{\psi}_c = \frac{1}{A} \int_A \psi_c dA = 0 \\ \bar{\chi}_c = \frac{1}{A} \int_A \chi_c dA = 0 \end{cases}$$

coordinate del centro di torsione

$$x_c = -\frac{1}{J_x} \int_A \psi_c(x, y) y dA; \quad y_c = \frac{1}{J_y} \int_A \psi_c(x, y) x dA$$

N.B. Se  $\exists$  asse di simm. retta,  $C \in$  tale asse

Quindi

$$\begin{cases} \int_A \psi_c y dA + \int_A \cancel{K y} dA - \int_A y_c x y dA + \int_A x_c y^2 dA = 0 \\ \int_A \psi_c x dA + \int_A \cancel{K x} dA - \int_A y_c x^2 dA + \int_A x_c y x dA = 0 \end{cases}$$

- Torsione: Approccio agli sforzi (paghiamo a priori l'equilibrio, imponiamo la congruenza)

$H_p$ :  $\exists$  f.ne  $\varphi = \varphi(x, y)$  funzione potenziale di sforzo o di Airy (definita a meno di cost. arbitrarie)

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial y} = \varphi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\frac{\partial \varphi(x, y)}{\partial x} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

[obolata della necessaria "regolarità"  
 $\Rightarrow$  Senza derivate]

- Eq. di equilibrio:

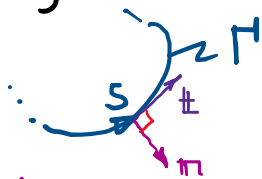
$$\tau_{zx,x} + \tau_{zy,y} = 0 \text{ in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,x} + (-\varphi_{,x})_{,y} = \varphi_{,yx} - \varphi_{,xy} \stackrel{\text{Th. di Schwarz}}{=} 0 \quad \checkmark$$

- Eq. di congruenza:

$$\tau_{zx,y} - \tau_{zy,x} = -c \text{ in } A \Rightarrow (\varphi_{,y})_{,y} - (-\varphi_{,x})_{,x} = \underbrace{\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy}}_{\nabla^2 \varphi(x,y)} = -c$$

- Condizione al contorno (equil.):

$$\tau_{zx} n_x + \tau_{zy} n_y = 0 \text{ su } \Gamma \Rightarrow \varphi_{,y} \tilde{n}_x - \varphi_{,x} \tilde{n}_y = \varphi_{,x} t_x + \varphi_{,y} t_y$$



$$\boxed{\varphi = \text{cost} = 0 \text{ su } \Gamma}$$

$\Leftarrow \varphi_{,t} = \varphi_{,s} = 0 \text{ su } \Gamma$   
 c.e. di Dirichlet

$$\boxed{\nabla^2 \varphi(x, y) = -c \text{ in } A}$$

Eq. ne di Poisson con termine noto costante

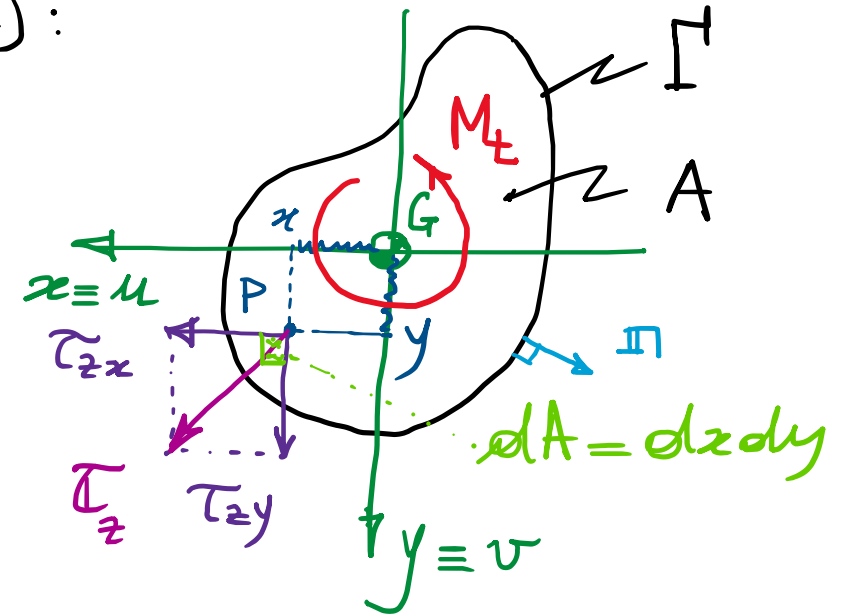
$$c \leftrightarrow M_t$$

- Si ottiene pertanto un pb. di Dirichlet per l'eq. ne di Poisson (con termine noto costante).

- Equivalenze statica (tra il campo delle tensioni tangenziali e il momento torcente che le ha generate):

$$M_t = \int_A (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) dA$$

$$= \int_A (-\varphi_{,x} \cdot x - \varphi_{,y} \cdot y) dA$$



$$= - \int_A [(\varphi \cdot x)_{,x} + (\varphi \cdot y)_{,y}] dA + 2 \int_A \varphi dA$$

Th. Div.  $\int_A dA \rightarrow \int_{\Gamma} d\Gamma$

$$= - \int_{\Gamma} \cancel{\varphi} (x n_x + y n_y) d\Gamma + 2 \int_A \varphi dA$$

0 su  $\Gamma$

Quindi:

$$M_t = 2 \int_A \varphi(x, y) dA$$

$M_t \leftrightarrow e$

$$(\varphi \cdot x)_{,x} = \varphi_{,x} \cdot x + \varphi \cdot \overbrace{x_{,x}}^1$$

$$(\varphi \cdot y)_{,y} = \varphi_{,y} \cdot y + \varphi \cdot \underbrace{y_{,y}}_1$$

$$-\varphi_{,x} \cdot x = -(\varphi \cdot x)_{,x} + \varphi$$

$$-\varphi_{,y} \cdot y = -(\varphi \cdot y)_{,y} + \varphi$$

# Quadro sinottico (Torsione)

## Approccio agli spostamenti

$\Psi_G(x, y)$  ;  $\beta$   
f.ne di ingobbamento "torsione", cost

## Approccio agli sforzi

$\varphi(x, y)$  ;  $c$   
f.ne di Airy costante di integrazione

incognite

equazioni

relazioni

corrispondenze  
 $2G\beta = c$

Pl. di Dirichlet  
per l'ep.ne di Poisson

$$\begin{aligned} \nabla^2 \varphi &= -c \text{ in } A \\ \varphi &= 0 \text{ su } \Gamma \end{aligned}$$

$$M_t = 2 \int_A \varphi \, dA$$

Th. Schwarz  
 $-2G\beta = -c$

$$\tau_{zx} = G\beta(\psi_{G,x} - y) = \varphi_{,y}$$

$$\tau_{zy} = G\beta(\psi_{G,y} + x) = -\varphi_{,x}$$

campo  
delle  
tensioni tangenziali

$\Psi_G \rightarrow \varphi$

$$\psi_{G,x} = \frac{1}{G\beta} \varphi_{,y} + y$$

$$\psi_{G,y} = -\frac{1}{G\beta} \varphi_{,x} - x$$

$\varphi \rightarrow \Psi_G$

Pl. di Neumann-Dini  
per l'ep.ne di Laplace  
 $\nabla^2 \Psi_G = 0$  in  $A$   
 $\Psi_{G,n} = \underbrace{n_x y - n_y x}_{\mathbf{x} \cdot \mathbf{t}}$  su  $\Gamma$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; J(\Psi_G) = \frac{J_G}{\eta \geq 1}$$

Infatti:  $\varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = -c$

$$G\beta(-\cancel{\psi_{G,y}x} - 1 + \cancel{\psi_{G,x}y} - 1) = -c$$

$$-2G\beta = -c$$

# Metodi di soluzione:

— Analitici: (problemi differenziali)

— Esatta (possibile solo in casi particolari, in forma chiusa o mediante sviluppi in serie).

es. caso della  
sezione ellittica  
↗

— Approssimate (comunque valide ai fini ingegneristici, in forma chiusa o per sviluppi in serie troncati).

es. profili  
sottili  
(aperti e chiusi)  
↘

— Numerici: (problemi algebrici  $\Rightarrow$  per discretizzazione)

— Metodo delle Differenze Finite (FDM).  $\Rightarrow$  Calcolo Numerico

— Metodo degli Elementi Finiti (FEM).  $\Rightarrow$  Computational Mechanics of Solids and Structures

passaggio da  
numero  $\infty$   
di nodi a  
numero finito,  
cioè discreto,  
di nodi