Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

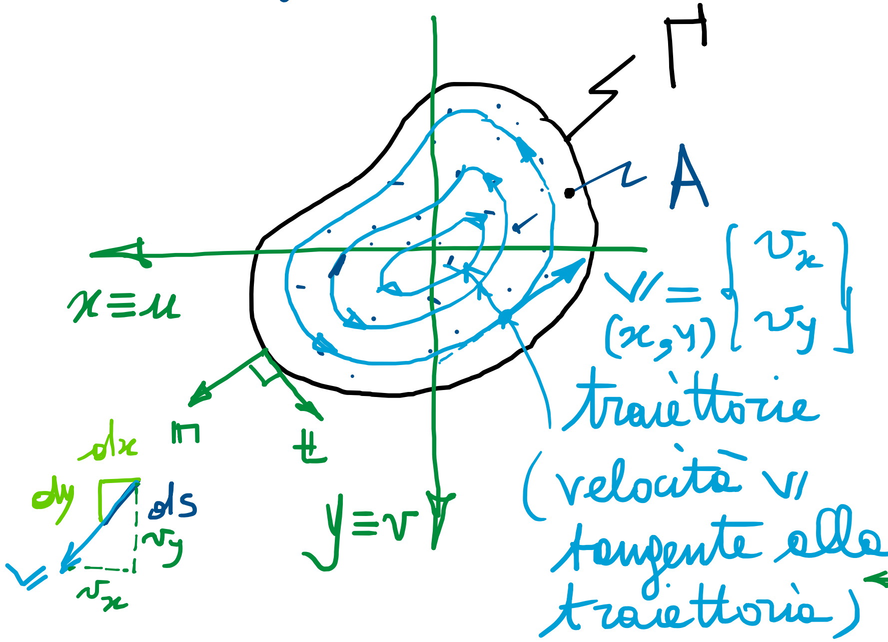
Analogie fisiche (del pb. della torsione con altri fenomeni fisici retti da equazioni governanti formalmente simili).

Meccanica dei Solidi

- Esse possono risultare utile a:
  - ricercare ed interpretare la soluzione cercata del pb. in esame;
  - concepire eventuali approcci sperimentali utili ad osservazione qualitativa e/o quantitativa;
  - individuare le caratteristiche salienti del pb. e della risposta, a fini ingegneristici, in particolare riguardo la definizione della capacità portante e del comportamento a torsione.

- Si presentano due analogie principali, in ambito "Meccanica":
  - analogia idrodinamica (Lord Kelvin ~1869) " dei Fluidi
  - analogia della membrana (Ludwig Prandtl ~1903) " delle Strutture

– Analogia idrodinamica (Lord Kelvin, 1869)



– Moto piano di fluido perfetto (non viscoso) incomprimibile all'interno di un recipiente di contorno Γ, con vorticità (velocità angolare) costante.

– Equazioni idrodinamiche governanti:

– eq.ne di continuità (scalare) $\cancel{\dfrac{d\rho}{dt}} + \rho \, \boxed{\operatorname{div} \mathbb{V} = 0 \text{ in } A}$ (densità $\rho = \text{cost}$)

campo di velocità solenoidale

$$\boxed{v_{x,x} + v_{y,y} = 0}$$

$\Phi = \text{cost}$: linee di flusso

$$d\Phi = \underbrace{\Phi_{,x}}_{-v_y} dx + \underbrace{\Phi_{,y}}_{v_x} dy = 0 \Rightarrow \frac{v_y}{v_x} = \frac{dy}{dx}$$

– vorticità costante (vettoriale) $2\omega = \operatorname{rot} \mathbb{V} = \nabla \wedge \mathbb{V} = \text{cost in } A \quad \omega \perp (x,y)$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = k \underbrace{(v_{y,x} - v_{x,y})}_{2\omega_z}$$

relazione scalare $-2\omega_z = \boxed{v_{x,y} - v_{y,x} = -c}$ costante

– c.c. ...... $\mathbb{V} \cdot n = v_x n_x + v_y n_y = 0$ su Γ

– Si presenta la seguente analogia formale (stesse eq.ni governanti):

$$\tau_z = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix} \leftrightarrow \mathbb{V} = \begin{Bmatrix} v_x \\ v_y \end{Bmatrix}$$

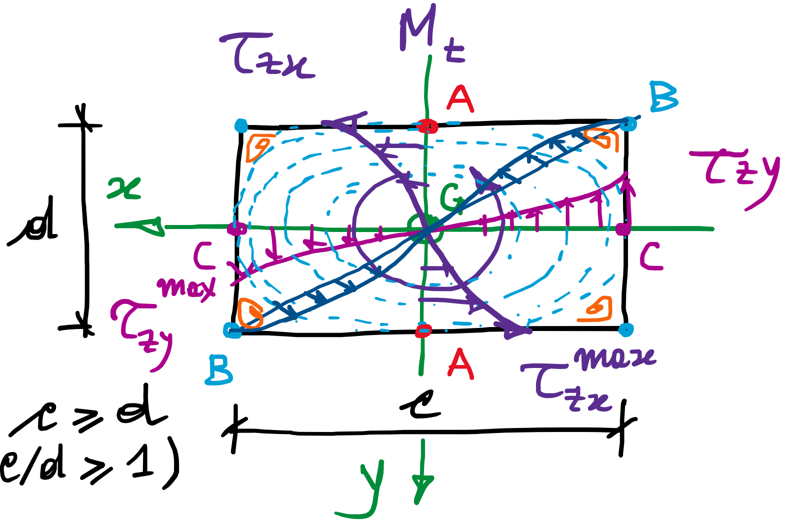
$$\varphi = \varphi(x,y) \leftrightarrow \Phi = \Phi(x,y)$$

f.ne di sforzo di Airy — f.ne di flusso ("stream function")

$$\tau_{zx} = \varphi_{,y} \; ; \; \tau_{zy} = -\varphi_{,x} \leftrightarrow v_x = \Phi_{,y} \; ; \; v_y = -\Phi_{,x}$$

– L'analogia idrodinamica risulta utile a "visualizzare" il campo delle tens. tangenziali –

– Per es. per sezione rettangolare (soluzione per sviluppi in serie):



$e \geq d$
$(e/d \geq 1)$

eq.ne di continuità: portata $Q = VA = \text{cost}$

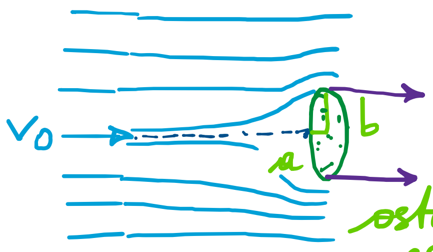
- $\tau^A > \tau^C$ (τ^{max} nei p.ti medi dei lati maggiori)
- $\tau^B \simeq 0$ (zone di ristagno di fluido) (spigoli sporgenti)

$$\tau^{max} = k \frac{M_t}{c d^2} \; ; \; J = \alpha \, c \, d^3$$

e/d	k	α
1	4.80	0.141
2	~4	~0.23
∞	3	0.333 = 1/3

profilo rettangolare sottile

– Concentrazione delle tensioni:

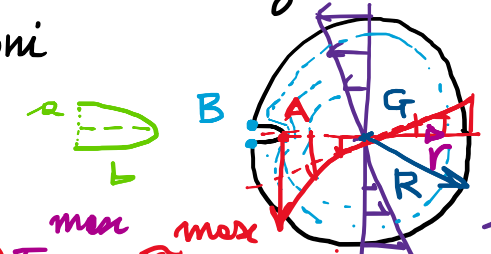


fattore di concentrazione delle velocità $\Rightarrow$ delle tensioni

$$v = \left(1 + \frac{b}{a}\right) v_0 \; ; \; v_0 \rightarrow 2v_0$$

es. $a = b = R$

Intaglio (in sezione circolare)



$$\tau^{max} = \frac{2 M_t}{\pi R^3}$$

$$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_c} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$$

$\left(1 + \frac{b}{a}\right) \tau^{max} \sim \tau^{max}$ maggiorata

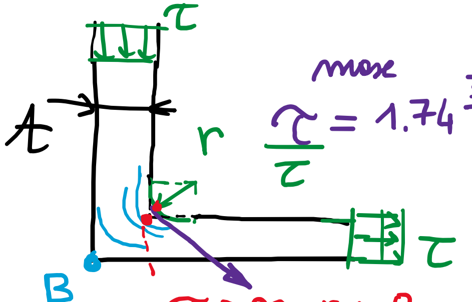
intaglio a spigolo vivo

$\frac{a}{b} \rightarrow 0 \, , \, \frac{b}{a} \rightarrow \infty$ $\quad \tau \rightarrow \infty$ singolarità della soluzione in campo elastico

(V. Meccanica della Frattura)

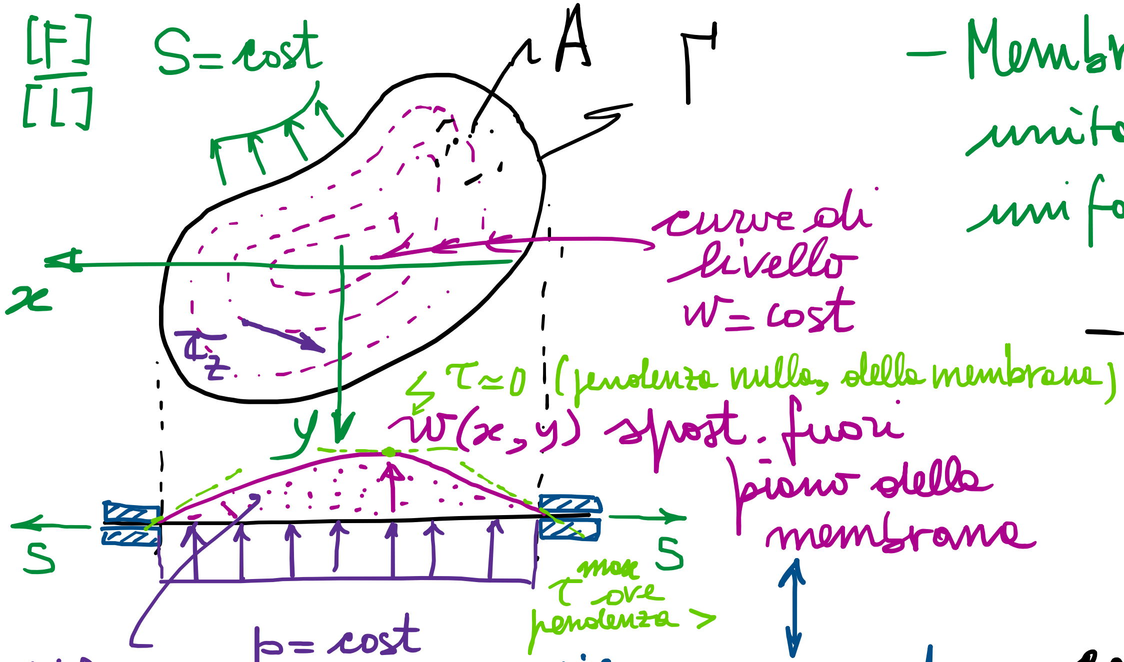
– Formula di Trefftz:
~(1922)

profilo "sottile"



$$\frac{\tau^{max}}{\tau} = 1.74 \sqrt[3]{\frac{t}{r}}$$

- **Analogia della membrana** (Prandtl, 1903) (es. bolle di sapone, tens. superficiale cost.)



Volume sotteso dalla membrana

$p = \text{cost}$ $\frac{[F]}{[L]^2}$

utile a rappresentare la f.ne di Airy

$$\begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} \end{cases}$$

$\varphi = \text{cost}$

$d\varphi = \varphi_{,x} dx + \varphi_{,y} dy = 0$

$-\tau_{zy} dx + \tau_{zx} dy = 0$

$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = \frac{dy}{dx}$

τ_z tangente alle $\varphi = \text{cost}$ ($w = \text{cost}$)

– Membrana appoggiata su contorno Γ, con tensione per unità di lunghezza $S = \text{cost}$, soggetta a pressione uniforme p.

– Equazione di equilibrio della membrana in direz. ortogonale al piano:

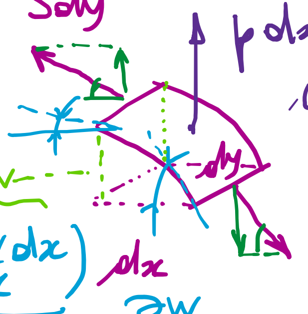
$$\nabla^2 w(x,y) = -\frac{p}{S} \text{ in } A$$

con c.c. $w = 0$ su Γ

Torsione

$$\nabla^2 \varphi(x,y) = -c \text{ in } A \quad \Leftrightarrow$$

$\varphi = 0$ su Γ



cilindrica (come filo) in y

sin ≃ tan ≃ angolo

$\frac{\partial}{\partial x}\left(w + \frac{\partial w}{\partial x} dx\right)$

$\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx$

eq. alla trasl. in z:

$$S \cancel{dy}\left(\cancel{\frac{\partial w}{\partial x}} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cancel{dx} - \cancel{\frac{\partial w}{\partial x}}\right) + p \cancel{dx} \cancel{dy} = 0 \Rightarrow w_{,xx} = -\frac{p}{S} = \text{cost}$$

con anche curv. in y $\Rightarrow \nabla^2 w = w_{,xx} + w_{,yy}$

$$w \frac{S}{p} = \frac{\varphi}{c} \Rightarrow \varphi = \frac{cS}{p} w$$

$$\int_A w(x,y)\, dA = V \quad \Leftrightarrow \quad M_t = 2 \int_A \varphi\, dA$$

$$M_t = \frac{2cS}{p} V$$