Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

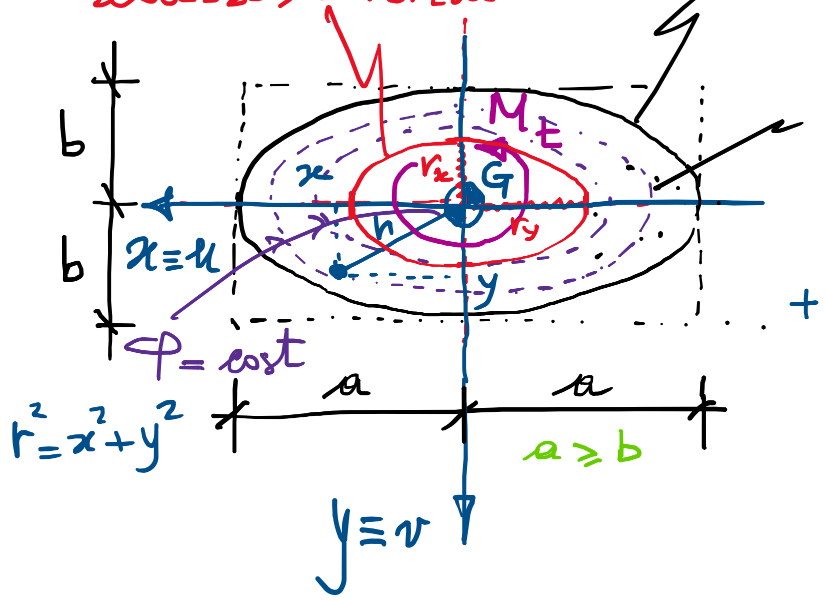
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Soluzioni analitiche del pb. della torsione

- **Sezione ellittica**

ellisse d'inerzia



$$1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

$$\Gamma : \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$$

$$A = \int_A dA = \pi a b$$

$$J_x = \int_A y^2 dA = \frac{\pi}{4} a b^3 = \pi a b \left(\frac{b}{2}\right)^2 = A r_x^2 \Rightarrow r_x = \frac{b}{2}$$

$$J_y = \int_A x^2 dA = \frac{\pi}{4} a^3 b = \pi a b \left(\frac{a}{2}\right)^2 = A r_y^2 \Rightarrow r_y = \frac{a}{2}$$

$$J_G = \int_A r^2 dA = J_x + J_y = \frac{\pi a b}{4}(a^2 + b^2) = A r_G^2 \Rightarrow r_G = \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} = \sqrt{r_x^2 + r_y^2}$$

Sez. circolare (caso particolare): $a = b = R$

$\Psi_1 \equiv 0$; $\eta = 1$, $J = J_G$

$$A = \pi R^2$$

$$J_x = J_y = \frac{\pi}{4} R^4$$

$$J_G = 2 J_x = \frac{\pi}{2} R^4$$

$$r_x = r_y = \frac{R}{2}; \quad r_G = \frac{\sqrt{2}}{2} R$$

- Funzione potenziale di sforzo di Airy: $\left(\beta = \frac{M_t}{GJ}, \quad c = 2G\beta = 2\frac{M_t}{J} \right)$

eq. di Poisson con termine noto cost.

$M_t \leftrightarrow$ cost

$$\varphi = \varphi(x,y) = K \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow \nabla^2 \varphi = \varphi_{,xx} + \varphi_{,yy} = K\left(-\frac{2}{a^2} - \frac{2}{b^2}\right) = -2K\frac{a^2+b^2}{a^2 b^2} = -c \quad \text{in } A$$

$$K = \frac{c}{2} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} = \frac{M_t}{J} \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2}$$

$$\frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}$$

- $\varphi = 0$ su Γ c.c. ✓ (Dirichlet)
- $\varphi = \text{cost} \Rightarrow$ traiettorie ellittiche
- $\varphi \sim x^2, y^2 \Rightarrow$ derivate seconde costanti

• Equivalenza statica:

$$M_t = 2\int_A \varphi\, dA = 2\int_A K\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right) dA = 2K\left(A-\frac{1}{a^2}J_y-\frac{1}{b^2}J_x\right) = 2KA\left(1-\frac{r_y^2}{a^2}-\frac{r_x^2}{b^2}\right)$$

$$r_y^2 = \frac{a^2}{2^2}, \quad r_x^2 = \frac{b^2}{2^2}$$

$$= 2K\underbrace{A}_{\pi ab}\left(1-\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\right) = \cancel{2}KA\frac{1}{\cancel{2}} \Rightarrow \boxed{K = \frac{M_t}{A} = \frac{M_t}{\pi ab}} = \frac{M_t}{J}\frac{a^2b^2}{a^2+b^2} \Rightarrow \boxed{J = \pi\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}}$$

• Momento d'inerzia torsionale (DSV):

$$J = \frac{\pi}{4}\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}\,\frac{\pi^3 ab}{\frac{\pi^3}{4}ab} = \boxed{\frac{A^4}{4\pi^2 J_G} = J}$$

$$J_G = \frac{\pi ab}{4}(a^2+b^2);\quad A = \pi ab$$

$$a=b=R,\quad J = \pi\frac{R^6}{2R^2} = \frac{\pi R^4}{2} \overset{\checkmark}{=} J_G\ (\eta = 1)$$

$$J = \frac{J_G}{\eta}$$

$$\pi^2 \simeq 10$$
$$4\pi^2 \simeq 40$$

$$\boxed{J \simeq \frac{A^4}{40 J_G}}$$

formule utili a stimare il momento d'inerzia di sezioni compatte quali sez. ellittiche equivalenti di pari A e J_G.

• Fattore di torsione

$$\eta = \frac{J_G}{J} = \frac{a^2+b^2}{4}\,\frac{a^2+b^2}{a^2b^2} = \frac{(a^2+b^2)^2}{4a^2b^2} = \frac{(a^2+b^2-2ab+2ab)^2}{4a^2b^2}$$

$$= \frac{\left[2ab+(a-b)^2\right]^2}{(2ab)^2} = \left[1+\frac{(a-b)^2}{2ab}\right]^2 \geq 1$$

$$= \frac{1}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)^2$$

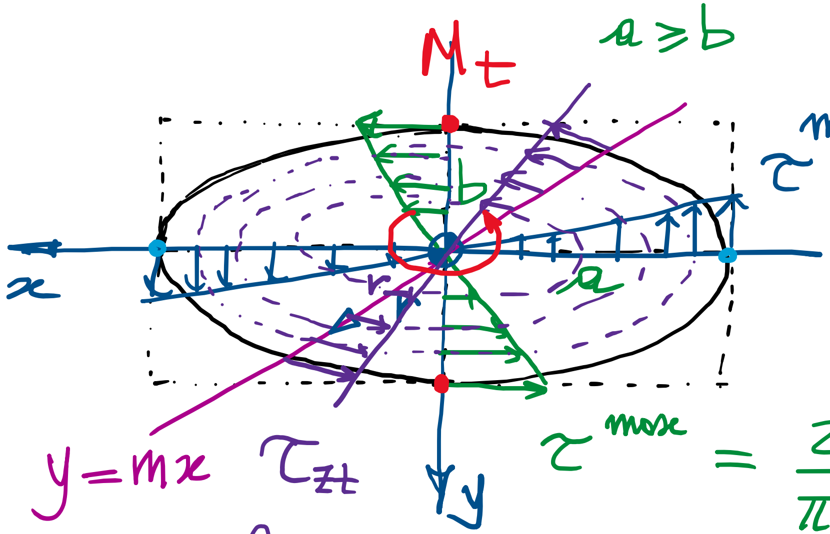
$\Rightarrow$ sez. circ.: $a=b=R$ $\quad \eta = 1 \ (J = J_G)$

$$\eta = \frac{J_G}{J} \simeq \frac{J_G}{\frac{A^4}{40 J_G}} = 40\frac{J_G^2}{A^4} = 40\left(\frac{J_G}{A^2}\right)^2$$

• Campo delle tensioni tangenziali:

$$\varphi = \frac{M_t}{\underbrace{\pi a b}_{A}}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\dfrac{2M_t}{\pi a b^3}\, y = -\dfrac{2M_t}{\underbrace{\pi a b}}\dfrac{y}{b^2} \\[2ex] \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = \dfrac{2M_t}{\pi a^3 b}\, x = \dfrac{2M_t}{\underbrace{\pi a b}}\dfrac{x}{a^2} \end{cases}$$

f.ne di AIRY



$$\tau^{min} = \frac{2M_t}{\pi a^2 b}$$

$$\tau^{max} = \frac{2M_t}{\pi a b^2}$$

$r^2 = x^2 + y^2$ lineari in r

tangenti alle traiettorie ellittiche e parallele $\forall$ distanza radiale r (con modulo crescente linearmente con r)

lineari in x, y

$$\frac{\tau_{zy}}{\tau_{zx}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$$

$$= -\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{m} = \text{cost}, \text{ lungo diametro } y = mx$$

$$\tau_z = \|\tau_z\| = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \frac{2M_t}{\pi a b}\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}}$$

$$\text{su } y = mx \quad = \frac{2M_t}{\pi a b}\, x \sqrt{\frac{1}{a^4} + \frac{m^2}{b^2}}$$

lineare in x, in y, in r

$$r^2 = x^2 + y^2 = (1+m^2)x^2$$

$$r = \sqrt{1+m^2}\, x$$

Sez. circolare $a = b = R$

$$\tau_{zt} = \frac{2M_t}{\pi R^4}\, r, \quad \tau_{zt}^{max} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$$

$$= \frac{M_t}{J_4}\, r$$

– Funzione di ingobbamento (ψ_G):

$$\begin{cases} \psi_{G,x} = \dfrac{1}{G\beta}\,\varphi_{,y} + y = -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,y \\[2ex] \psi_{G,y} = -\boxed{\dfrac{1}{G\beta}}\,\varphi_{,x} - x = -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,x \end{cases}$$

$\frac{1}{G\beta} = \frac{J}{M_t}$

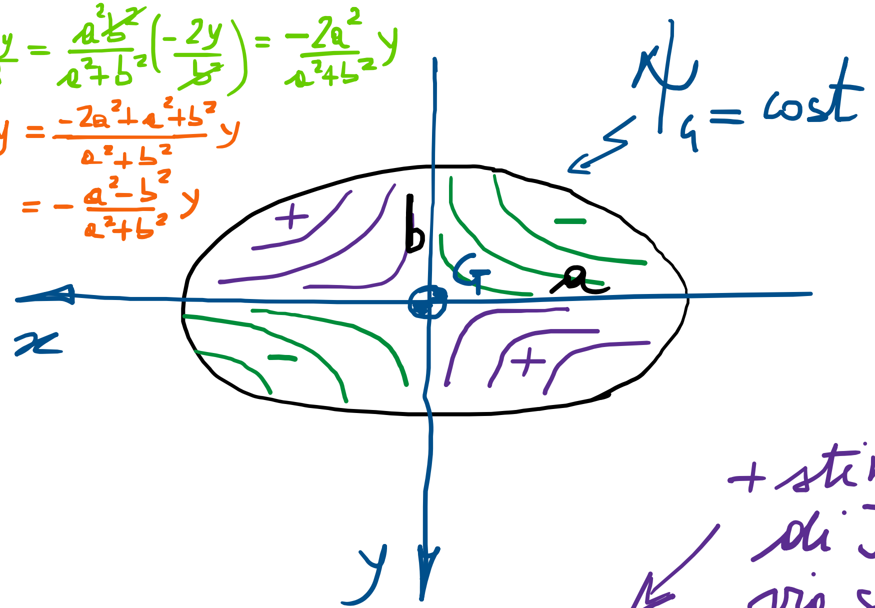
differenziale della f.ne $\psi_G(x,y)$

$$\Rightarrow \int d\psi_G = \psi_{G,x}\,dx + \psi_{G,y}\,dy = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\underbrace{(y\,dx + x\,dy)}_{\int d(x\cdot y)}$$

$$\frac{\varphi}{G\beta} = \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\left(1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}\right)$$

es. $\dfrac{\varphi_{,y}}{G\beta} = \dfrac{a^2\cancel{b^2}}{a^2+b^2}\left(-\dfrac{2y}{\cancel{b^2}}\right) = \dfrac{-2a^2}{a^2+b^2}\,y$

$+y = \dfrac{-2a^2+a^2+b^2}{a^2+b^2}\,y = -\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,y$



paraboloide iperbolico

+ stima approssimata di J per sezioni compatte via sez. ellittica equiv.

integrando:

$$\boxed{\psi_G(x,y) = -\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}\,xy} + \underbrace{\cancel{cost}}_{=0}$$

$\bar{\psi}_G = 0$

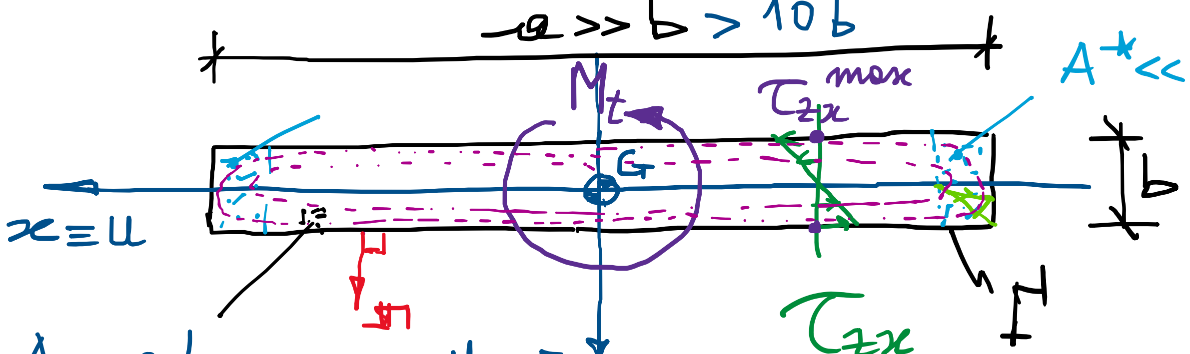
N.B. Sez. circolare ($a = b = R$)

$\psi_G \equiv 0$, non c'è ingobbamento

$\eta = 1$, $J = I_G = \dfrac{\pi R^4}{2}$

Quindi: sez. ellittica costituisce caso rilevante con soluzione analitica in forma chiusa esatta (contenente il caso della sez. circolare come particolare).

• **Profilo rettangolare sottile** (soluzione analitica approssimata)



$A = ab$

$J_x = \frac{1}{12} a b^3$

piccolo

τ_{zx} lineari in y

Eq. governanti (torsione):

equil. $\tau_{zx,x} + \cancel{\tau_{zy,y}} = 0$ in A ✓

congr. $\tau_{zx,y} - \cancel{\tau_{zy,x}} = -c$ in A ✓

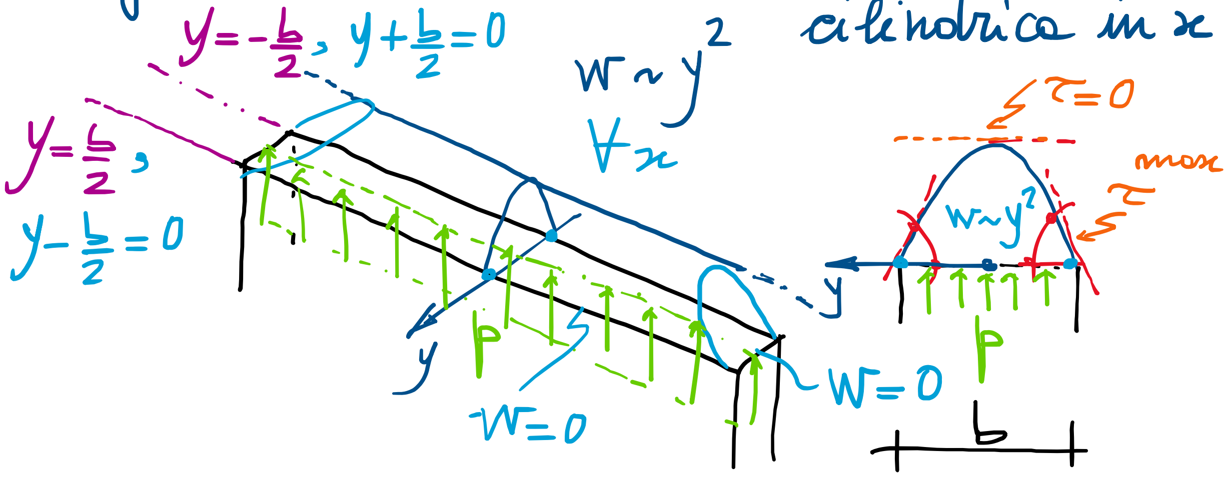
c.c. $\tau_{zx} n_x + \cancel{\tau_{zy}} n_y = 0$ su Γ ✓

• Analogia idrodinamica: $\left(\frac{b}{a} \to 0;\ \frac{a}{b} \to \infty\right)$

$\tau_{zx} = -c\,y$; $\tau_{zy} = 0$ in $A - A^*$

lineari sullo spessore

• Analogia della membrana: sostanzialmente cilindrica in x



$w_{,y} \sim y$ lineare in y

– Campo delle tensioni tangenziali valevole in quasi tutto il profilo rettangolare sottile, salvo nelle zone in corrispondenza delle estremità, di piccola estensione A^* (con τ_z attese dello stesso ordine di grandezza) ⇒ soluzione approx.

— Funzione di sforzo: eq.ni rette lati lunghi

f.ne di AIRY $$\varphi = \varphi(y) = K\left(\frac{b}{2}+y\right)\left(\frac{b}{2}-y\right) = \boxed{K}\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right) \Rightarrow \varphi = 0 \text{ su } \Gamma - \Gamma^*$$

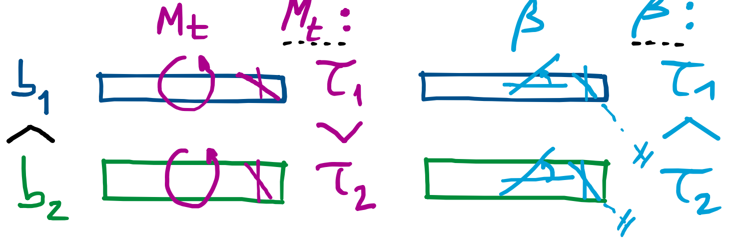
$$\nabla^2\varphi = \varphi_{,yy} = -2K = -c \Rightarrow \boxed{K = \frac{c}{2} = G\beta = \frac{M_t}{J}} \Rightarrow J = \frac{M_t}{K}\,;\ M_t = KJ$$

$$M_t = 2\int_A \varphi\, dA = 2K\int_A\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right)dA = 2K\left(\frac{b^2}{4}\underbrace{A}_{ab} - J_x\right) = 2K\left(\frac{3}{3}\frac{ab^3}{4}-\frac{ab^3}{12}\right) = \cancel{2}K\frac{ab^3}{\cancel{6}\,3}$$

$$= K\underbrace{\frac{1}{3}ab^3}_{J} = KJ \qquad \boxed{J = \frac{1}{3}ab^3 = 4J_x} \sim b^3 \text{ piccolo}$$

momento d'inerzia torsionale di sezione rettangolare sottile

cf. a parità di:



— Campo delle τ_z:

$$\varphi = \underbrace{\frac{3M_t}{ab^3}}_{\frac{M_t}{J} = G\beta}\left(\frac{b^2}{4}-y^2\right) \Rightarrow \begin{cases} \tau_{zx} = \varphi_{,y} = -\dfrac{6M_t}{ab^3}\,y = -\dfrac{2M_t}{J}\,y \\ \tau_{zy} = -\varphi_{,x} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{zx}^{max} = \left|-\frac{6M_t}{ab^3}\left(\pm\frac{b}{2}\right)\right| = \frac{3M_t}{ab^2} = \frac{M_t}{J}\,b = G\beta b}$$

— Equivalenza statica delle τ_{zx}:

$$\int_A -\tau_{zx}\, y\, dA = \int_A + \frac{2M_t}{J} y^2\, dA = \frac{2M_t}{\underbrace{J}_{\sim 4\cancel{J_x}}} \cancel{J_x} = \frac{M_t}{2}$$

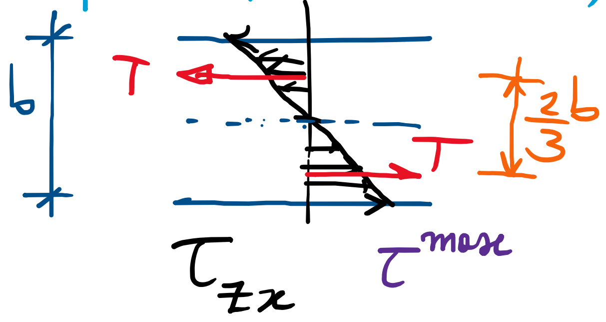
Le τ_{zx} così determinate risultano staticamente equivalenti alla metà del momento torcente

$A^* \ll A$

$\Rightarrow \frac{M_t}{2}$ (v. L. Corradi)

L'altra metà di M_t sarà legata alle τ^* nelle zone A^* (stesso ordine di grandezza ma bracci di leva in direz. x lunghi, dell'ordine di 'a').

Derivazione "diretta" di τ^{max} (sapendo l'equiv. di τ_{zx} a $M_t/2$)



$$T = \frac{1}{2}\,\frac{b}{2}\,\tau^{max} a = \frac{ab}{4}\tau^{max}$$

$$\frac{M_t}{\cancel{2}} = T\cdot\frac{2}{3}b = \frac{ab}{\cancel{4}_{2}}\tau^{max}\,\frac{\cancel{2}}{3}b \Rightarrow \boxed{\tau^{max} = \frac{3M_t}{ab^2}}$$

[Att.: equivalenza a metà M_t

— Funzione di ingobbamento:

$$\begin{cases} \psi_{q,x} = \frac{1}{4\beta}\varphi_{,y} + y = \frac{1}{\cancel{4\beta}}(-2\cancel{4\beta}\, y) + y = -y \\ \psi_{q,y} = -\frac{1}{4\beta}\cancel{\varphi_{,x}} - x \end{cases} \Rightarrow d\psi_q = -y\,dx - x\,dy = -d(xy) \Rightarrow \psi_q(x,y) = -xy + \cancel{cost}$$

$= \lim_{b/a \to 0} \psi_q^{ell}$

$\bar{\psi}_q = 0$

(asse x) $y = 0 \to \psi_q = 0$ no ingobbam. lungo l'asse x e trascurabile sullo spessore $\left(y^{max} = \frac{b}{2}\right)$