

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

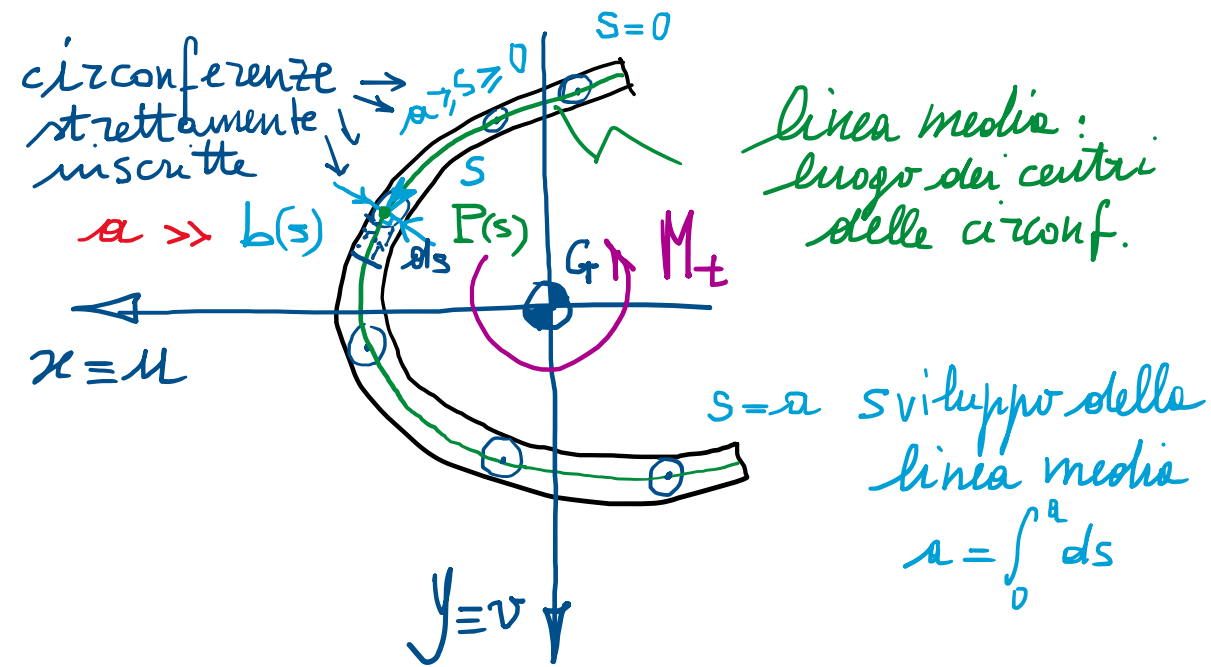
Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 22

Torsione nei profili sottili aperti ($\Rightarrow$ generalizzazione del caso visto di profilo rettangolare sottile)

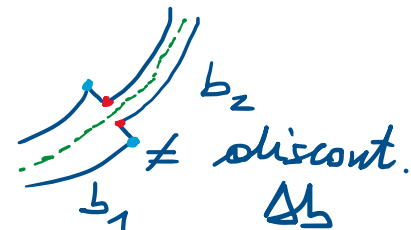


linea media:
luogo dei centri
delle circonferenze.

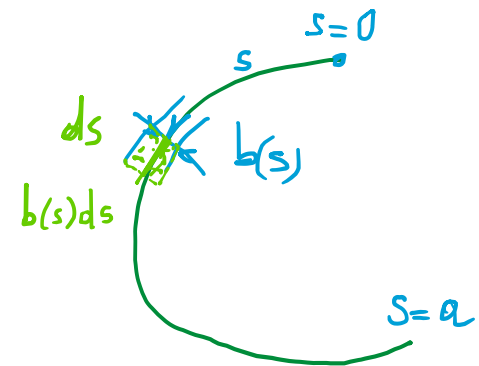
sviluppo della
linea media
 $a = \int_0^a ds$

- Profilo "in parete sottile", cioè con spessore $b(s)$, anche variabile lungo il profilo ma "piccolo" rispetto allo sviluppo complessivo del profilo (della linea media dello stesso).

- Variazione ammessa, seppur con $b(s) \ll a \forall s$, con continuità: non



Caratteristiche geometriche: (riferite alla linea media)

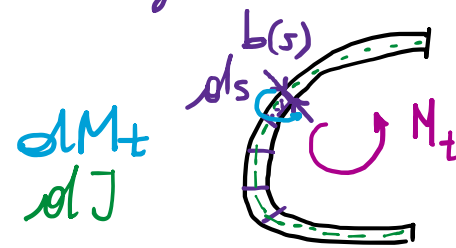


$$A = \int_A dA \approx \int_0^a b(s) ds$$

$$J_x = \int_A y^2 dA \approx \int_0^a y(s)^2 b(s) ds$$

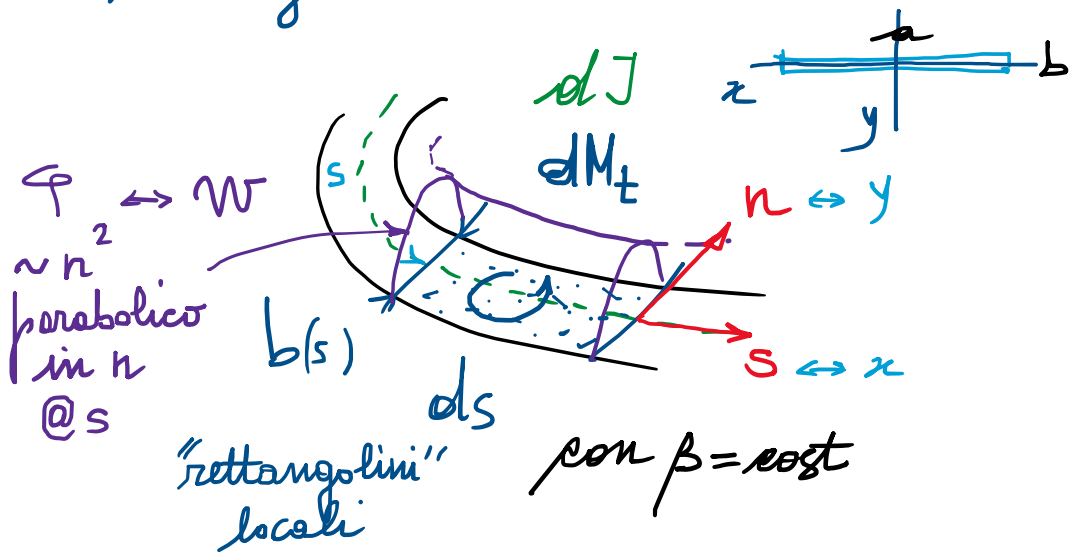
$$J_y = \int_A x^2 dA \approx \int_0^a x(s)^2 b(s) ds$$

- Si ipotizza che ogni "rettangolino" infinitesimo $b(s) ds$ si comporti come un profilo rettangolare sottile soggetto a torsione

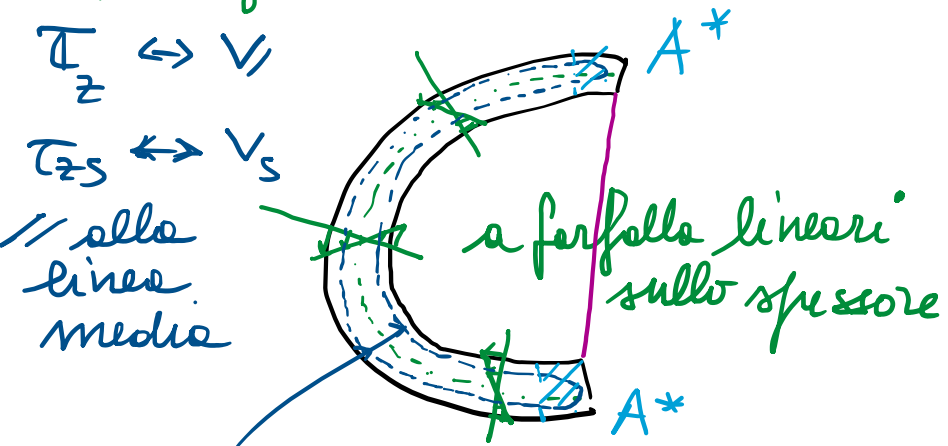


a parità di
torsione
 $\beta = \text{cost}$

• Analogie della membrana:



• Analogia idrodinamica:



traiettorie che si richiudono all'interno dello spessore

"bracci di leva" delle τ_{zs} dell'ordine dello spessore $b(s)$ quindi piccoli $\Rightarrow$ scarsa capacità portante a torsione

• f.ne di Airy:

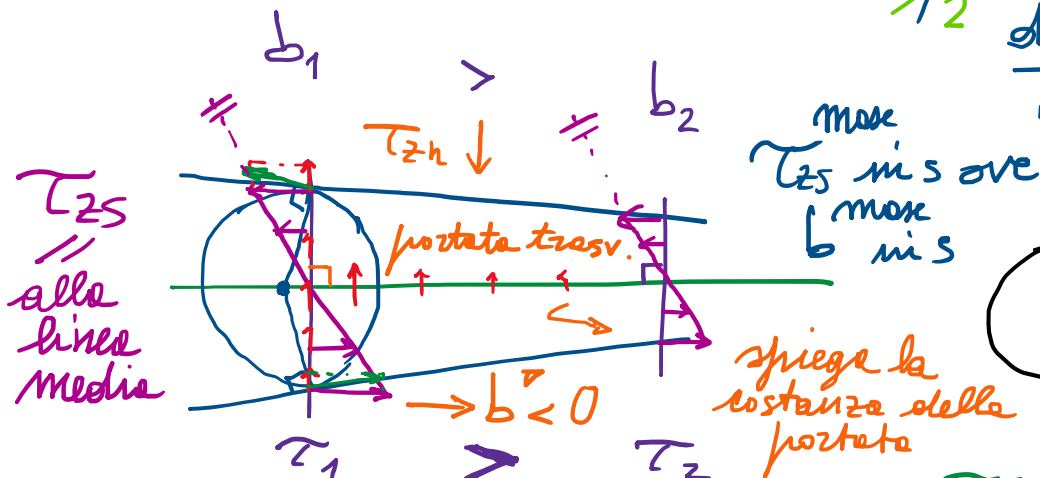
$$\Phi(s, n) = \frac{M_t}{J} \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right)$$

locale

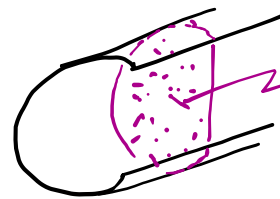
• tensioni tangenziali:

$$\begin{cases} \tau_{zs}(n; s) = \Phi_{sn} = G\beta (-2n) = -2G\beta n = -2 \frac{M_t}{J} n \\ \tau_{zn}(s) = -\Phi_{ns} = K \frac{2b(s)}{4} \frac{db(s)}{ds} \approx 0 \end{cases}$$

trascurabili in senso ingegneristico
spessore resta piccolo



spiega la costanza della portata



irrigidimenti per garantire $\beta = \text{cost}$

τ_z tangente al contorno

τ_{zs} (fluido uscirà dal profilo)

- J determinabile per equivalenza statica (tra il campo delle τ_{zs} e il momento torcente M_t):

$$M_t = 2 \int_A \varphi dA = 2 G \beta \int_0^a \int_{-b(s)/2}^{b(s)/2} \left(\frac{b(s)^2}{4} - n^2 \right) dn ds$$

$$= 2 G \beta \frac{1}{2} \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds$$

$$= G \beta J$$

$b = \text{cost} \Rightarrow J = \frac{1}{3} a b^3$
 $\underbrace{\hspace{1cm}}_{a} \underbrace{\hspace{1cm}}_{b^3}$

$$J = \int_0^a dJ = \int_0^a \frac{1}{3} b(s)^3 ds$$

"piccolo" $\sim b(s)^3$

momento d'inerzia torsionale

torsione
⚡

$$\beta = \frac{M_t}{GJ}; \quad G\beta = \frac{M_t}{J} = \frac{dM_t}{dJ}$$

cost. per tutti i $b(s) \cdot ds$

rigidezza torsionale

$$\Rightarrow dM_t = \frac{dJ}{J} M_t$$

$$\tau_{zs}(s) = G \beta b(s) = \frac{M_t}{J} b(s) = \frac{dM_t}{dJ} b(s)$$

$\underbrace{\hspace{1cm}}_{b(s)} \underbrace{\hspace{1cm}}_{ds}$

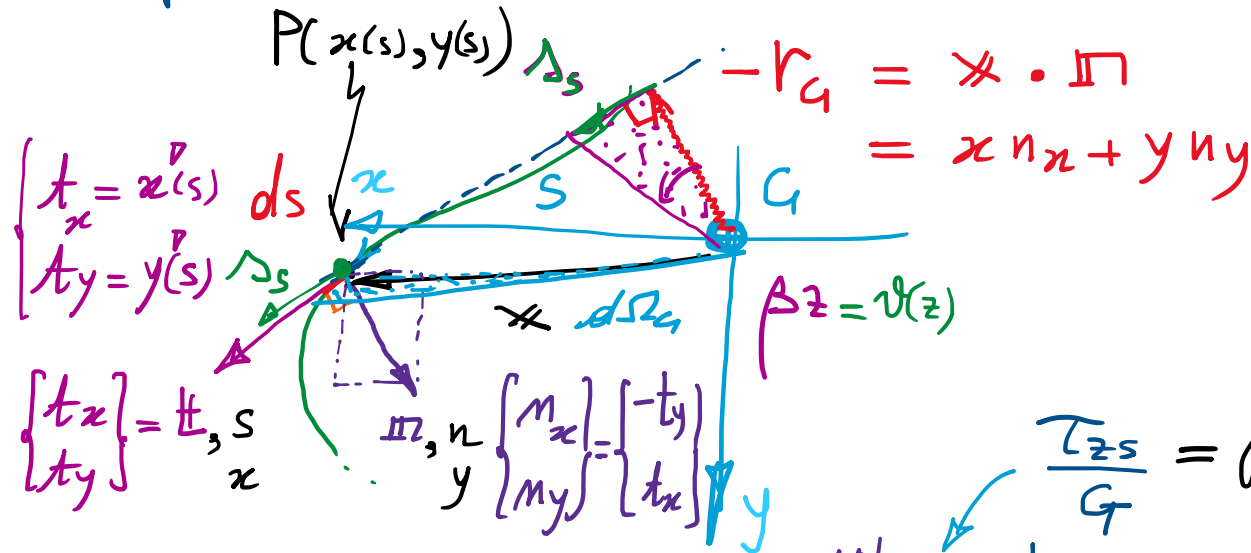
— Ingobbamento fuori piano (riferito alla linea media) $[\Psi_G(s) \neq 0, \Psi_C(s) \neq 0]$

campo di spostamenti (rif. a G)

$$\begin{cases} \Delta_x = -\beta z y \\ \Delta_y = \beta z x \\ \Delta_z = \beta \Psi_G(x(s), y(s)) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Delta_s &= \Delta \cdot \underline{t} = \Delta_x t_x + \Delta_y t_y \\ &= \beta z (-y t_x + x t_y) \\ &= \beta z (-y n_y - x n_x) \\ &= -\beta z (x n_x + y n_y) \end{aligned}$$

$$\Psi_G = 0$$



$$= \beta z r_G = \Delta_s$$

vedi mappe di spostamento

spostamento nella direzione s

$$\frac{\tau_{zs}}{G} = \gamma_{zs} = \Delta_{z,s} + \Delta_{s,z} = \beta (\Psi_{G,s}(s) + r_G(s))$$

$$\frac{d\Psi_G}{ds} = \Psi_{G,s} = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} - r_G(s)$$

$$d\Psi_G = -2 d\Omega_G$$

$\bar{\Psi}_G = 0$

$$\Psi_G(s) = -2(\Omega_G(s) - \bar{\Omega}_G(s))$$

valore medio

$$\bar{\Omega}_G = \frac{1}{A} \int_0^a \Omega_G(s) b(s) ds$$

$$d\Psi_G = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} ds - 2 \frac{1}{2} r_G(s) ds$$

profili aperti: qui $\tau_{zs}(s) = 0$ sulla linea media

Per i profili sottili aperti, la funzione di ingobbamento è definita dalle f. ne area settoriale

$\Psi_G(s) \rightarrow x_c, y_c$ coordinate del centro di torsione

Ω_G : area settoriale

funzione

- Profili sottili aperti formati da rettangoli sottili (caso frequente nella pratica):

smussi per assorbire concentr. di tensione

max ove max b_i

max

M_t

S_i

r_{ci}

T_{zs_i}

$b_i = \text{cost} \ll a_i$

$\ll a = \sum a_i$

$J_{xi} = \frac{1}{12} a_i b_i^3 \approx 0$

$J_{yi} = \frac{1}{12} a_i b_i^3$

trasf. per rotazione d'assi (con $J_{xi} \approx 0$)

vedi Cerchio di Mohr (delle inerzie)

$A = \sum_i a_i b_i$

$J_x = \sum_i J_{xi}$

$J_y = \sum_i J_{yi}$

$J = \sum_i J_i$

$= \sum_i \frac{1}{3} a_i b_i^3$

$J_{xi} = J_{yi} \sin^2 \alpha_i$

$J_{yi} = J_{yi} \cos^2 \alpha_i$

$J_{xy_i} = \frac{J_{yi}}{2} \sin 2\alpha_i$

$(T_{zs_i})^{\text{max}} = \frac{M_t}{J} b_i = \frac{M_{t_i}}{J_i} b_i^{\text{max}}$

- Funzione di ingobbamento: $\psi_{ci}(s_i) \sim \Omega_{ci}(s_i)$ con $r_{ci} = \text{cost}_i \forall$ tratti i lineare a tratti nelle s_i

- Profili "a stella"

particolarmente deboli a torsione

centro della stella è il centro di torsione

no ulteriori risorse portanti da ev. ingobbamento impedito (torsione per congruenza $\leftarrow$ secondaria)

$r_{ci} \neq 0$

$r_{ci} \equiv 0 \Rightarrow \Omega_{ci} \equiv 0 \Rightarrow \psi_c \equiv 0$

$\int_A \psi_c dA = 0 \checkmark$

$\int_A \psi_c x dA = 0 \checkmark$

$\int_A \psi_c y dA = 0 \checkmark$

f.ne di ingobbamento riferite al centro della stella identic. nulle

Esempio:

profilo a Γ

ingobbamento riferito al centro di torsione

$\beta \psi_c(s)$

β

M_t

G

$\frac{1}{2} ds r_{ci} = d\Omega_{ci}$