

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

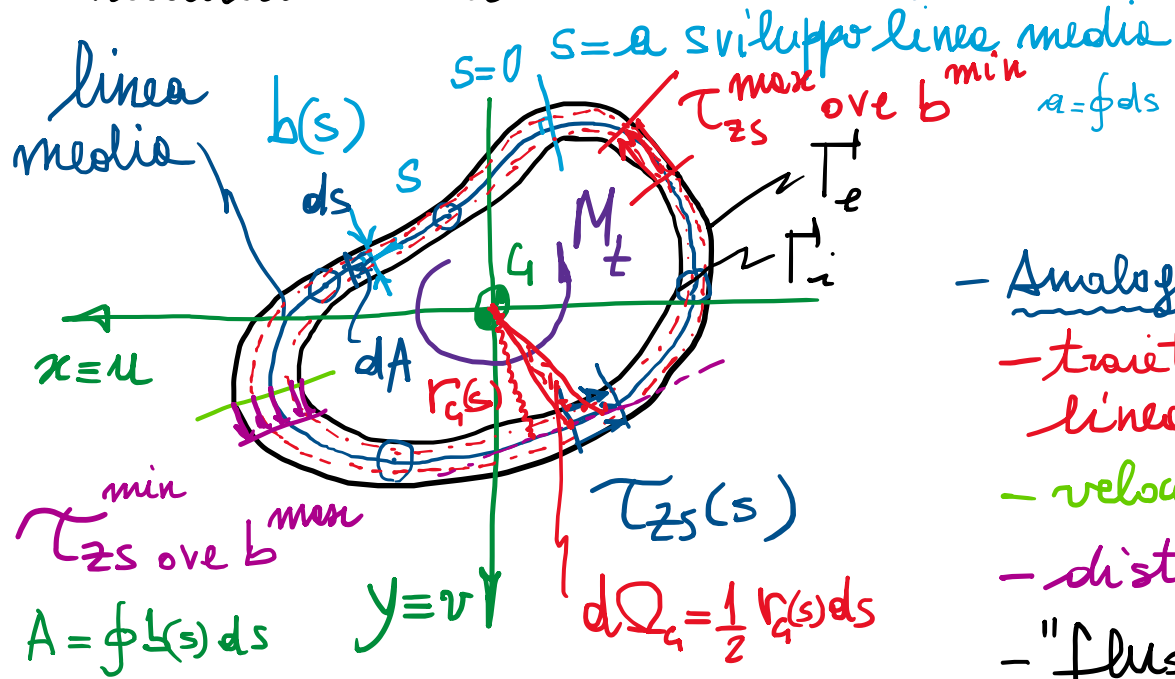
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 23

Torsione nei profili sottili chiusi (monocellulari)

biconnessi (2 tagli per separare) con continuità



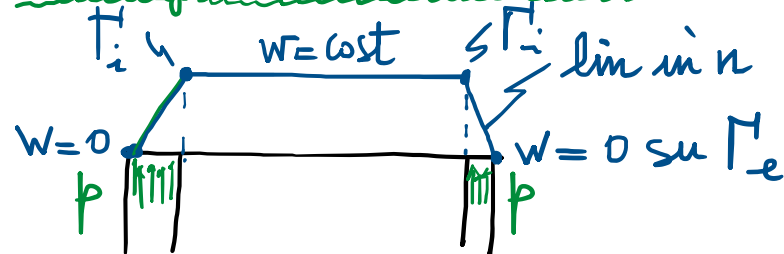
- Spessore $b(s)$ in generale variabile lungo sviluppo del profilo, rimanendo "piccolo":
 $b(s) \ll a$ $[|b'(s)| \ll 1]$ ($a > 10b$)

- Analogia idrodinamica:

- traiettorie che abbracciano l'intero profilo $\sim //$ alla linea media.
- velocità $\Rightarrow$ tens. tangenziali $\sim //$ alla l.m. $\Rightarrow \tau_{zs}$ solo
- distribuz. di velocità (τ_{zs}) cost. sullo spessore
- "flusso delle tensioni tangenziali": portata costante

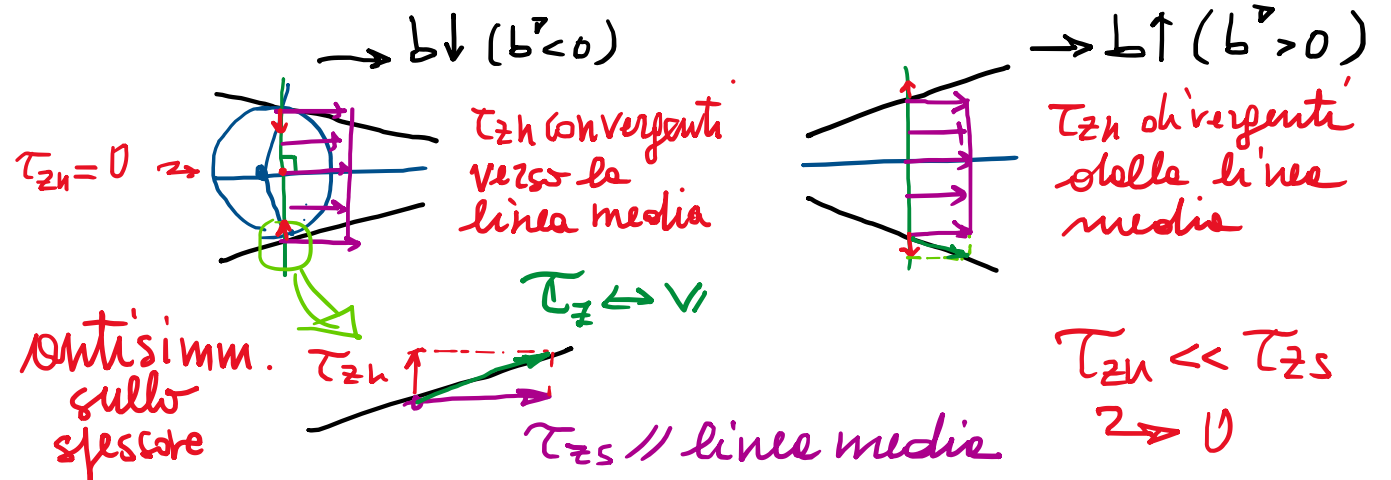
$$q(s) = \tau_{zs}(s) b(s) = q = \text{cost} \Leftrightarrow Q = VA = \text{cost}$$

- Analogia della membrana:



coerenti

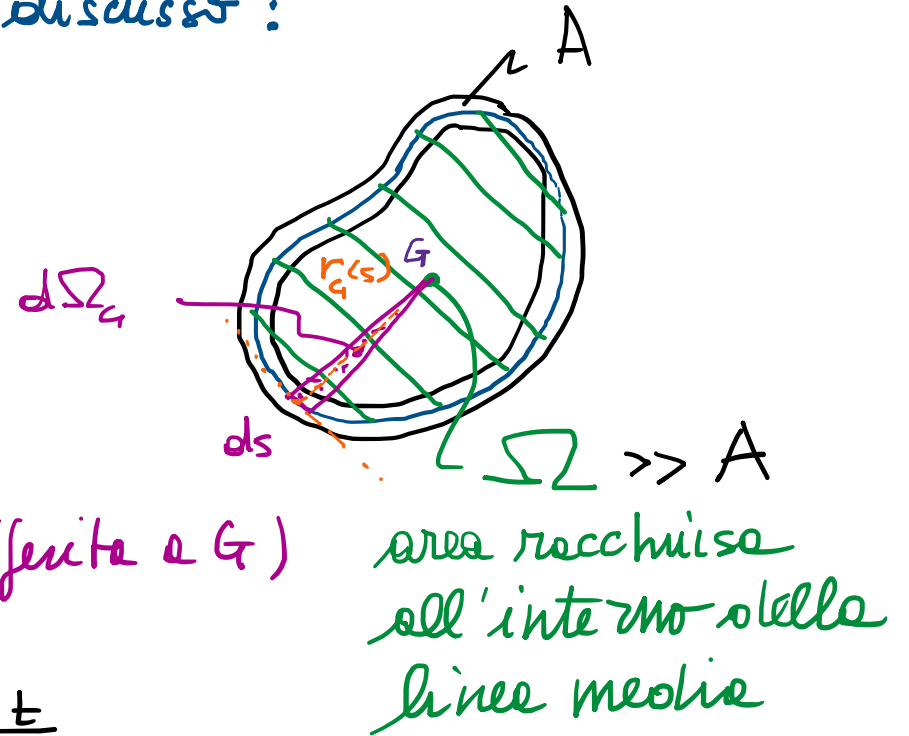
$$\begin{cases} \tau_{zs} = \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \text{cost} & \text{pendenze cost sullo spessore} \\ \tau_{zn} = -\frac{\partial \varphi}{\partial s} \approx 0 & \text{pendenze nulla in s} \end{cases}$$



- Formula di Rudolf BREDT (~ 1896): [ragionamento "isostatico"] $\rightarrow$ soluzione approssimata
- Equivalenza statica tra M_t e le $\tau_{zs}(s)$ come sopra discusso:

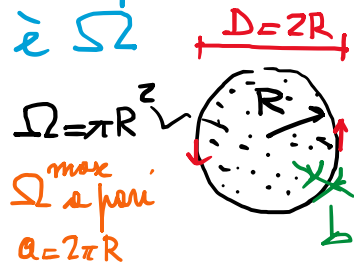
$$M_t = \oint \underbrace{\tau_{zs}(s)}_{\text{hyp: } q(s)=q=\text{cost}} \underbrace{b(s)}_{dA} ds \cdot r_G(s)$$

$$= 2q \oint \underbrace{\frac{1}{2} r_G(s) ds}_{d\Omega_G (\Omega_G(s): \text{area settoriale riferita a } G)}$$



$$M_t = 2q \Omega \Rightarrow q = \tau_{zs}(s) b(s) = \frac{M_t}{2\Omega}$$

Riguardo l'entità delle τ_{zs} , a parità di spessore, il param. geometrico cruciale è Ω



$$\Omega \rightarrow 0$$

$$\tau_{zs} \rightarrow \infty$$

(idem per J)

$$\tau_{zs} \sim \Omega^{-1}$$

$$\tau_{zs}(s) = \frac{M_t}{2\Omega b(s)}$$

Le $\tau_{zs}(s)$ risultano:

- dirett. prop. a M_t
- invers. prop. a Ω
- invers. prop. a $b(s)$

$$\tau_{zs}^{\text{max}} \text{ ove } b^{\text{min}} ; \tau_{zs}^{\text{min}} \text{ ove } b^{\text{max}}$$

- Momento d'inerzia torsionale: valutabile a valle del calcolo delle τ_{zs} via PLV

$$\frac{d\ell_e}{dz} = M_t \beta = \oint \tau_{zs} \frac{\cancel{\tau_{zs}}}{G} \overbrace{b(s)}^{dA} ds = \frac{d\ell_i}{dz}$$

$$\beta = \frac{M_t}{GJ} ; J = \frac{M_t}{G\beta}$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

$$\cancel{M_t} \frac{\cancel{M_t}}{GJ} = \oint \frac{\tau_{zs}(s)}{\cancel{G}} b(s) ds$$

$$\frac{1}{J} = \oint \frac{\cancel{M_t}^2}{(2\Omega b)^2} b(s) ds = \frac{1}{4\Omega^2} \oint \frac{ds}{b(s)} \Rightarrow$$

$$J = \frac{4\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}}$$

$$J \sim \Omega^2$$

$$= \frac{4\Omega^2 b}{a}$$

$$a = \oint ds$$

$$\frac{b}{a} \sim \frac{1}{10}$$

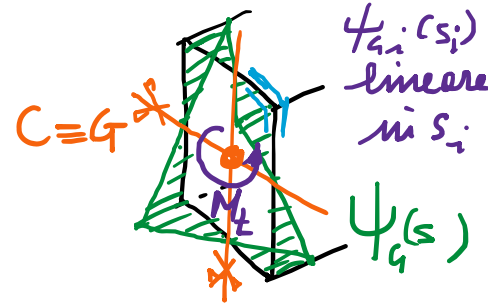
- Ingobbamento (riferito alla linea media) $\rightarrow$ Centro di torsione

$$d\psi_g = \frac{\tau_{zs}(s)}{G\beta} ds - 2d\Omega_g$$

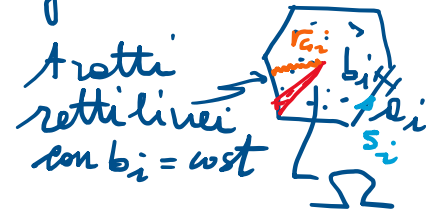
$$= \frac{J}{\cancel{M_t}} \frac{\cancel{M_t}}{2\Omega b(s)} ds - 2d\Omega_g$$

$$= \frac{2\Omega^2}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \frac{1}{2\Omega} \frac{ds}{b(s)} - 2d\Omega_g$$

ingobb. medio nullo
 $\bar{\psi}_g = 0$



Profili scatoletti:



$$= \frac{4\Omega^2}{\sum_i \frac{a_i}{b_i}}$$

$$a = \sum_i a_i$$

$$d\psi_g = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \frac{ds}{b(s)} - 2d\Omega_g \rightarrow$$

$$\psi_g(s) = \frac{2\Omega}{\oint \frac{ds}{b(s)}} \int_0^s \frac{ds}{b(s)} - 2\Omega_g(s) + \psi_g^0$$

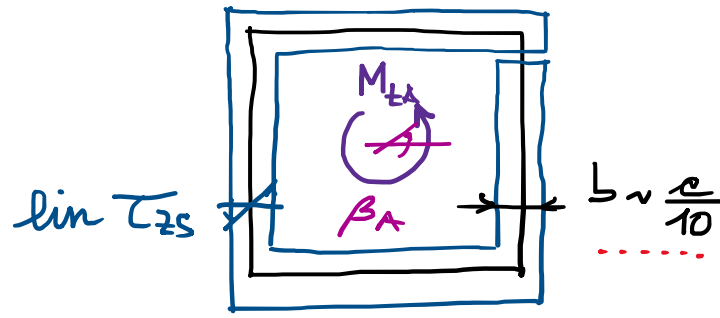
$$\begin{cases} x_c = -\frac{1}{J_x} \oint \psi_g(s) y(s) b(s) ds \\ y_c = \frac{1}{J_y} \oint \psi_g(s) x(s) b(s) ds \end{cases}$$

coordinate del C. di To.
(se $\exists$ asse di sim, $C \in$ a tale asse)

Confronto a torsione tra profilo sottile aperto e profilo sottile chiuso

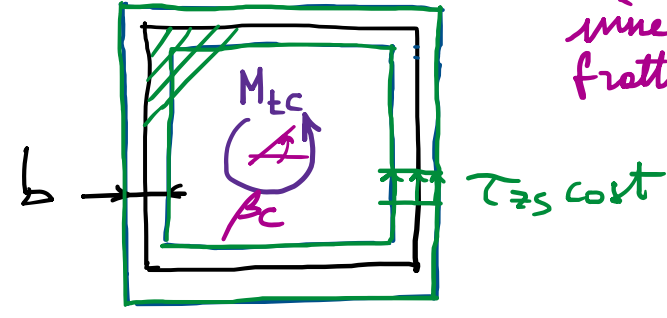
$$\beta = \frac{M_t}{GJ}$$

APERTO



the winner is...
profilo chiuso!

CHIUSO



saldatura
difettosa:
minesco di
fratture

$$\tau \cdot b = \text{cost}$$

$$J_A = \sum \frac{1}{3} b_i^3 = \frac{4}{3} c b^3 \dots \text{inerzia torsionale}$$

$$J_C = \frac{4 \Omega^2 b}{\sum \rho_i} = \frac{4 (c^2)^2 b}{4 c} = c^3 b$$

$$\tau_A = \frac{M_{tA}}{J_A} b = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{c b^2} \dots \text{tensione tangenziale}$$

$$\tau_C = \frac{M_{tC}}{2 \Omega b} = \frac{M_{tC}}{2 c^2 b}$$

$$\beta_A = \frac{M_{tA}}{G J_A} = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{G c b^3} \dots \text{"torsione"}$$

$$\beta_C = \frac{M_{tC}}{G J_C} = \frac{M_{tC}}{G c^3 b}$$

due ordini di
grandezza

$$\sim \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

Es.:

- a parità di M_t : $M_{tA} = M_{tC}$

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{2} \frac{c}{b} \sim 1.5 \cdot 10$$

$$\frac{\beta_A}{\beta_C} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sim 0.75 \cdot 100$$

- a parità di β : $\beta_A = \beta_C$

$$\frac{M_{tC}}{M_{tA}} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \sim 0.75 \cdot 100$$

Rapporti:

$$\frac{J_C}{J_A} = \frac{c^3 b}{4/3 c b^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b}\right)^2 \gg 1 \sim 0.75 \cdot 100 = 75$$

$$\frac{\tau_A}{\tau_C} = \frac{3}{4} \frac{M_{tA}}{c b^2} \cdot \frac{2 c^2 b}{M_{tC}} = \frac{M_{tA}}{M_{tC}} \frac{3}{2} \left(\frac{c}{b}\right) \sim 1.5 \cdot 10 = 15$$

$$\frac{\beta_A}{\beta_C} = \frac{M_{tA}}{M_{tC}} \frac{J_C}{J_A} = \frac{M_{tA}}{M_{tC}} \frac{3}{4} \left(\frac{c}{b}\right)^2$$

un ordine
di grandezza