

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

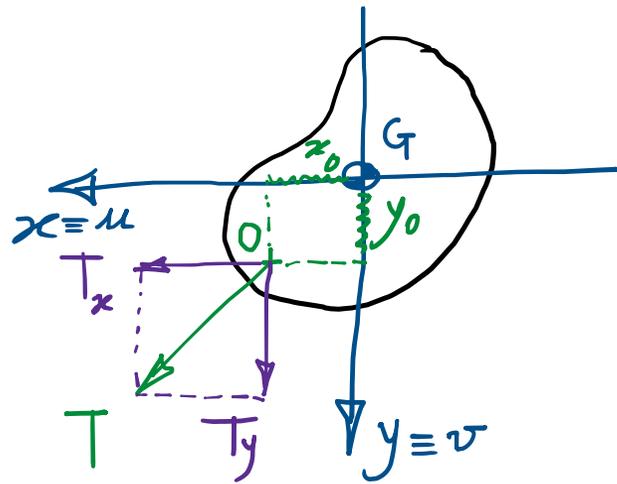
Complementi di Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Taglio e Centro di Taglio



CTa

Centro di Taglio: p.to di applicazione della forza tagliante T tale per cui si registra un'inflessione del prisma di dSV (flessione associata al taglio) senza rotazione della sezione nel suo piano (disaccoppiamento taglio/torsione).

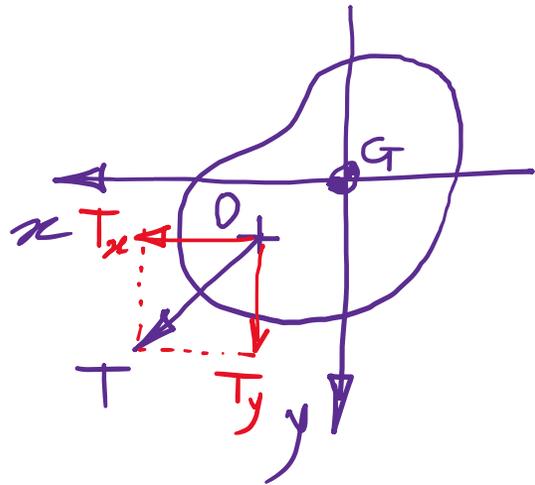
- Quindi, se $O \equiv CTA$, la sollecitazione risulta di puro taglio (flessione composta), senza effetti torcenti (cioè senza "torsione", rotazione della sezione).

- Infatti, vi è in generale presente un accoppiamento taglio/torsione, in base al punto di applicazione dell'azione tagliante T , in quanto, trasportando la forza T nel piano, restando parallela a se stessa, si genera un momento torcente di trasporto, tale da indurre effetti torcenti.

- Il CTe, pertanto, è quel punto di applicazione dell'azione tagliante T che non induce effetti torcenti sul prisma di dSV (no rotazione della sezione).

- Rotazione ("torsione") nulla: in senso "energetico", via PLV, quando sforzi taglianti e deformazioni torcenti (e viceversa), risultano energeticamente ortogonali, cioè tali da produrre lavoro interno mutuo nullo.

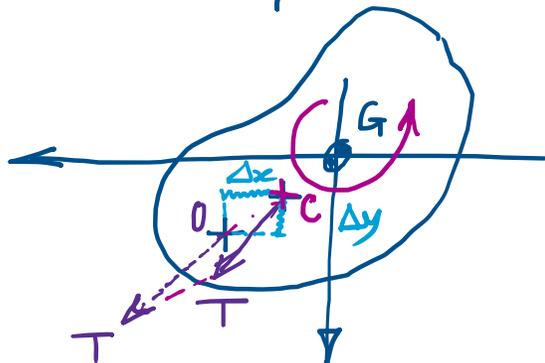
• Sistema (A) (static. ammissibile)



$$\frac{T_a}{z} = \left\{ \begin{array}{l} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{array} \right\}$$

sforzi taglianti

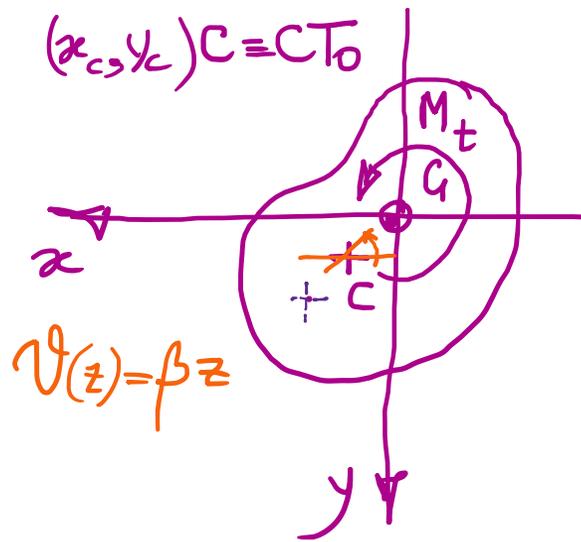
static. equiv. a:



Momento torcente di trasporto

$$T_y \underbrace{(x_0 - x_c)}_{\Delta x} - T_x \underbrace{(y_0 - y_c)}_{\Delta y}$$

• Sistema (B) (cinematic. ammissibile)



$$V(z) = \beta z$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta x = -\beta z (y - y_c) \\ \Delta y = \beta z (x - x_c) \\ \Delta z = \beta \psi_c(x, y) \\ \gamma_z = \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{zx}^{T_0} \\ \gamma_{zy}^{T_0} \end{array} \right\} \end{array} \right.$$

deformazioni taglianti

legame elast. lin. isotropo
(G: modulo di elast. tangenziale)

$$\gamma_z^{T_0} = \frac{\tau_z^{T_0}}{G}$$

PLV:

$$\frac{dL_e^{AB}}{dz} = T_x^A \cdot \cancel{\gamma_{xc}^B} + T_y^A \cdot \cancel{\gamma_{yc}^B} + \underbrace{[T_y^A \cdot (x_0 - x_c) - T_x^A \cdot (y_0 - y_c)]}_{=0 \quad \forall T_x, T_y} \cdot \beta^B = \int_A \tau_z^A \cdot \gamma_z^B dA = \frac{dL_i^{AB}}{dz} = 0$$

$$\begin{aligned} &= 0 \quad \forall T_x, T_y \\ &\Downarrow \\ &\begin{cases} x_0 = x_c \\ y_0 = y_c \end{cases} \Rightarrow \boxed{CT_a \equiv CT_0 \equiv C} \end{aligned}$$

energeticamente ortogonali

Inoltre, invertendo (A) e (B) \Rightarrow (A) \equiv Torsione; (B) \equiv Taglio

$$\frac{dL_e^{T_0 T_a}}{dz} = M_t^{T_0} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_0} \cdot \gamma_z^{T_a} dA = \frac{dL_i^{T_0 T_a}}{dz}$$

$$\beta^{T_a} = 0$$

$$\int_A \tau_z^{T_0} \cdot \frac{\tau_z^{T_a}}{G} dA = \int_A \frac{\tau_z^{T_0}}{G} \cdot \tau_z^{T_a} dA = \int_A \gamma_z^{T_0} \cdot \tau_z^{T_a} dA = 0$$

rotazione della
sezione dovuta al taglio:
nulla se T è applicata in $C \equiv CT_a \equiv CT_0$

- Determinazione di C:

- se CT_0 è noto del p.s. delle torsione, è noto anche il CT_e

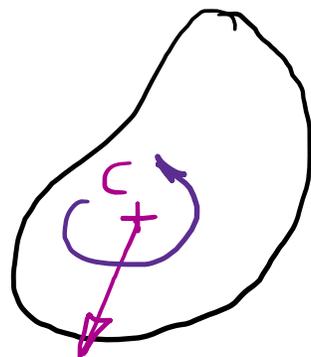
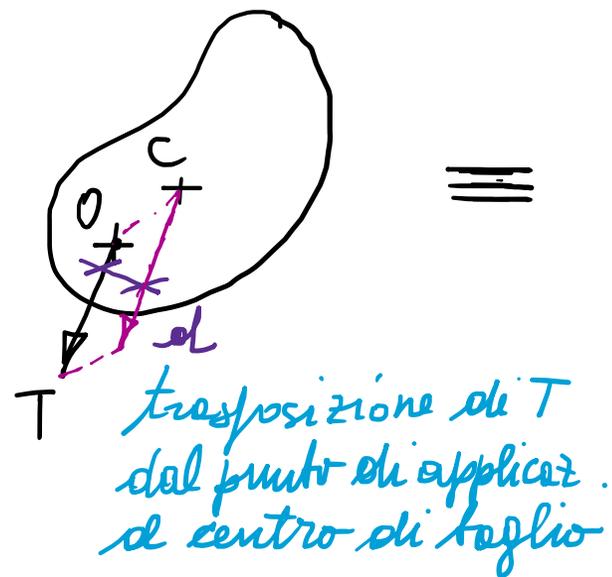
- se CT_e " " " " " taglio, " " " " CT_0

- Nota la soluz. del p.s. del taglio (in generale di difficile determinazione in forma analitica), il CT_e può essere determinato dalla seguente condizione di equivalenze statiche:

$$\int_A (\tau_{zy}^{T_e} x - \tau_{zx}^{T_e} y) dA = T_y x_c - T_x y_c \rightarrow \begin{cases} x_c & (T_x = 0, T_y = 1) \\ y_c & (T_x = 1, T_y = 0) \end{cases}$$

- Soluzioni eventualmente approssimate del p.s. del taglio e delle torsione che prevedono τ_z e χ_z energeticamente ortogonali consentiranno di determinare $CT_e \equiv CT_0 \equiv C$ in forma approssimata (C prossimo al C reale, tanto quanto la soluz. approssimata risulta vicina a quella reale).

- N.B.: se T è applicata in $O \neq C$, la trasposizione di T da O a C induce un momento torcente "parassita", da tenere in debito conto per la valutazione dello stato tenso-deformativo (con effetti che possono risultare rilevanti, per es. nel caso di profili sottili aperti, dotati di scarsa capacità portante a torsione).



momento torcente "parassita"

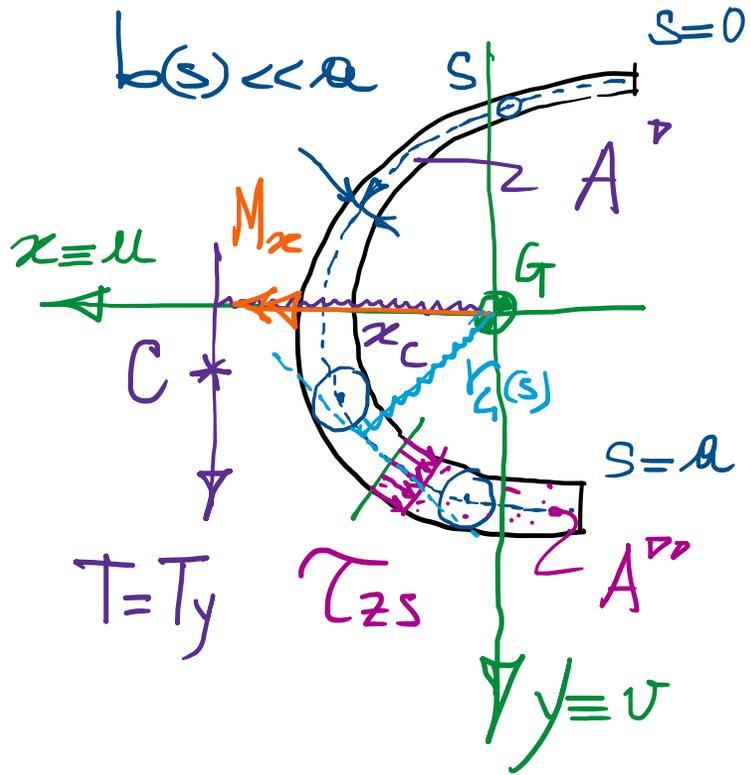
$$M_{tp} = T d \Rightarrow \text{tensioni tangenziali di torsione}$$

$T \Rightarrow$ tensioni tangenziali da taglio con T applicato nel C

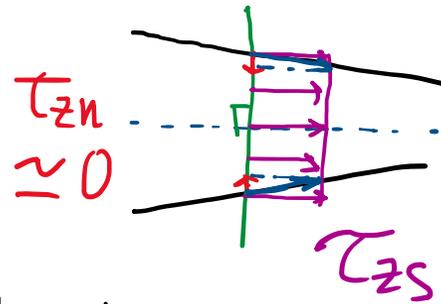
- Se \exists asse di simmetria, $C \equiv C_{Ta} \equiv C_{Tb} \in$ a tale asse

- Per sezione doppiamente simmetrica, $C \equiv G$ (p.to di intersez. dei due assi di simm.)

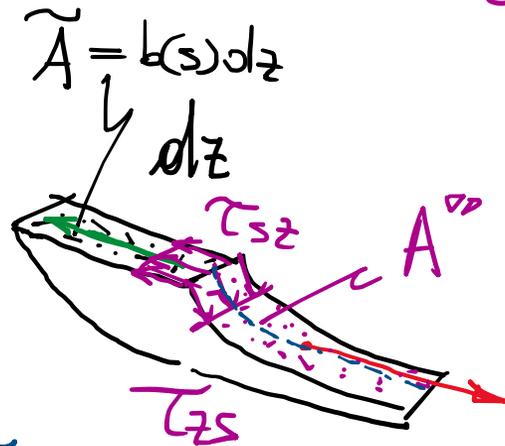
- Taglio nei profili sottili (*aperti*) [soluzione approssimata di D.J. Jourawsky] ~ 1856



- Corde di taglio \perp alla linea media del profilo sottile $\Rightarrow \tau_{zs} = \bar{\tau}_{zs} = \text{cost. sullo spessore}$



τ_{zn} (antisimm. e lineari lungo lo spessore) trascurabili a fini ingegneristici



$$dR = \int_{A''} d\sigma_{zz} dA = \int_{A''} \frac{T_y}{J_x} y dA$$

$$M = M_x = T_y \neq \Rightarrow$$

$$dM_x = T_y dz$$

flessione legata al taglio

$$\sigma_{zz} = \frac{T_y z}{J_x} y$$

formula di Navier per la flessione

equil. alla risoluzione nella direzione z

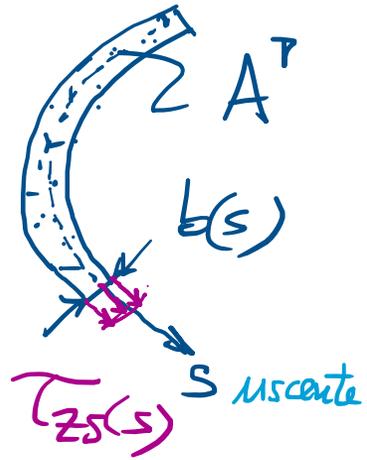
$$\int_{\tilde{A}} \tau_{sz} dndz = dR$$

$$\frac{1}{dz} \overbrace{\tau_{zs}}^{\text{valore medio}} b(s) = \frac{T_y}{J_x} \int_{A''} y dA$$

- Formule di Jourawsky: $GEx: S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x' = -S_x''$

valori medio sulla sezione

$$\hat{\tau}_{zs}(s) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Approx.}}}{=} \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y S_x''(s)}{J_x b(s)} = - \frac{T_y S_x'(s)}{J_x b(s)}$$



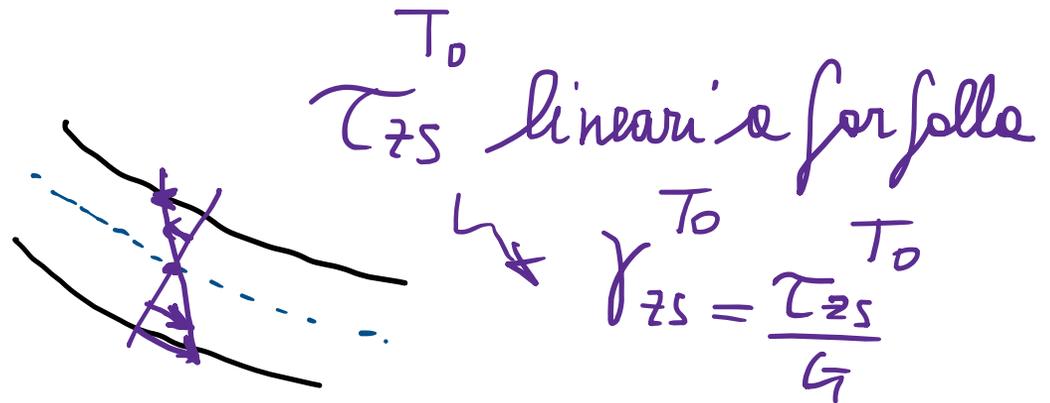
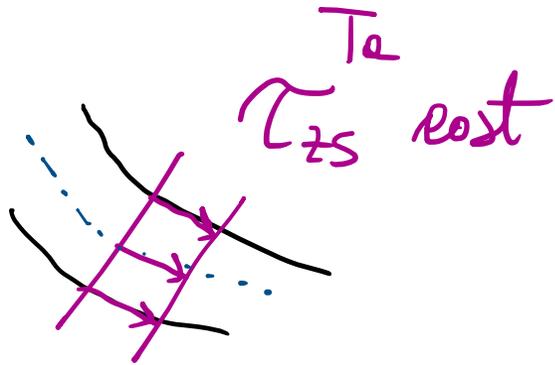
- N.B.: le $\tau_{zs}(s)$ alla J. non dipendono dal punto di applicazione di $T = T_y$; esse possono farsi riferire alle $T = T_y$ applicate nel centro di taglio. Esso risulta così determinabile dalle condizioni di equivalenza statica (rispetto a G, o a punto comodo):

$$\int_0^a \underbrace{\tau_{zs}(s)}_{\text{forza}} \underbrace{b(s)}_{\text{braccio}} ds \cdot r_g(s) = T_y x_c$$

$$\int_0^a \frac{\cancel{T_y} S_x''(s)}{J_x \cancel{b(s)}} b(s) r_g(s) ds = \cancel{T_y} x_c \quad (T_y = 1) \quad \text{CT}_x$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_c = \frac{1}{J_x} \int_0^a S_x''(s) r_g(s) ds \\ y_c = -\frac{1}{J_y} \int_0^a S_y''(s) r_g(s) ds \end{array} \right. \quad \text{prop. geom. del profilo}$$

- Infatti $\tau_{zs}^{T_0}$ alle Jourowsky, costanti sullo spessore, risultano energeticamente ortogonali e $\gamma_{zs}^{T_0} = \frac{\tau_{zs}^{T_0}}{G}$ lineari a forbice sullo spessore:



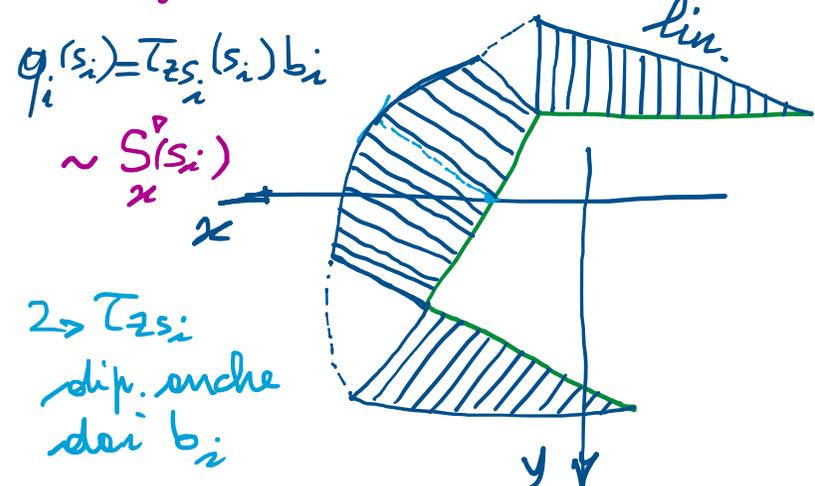
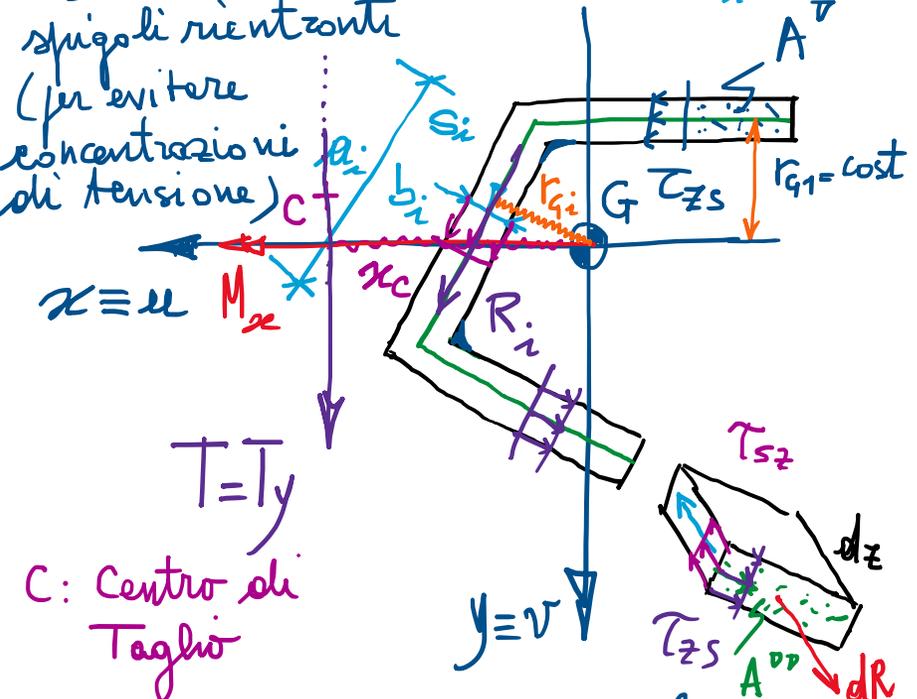
$$\frac{df_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{T_0} \gamma_{zs}^{T_0} dn ds \equiv 0$$

$\underbrace{\tau_{zs}^{T_0}}_{\frac{\tau_{zs}^{T_0}}{G}}$

Taglio in profili sottili aperti formati da rettangoli sottili ($b_i = \text{cost}$ in ogni tratto)

"smussi" in spigoli orientati (per evitare concentrazioni di tensione)

$b_i \ll a_i \ll a = \sum_i a_i$
ov/le ppo della linea media



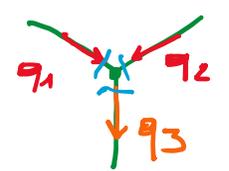
$$\tau_{zs}(s_i) = \frac{T_y S_x^v(s_i)}{J_x b_i} = - \frac{T_y S_x^v(s_i)}{J_x b_i}$$

$S_x^v(s_i)$ al più parabolico in $s_i \sim s_i^2$, in quanto $A_i \sim s_i$ e q_i di tale porzione ha distanza da x altrettanto lin. in $s_i (\sim s_i)$.

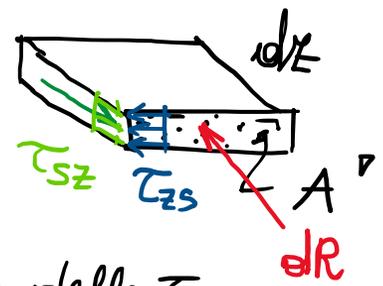
Se tratto i -esimo // all'asse x , $r_{qi} = \text{cost}$, $S_x^v(s_i) \sim s_i$ (caso particolare)

In punto ove la linea media tocchi l'asse x , si registra punto di stazionarietà di $S_x^v(s_i)$, max. rel., potenziale punto con τ_{zs}^{max} .

Bilancio di "flussi delle tensioni tangenziali", entranti/uscenti nei nodi della linea media:



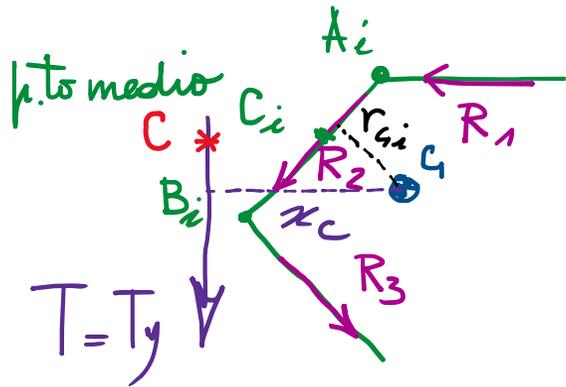
$$q_3 = q_1 + q_2 \Leftrightarrow S_{x3}^v = S_{x1}^v + S_{x2}^v$$



verso delle τ_{zs} secondo ragionamento di Jourawsky (equil. alla trasl. in direzione z)

$\rightarrow \tau_{zs}$ dip. anche dai b_i

- Per determinare il CTe, quale punto di applicazione del risultante delle tensioni tangenziali (della Jourawsky) dovute al taglio, risulta comodo valutare le risultanti R_i delle T_{zs_i} sui vari tratti:



$$R_i = \int_0^{a_i} \underbrace{T_{zs_i}(s_i)}_{q_i(s_i)} b_i ds_i = - \int_0^{a_i} \frac{T_y}{J_x} S_x(s_i) ds_i$$

$$= - \frac{T_y}{J_x} \int_0^{a_i} S_x(s_i) ds_i \quad \leftrightarrow \quad \text{forma analitica}$$

bastano tre valori dei momenti statici

$$= \frac{T_y a_i'}{6} (S_{xA_i} + 4 S_{xC_i} + S_{xB_i})$$

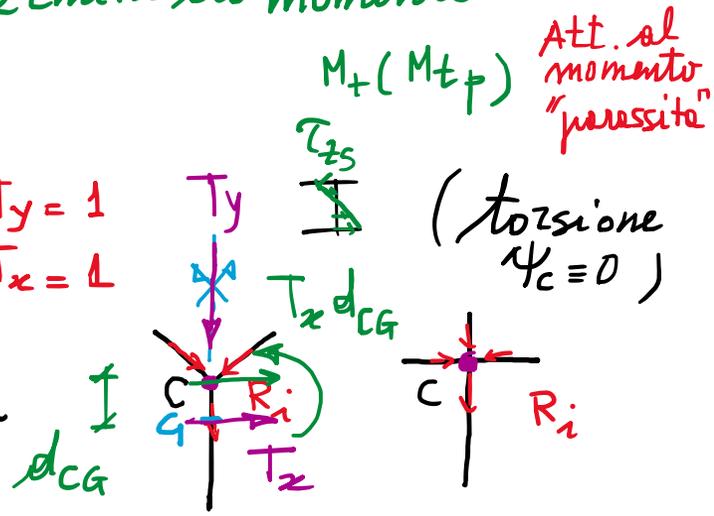
formule di Simpson (integra esattamente una parabola)

- Quindi, imporre la condizione di equivalenza statica (in termini di momento torcente) rispetto al baricentro G (o altro punto comodo):

$$T_y x_c = \sum_i R_i r_{3i} \Rightarrow x_c = \sum_i \frac{R_i}{T_y} r_{3i}$$

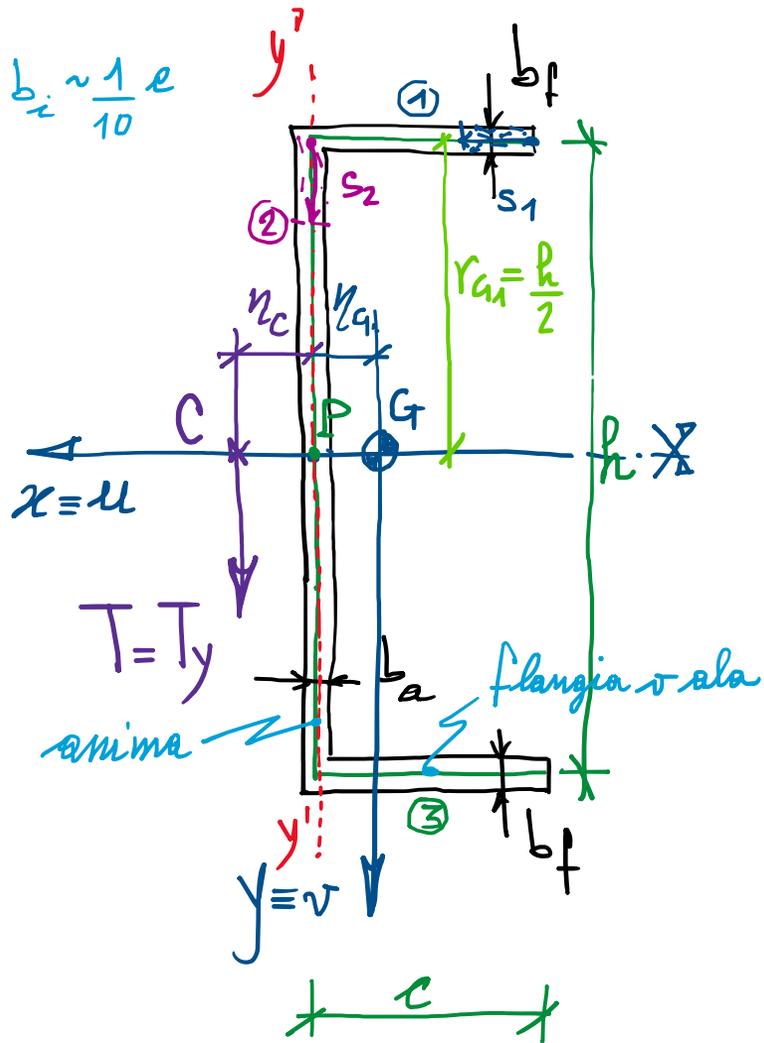
$$x_c \leftarrow T_y = 1$$

$$y_c \leftarrow T_x = 1$$



- N.B.: nei profili a stella, il CTe coincide col centro delle stelle (poiché tutte le R_i convergono in esso)

Profilo a Γ e suo CTA



$$A = 2e b_f + h b_a = b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

$$\eta_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{2e b_f \frac{e}{2}}{b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)} = \frac{e}{2 + \frac{b_a h}{b_f c}} = \eta_G$$

$b_a = b_f, h = 3c; \eta_G = \frac{c}{5}$

$$J_x = \frac{1}{12} b_a h^3 + 2 \left(\frac{1}{12} e b_f^3 + e b_f \frac{h^2}{4} \right) = \frac{b_f c h^2}{12} \left(6 + \frac{b_a h}{b_f c} \right)$$

Tensioni tangenziali τ_{zs}

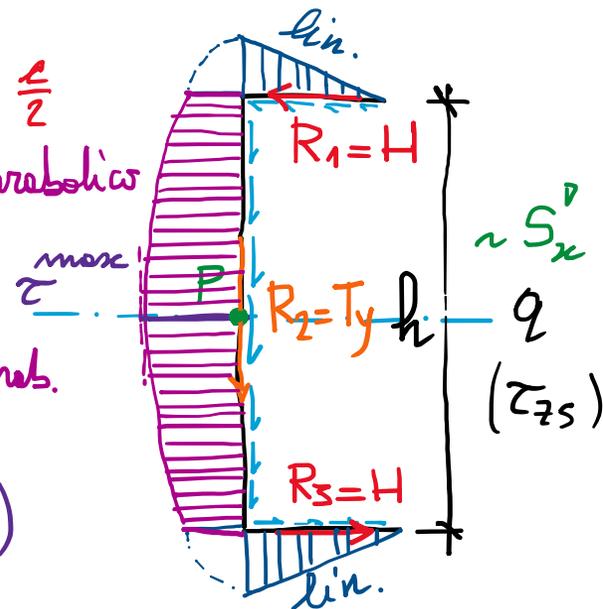
$$\textcircled{1} \tau_{zs}(s_1) = - \frac{T_y}{J_x} \frac{S_x(s_1)}{b_f}; \quad S_x(s_1) = -s_1 b_f \frac{h}{2} \text{ lin. in } s_1$$

$$\tau_{zs,1}^{\max} = \frac{T_y}{J_x} \frac{e h}{2} \quad H = \int_0^e \tau_{zs,1} b_f ds_1 = \frac{T_y}{J_x} b_f \frac{e h}{2} \frac{e}{2}$$

$$\textcircled{2} \tau_{zs}(s_2) = - \frac{T_y}{J_x} \frac{S_x(s_2)}{b_a} = \frac{T_y}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4} \text{ parabolico}$$

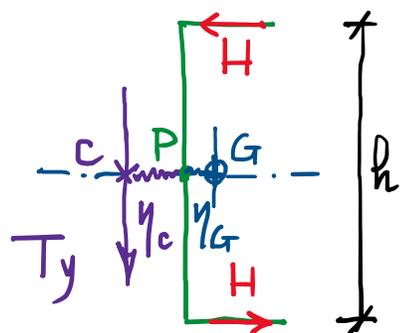
$$S_x(s_2) = e b_f \frac{h}{2} + b_a s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2} \right) \sim s_2^2 \text{ parab.}$$

$$\tau^{\max} = \tau_{zs}(s_2 = \frac{h}{2}) = \frac{T_y}{J_x} \frac{h^2}{8} \left(1 + 4 \frac{b_f c}{b_a h} \right)$$



Centro di taglio:

- Equivalenza statica rispetto a P (punto "comodo")



coppia generata dalle H

$$T_y \eta_c = H h$$

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{H}{T_y} h = \frac{1}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4} h$$

$$= 3 \frac{1}{6 + \frac{b_a h}{b_f e}} c$$

$$= \frac{1}{2 + \frac{1}{3} \frac{b_a h}{b_f e}} c > \eta_G \leftarrow \frac{c}{5}$$

es. $b_a = b_f, h = 3c \Rightarrow \eta_G = \frac{c}{5}$

$$\eta_c = \frac{3c}{4 + e/\eta_G} = \eta_G \frac{3c/\eta_G}{4 + e/\eta_G}$$

es. $\frac{c}{3} \quad \frac{c}{5}$

N.B. Casinista dell'anima verticale

$$\bar{c}_G = \eta_c + \eta_G \Rightarrow \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) c = \frac{8}{15} c$$

N.B.: per $T = T_y$ applicato in $O \neq C$ (ad es. tipicamente in G), cioè "eccentrico" rispetto al CTA, nasce, da considerare, un concomitante momento torcente parassita $M_{tp} = T_y \eta_{co}$ (es. $O \equiv G$ ecc. $\eta_{co} = \eta_c + \eta_G$)

Conclusioni sul Corso di CdSdC (da Indice delle Lezioni)

[ARCHIVIO LEZIONI ONLINE CdSdC 2021](#)

Meccanica delle Strutture

- [Lezione 01. Introduzione al corso di CdSdC. Programma. Analisi Cinematica \(AC\) e suoi approcci. Rappresentazione analitica e geometrica di atto di moto \(piano\)](#)
- [Lezione 02. Spostate e mappe di componenti di spostamento \(oriz. e vert.\). Ruolo cinematico di biella e carrello. AC geometrica. I e II Teorema sulle catene cinematiche](#)
- [Lezione 03. AC geometrica per applicazione sistematica di Th. I e II sulle catene cinematiche. Computo di doppiette, triplette e CIR. Esempi di AC geometrica](#)
- [Lezione 04. Esempi di tracciamento di spostate e mappe. AC analitica. Esempio con singolo corpo rigido. Sistema di congruenza. Sistema ridotto da schema ad albero](#)
- [Lezione 05. AC analitica di sistemi articolati. Sistema di congruenza. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione cinematica o di lability. Classificazione](#)
- [Lezione 06. Analisi Statica \(AS\) e dualità S/C. Sistema di equilibrio. Proprietà algebriche. Grado di indeterminazione statica o di iperstaticità. Classificazione delle strutture](#)
- [Lezione 07. PLV, CN di equilibrio e congruenza; PSV, CS di equil.; PFV, CS di congr. Deformazioni elementari elastiche e termiche. Dualità via PSV. Calcolo di RV/AI col PSV](#)
- [Lezione 08. Soluzione di strutture iperstatiche col PLV \(PFV\). Scrittura indiretta della condizione di congruenza tramite PLV. Calcolo di componenti di spostamento](#)
- [Lezione 09. Soluzione di strutture iperstatiche mediante metodo della Linea Elastica. Condizioni al contorno in presenza di molle assolute e relative, elongazionali e rotazionali](#)
- [Lezione 10. Travature reticolari. AC e AS \(Metodo dei nodi; Metodo delle sezioni\). Esempio di travatura reticolare isostatica, con diagonali tesi o compressi](#)
- [Lezione 11. Travatura reticolare iperstatica soggetta a dilatazione termica. Azione interne in aste curve: arco semicircolare con carico concentrato in chiave](#)
- [Lezione 12. Equazioni indefinite di equilibrio del concio di trave curvilinea. Esempio di arco semicircolare: con q uniforme; con p uniforme](#)

Meccanica dei Solidi

- [Lezione 13. Statica dei continui: sforzo, invarianti, problemi agli autovalori; equazioni indefinite di equilibrio](#)
- [Lezione 14. Cinematica dei continui: spostamento e deformazione; equazioni di congruenza](#)
- [Lezione 15. Problema elastico lineare: bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo iperelastico \(lineare; isotropo, trasversalmente isotropo, ortotropo\)](#)
- [Lezione 16. PLV in meccanica dei continui; dimostrazione \(CN di equilibrio e congruenza\). Proprietà del problema elastico lineare; unicità della soluzione \(Teorema di Kirchhoff\)](#)
- [Lezione 17. Problema di de Saint Venant: ipotesi e definizioni; approccio semi-inverso agli sforzi; sforzo normale lineare; problema differenziale nelle tensioni tangenziali](#)
- [Lezione 18. Caso di DSV della torsione. Approccio agli spostamenti: problema di Neumann-Dini per l'equazione di Laplace](#)
- [Lezione 19. Centro di torsione. Approccio agli sforzi: problema di Dirichlet per l'equazione di Poisson. Quadro sinottico dei due approcci](#)
- [Lezione 20. Analogie fisiche del problema della torsione: analogia idrodinamica; analogia della membrana](#)
- [Lezione 21. Soluzioni analitiche del problema della torsione: sezione ellittica; sezione rettangolare sottile](#)
- [Lezione 22. Torsione nei profili sottili aperti](#)
- [Lezione 23. Torsione nei profili sottili chiusi. Formula di Bredt. Confronto profilo aperto/chiuso](#)
- [Lezione 24. Taglio e centro di taglio. Taglio nei profili sottili aperti e formati da rettangoli sottili. Centro di taglio del profilo a C. Conclusioni sul corso](#)