Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Complementi di Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

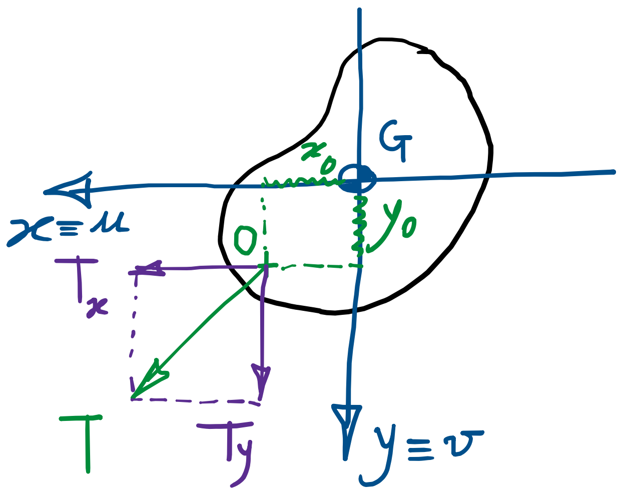
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

Taglio e Centro di Taglio



CTa

Centro di Taglio : p.to di applicazione della forza tagliante T tale per cui si registra un'inflessione del prisma di dSV (flessione associata al taglio) senza rotazione della sezione nel suo piano (disaccoppiamento taglio/torsione).

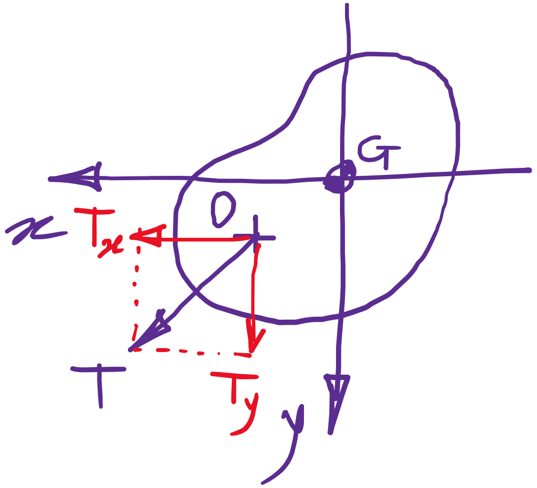
- Quindi, se $O \equiv$ CTa, la sollecitazione risulta di puro taglio (flessione composta), senza effetti torcenti (cioè senza "torsione", rotazione della sezione).

- Infatti, vi è in generale presente un accoppiamento taglio/torsione, in base al punto di applicazione dell'azione tagliante T, in quanto, trasponendo la forza T nel piano, restando parallela a se stessa, si genera un momento torcente di trasporto, tale da indurre effetti torcenti.

- Il CTa, pertanto, è quel punto di applicazione dell'azione tagliante T che non induce effetti torcenti sul prisma di dSV (no rotazione della sezione).

– Rotazione ("torsione") nulla: in senso "energetico", via PLV, quando sforzi taglianti e deformazioni torcenti (e viceversa), risultano energeticamente ortogonali, cioè tali da produrre lavoro interno mutuo nullo.

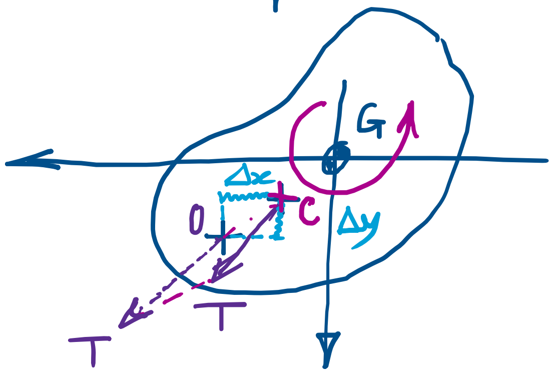
• Sistema (A) (static. ammissibile)



$$\tau_z^{Ta} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx}^{Ta} \\ \tau_{zy}^{Ta} \end{Bmatrix}$$

sforzi taglianti

static. equiv. a:

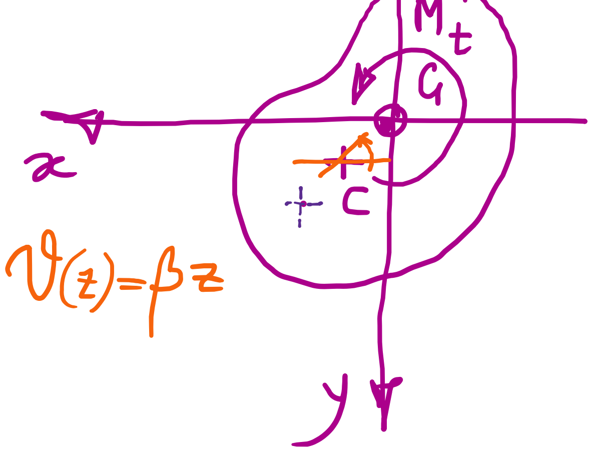


Momento torcente di trasporto

$$T_y(\underbrace{x_0-x_c}_{\Delta x}) - T_x(\underbrace{y_0-y_c}_{\Delta y})$$

• Sistema (B) (cinemat. ammissibile)

$(x_c, y_c)\ C = CT_0$



$\vartheta(z) = \beta z$

$$\begin{cases} s_x^{T_0} = -\beta z (y - y_c) \\ s_y = \beta z (x - x_c) \\ s_z = \beta \psi_c(x, y) \end{cases}$$

$$\gamma_z^{T_0} = \begin{Bmatrix} \gamma_{zx}^{T_0} \\ \gamma_{zy}^{T_0} \end{Bmatrix}$$

deformazioni taglianti

legame elast. lin. isotropo $\qquad \gamma_z^{T_0} = \dfrac{\tau_z^{T_0}}{G}$

(G: modulo di elast. tangenziale)

PLV:

$$\frac{dL_e^{AB}}{dz} = T_x^A \cdot \cancel{\eta_{xc}^B} + T_y^A \cdot \cancel{\eta_{yc}^B} + \underbrace{\left[T_y\cdot(x_0-x_c) - T_x\cdot(y_0-y_c)\right]}_{=0\ \forall T_x, T_y} \cdot \beta^B = \int_A \tau_z^A \cdot \gamma_z^B \, dA = \frac{dL_i^{AB}}{dz} = 0 \qquad \forall \beta^B$$

$T_a \to \tau_z^A$, $T_0 \to \gamma_z^B$

energeticamente ortogonali

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases} x_0 = x_c \\ y_0 = y_c \end{cases} \Rightarrow \boxed{CT_a \equiv CT_0 \equiv C}$$

Inoltre, invertendo A e B => A ≡ Torsione ; B ≡ Taglio

$$\frac{dL_e^{T_0 T_a}}{dz} = M_t^{T_0} \cdot \beta^{T_a} = \int_A \tau_z^{T_0} \cdot \gamma_z^{T_a} \, dA = \frac{dL_i^{T_0 T_a}}{dz}$$

$$\beta^{T_a} = 0$$

rotazione della sezione dovuta al taglio: nulla se T è applicato in $C \equiv CT_a \equiv CT_0$

$$\int_A \tau_z^{T_0} \cdot \frac{\tau_z^{T_a}}{G} \, dA = \int_A \frac{\tau_z^{T_0}}{G} \cdot \tau_z^{T_a} \, dA = \int_A \gamma_z^{T_0} \cdot \tau_z^{T_a} \, dA = 0$$

– Determinazione di C:

– se CT_0 è noto dal pb. della torsione, è noto anche il CT_a

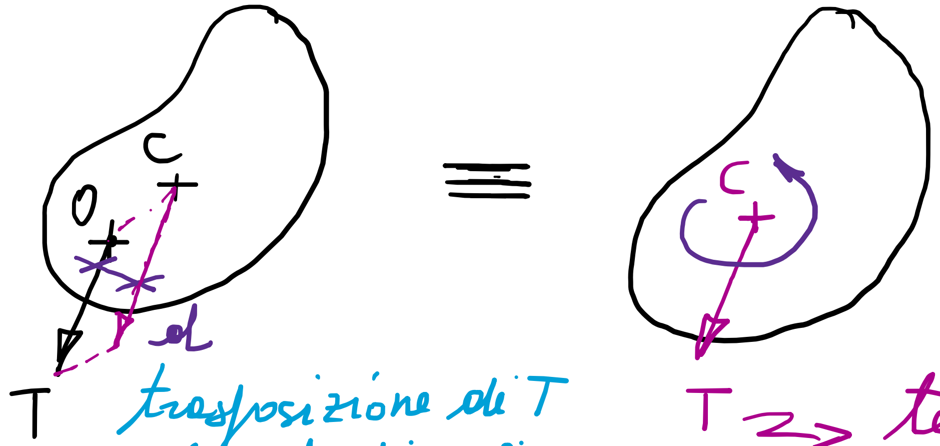
– se CT_a " " " " " taglio, " " " " CT_0

- Nota la soluz. del pb. del taglio (in generale di difficile determinazione in forma analitica), il CT_a può essere determinato dalla seguente condizione di equivalenza statica:

$$\int_A \left(\tau_{zy}^{T_a} x - \tau_{zx}^{T_a} y\right) dA = T_y x_c - T_x y_c \Rightarrow \begin{cases} x_c & (T_x = 0,\ T_y = 1) \\ y_c & (T_x = 1,\ T_y = 0) \end{cases}$$

– Soluzioni eventualmente approssimate del pb. del taglio e della torsione che prevedono τ_z e γ_z energeticamente ortogonali consentiranno di determinare $CT_a \equiv CT_0 \equiv C$ in forma approssimata (C prossimo al C reale, tanto quanto la soluz. approssimata risulta vicina a quella reale).

- N.B.: se T è applicato in $O \neq C$, la trasposizione di T da O a C induce un momento torcente "parassita", da tenere in debito conto per la valutazione dello stato tenso-deformativo (con effetti che possono risultare rilevanti, per es. nel caso di profili sottili aperti, dotati di scarsa capacità portante a torsione).



trasposizione di T dal punto di applicaz. al centro di taglio

momento torcente "parassita"

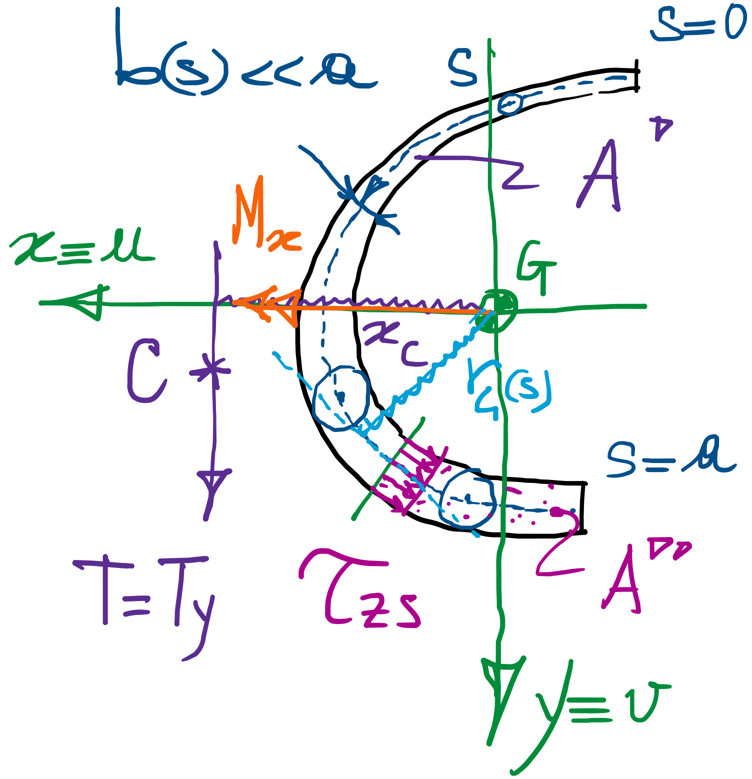
$M_{tp} = T d^{OC} \Rightarrow$ tensioni tangenziali da torsione

$T \Rightarrow$ tensioni tangenziali da taglio con T applicato nel CT_a

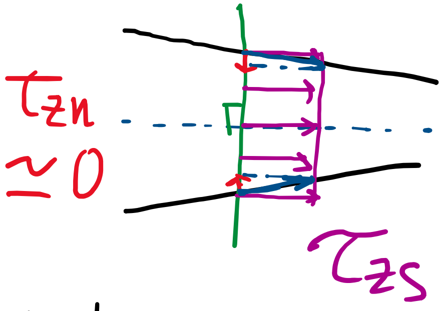
- Se $\exists$ asse di simmetria, $C \equiv CT_a \equiv CT_o \in$ a tale asse

- Per sezione doppiamente simmetrica, $C \equiv G$ (p.to di intersez. dei due assi di simm.)

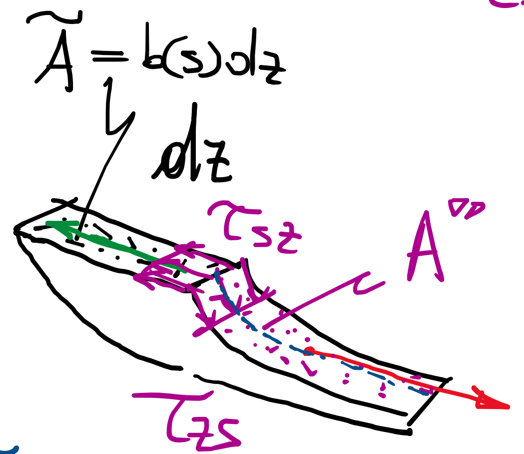
• Taglio nei profili sottili (aperti) [soluzione approssimata di D.J. Jourawsky] ~ 1856



• Corda di taglio $\perp$ alla linea media del profilo sottile $\Rightarrow$ $\tau_{zs} = \overline{\tau}_{zs} =$ cost. sullo spessore



τ_{zn} (antisimm. e lineari lungo lo spessore) trascurabili a fini ingegneristici



$$M = M_x = T_y z \Rightarrow$$

$$dM_x = T_y\,dz \qquad \sigma_{zz} = \frac{T_y z}{J_x} y$$

flessione legata al taglio

formula di Navier per la flessione

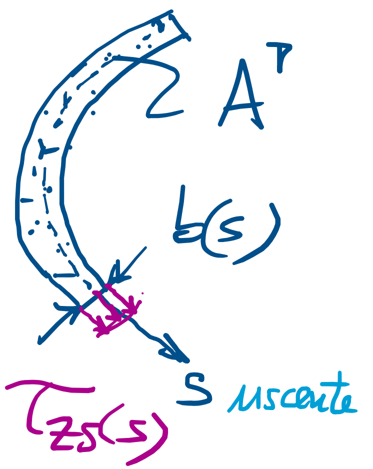
$$dR = \int_{A''} d\sigma_{zz}\,dA = \int_{A''} \frac{T_y\,dz}{J_x} y\,dA$$

equil. alla traslazione nella direzione z

$$\int_{\tilde{A}} \tau_{sz}\,dn\,dz = dR$$

$$\cancel{dz}\,\overset{\text{valor medio}}{\overline{\tau}_{zs}}\,b(s) = \frac{T_y\,\cancel{dz}}{J_x} \overbrace{\int_{A''} y\,dA}^{S_x''}$$

- Formule di Jourawsky :   GEx: $S_x = S_x' + S_x'' = 0 \Rightarrow S_x' = -S_x''$



valor medio sulla corda

$$\tau_{zs}(s) \underset{\text{Approx.}}{=} \bar{\tau}_{zs} = \frac{T_y\, S_x''(s)}{J_x\, b(s)} = -\frac{T_y\, S_x'(s)}{J_x\, b(s)}$$

- N.B.: le $\tau_{zs}(s)$ alla J. non dipendono dal punto di applicazione di $T=T_y$; esse possono farsi riferire alla $T=T_y$ applicata nel Centro di Taglio. Esso risulta così determinabile dalla condizione di equivalenza statica (rispetto a G, o a punto comodo):

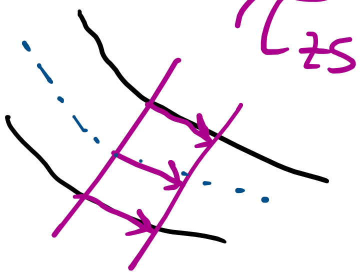
$$\int_0^a \underbrace{\tau_{zs}(s)\, b(s)\, ds}_{\text{forze}} \cdot \underbrace{r_G(s)}_{\text{braccio}} = T_y\, x_c \qquad (T_y = 1)$$

$$\int_0^a \frac{\cancel{T_y}\, S_x''(s)}{J_x\, \cancel{b(s)}}\, \cancel{b(s)}\, r_G(s)\, ds = \cancel{T_y}\, x_c$$

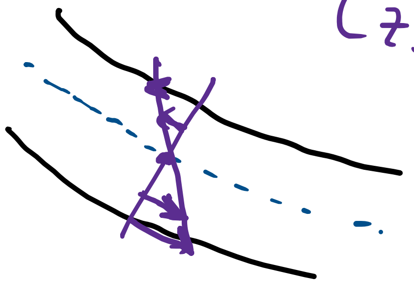
$$CT_a \begin{cases} x_c = \dfrac{1}{J_x} \displaystyle\int_0^a S_x''(s)\, r_G(s)\, ds \\ y_c = -\dfrac{1}{J_y} \displaystyle\int_0^a S_y''(s)\, r_G(s)\, ds \end{cases} \quad (T_x = 1)$$

propr. geom. del profilo

– Infatti $\tau_{zs}^{Ta}(s)$ alla Jourawsky, costanti sullo spessore, risultano energeticamente ortogonali e $\gamma_{zs}^{To}(s) = \dfrac{\tau_{zs}^{To}(s)}{G}$ lineari a farfalla sullo spessore:



τ_{zs}^{Ta} cost



τ_{zs}^{To} lineari a farfalla

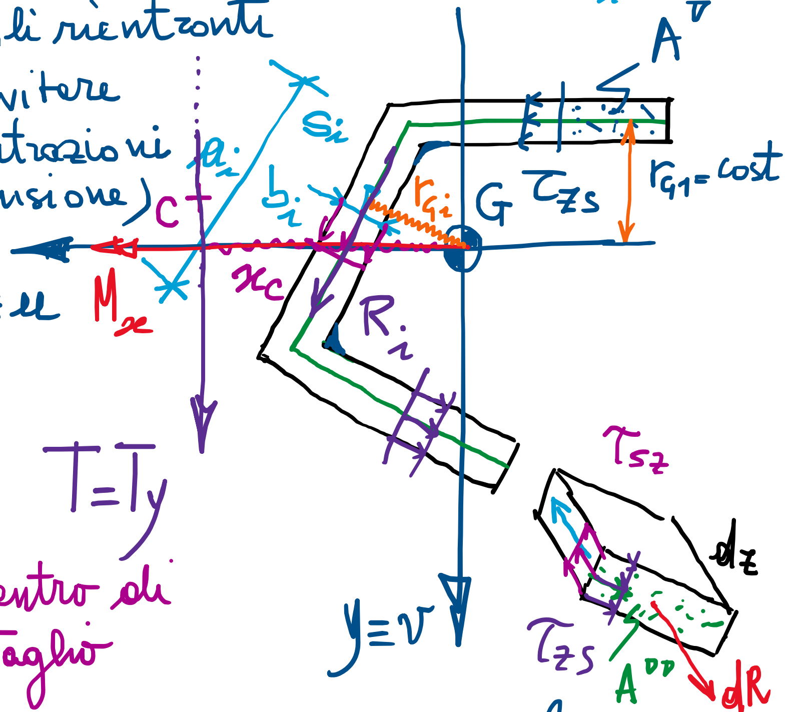
↳ $\gamma_{zs}^{To} = \dfrac{\tau_{zs}^{To}}{G}$

$$\frac{d\mathcal{L}_i}{dz} = \int_0^a \int_{-b/2}^{b/2} \tau_{zs}^{Ta} \underbrace{\gamma_{zs}^{To}}_{\frac{\tau_{zs}^{To}}{G}} \, dn \, ds \equiv 0$$

Taglio in profili sottili aperti formati da rettangoli sottili ($b_i = \text{cost}$ in ogni tratto)

"smussi" in spigoli rientranti (per evitare concentrazioni di tensione)

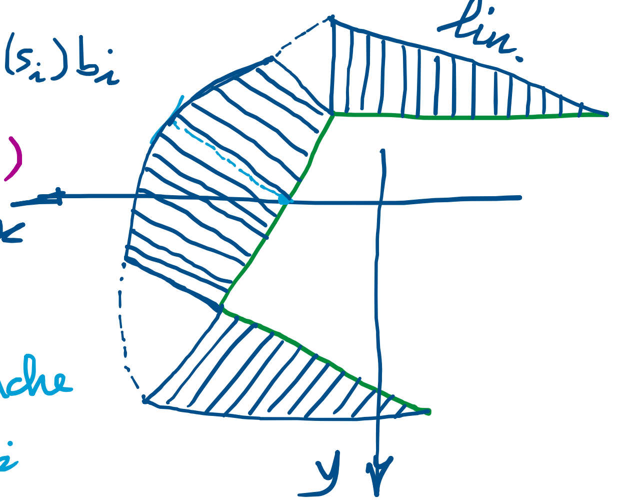
$b_i \ll a_i \ll a = \sum_i a_i$ sviluppo della linea media



$T = T_y$

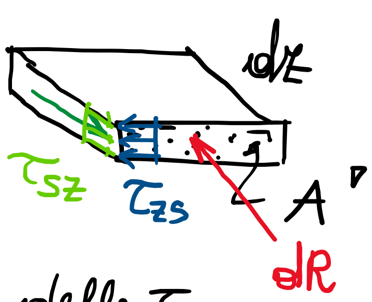
C: Centro di Taglio

$q_i(s_i) = \tau_{zs_i}(s_i)\, b_i \sim S_x^\triangledown(s_i)$



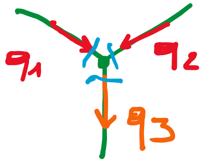
2> τ_{zs_i} dip. anche dai b_i

• $$\tau_{zs_i}(s_i) = \frac{T_y\, S_x^{\triangledown\triangledown}(s_i)}{J_x\, b_i} = -\frac{T_y\, S_x^{\triangledown}(s_i)}{J_x\, b_i}$$



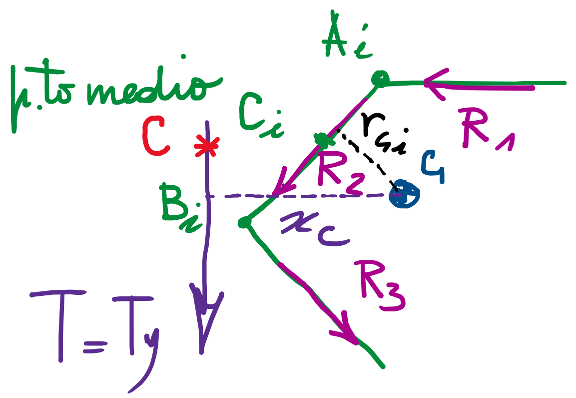
verso delle τ_{zs} secondo ragionamento di Jourawsky (equil. alla trasl. in direzione z)

- $S_x^\triangledown(s_i)$ al più parabolico in $s_i \sim s_i^2$, in quanto $A_i^\triangledown \sim s_i$ e $G_i^\triangledown$ di tale porzione ha distanza da x altrettanto lin. in s_i ($\sim s_i$).
- Se tratto i-esimo // all'asse x, $r_{G_i} = \text{cost}$, $S_x^\triangledown(s_i) \sim s_i$ lin. (caso particolare)
- In punto ove la linea media tocchi l'asse x, si registra punto di stazionarietà di $S_{x_i}^\triangledown(s_i)$, max. rel., potenziale punto con $\tau_{zs_i}^{max}$.
- Bilancio di "flussi delle tensioni tangenziali", entranti/uscenti nei nodi della linea media:



$$q_3 = q_1 + q_2 \iff S_{x3}^\triangledown = S_{x1}^\triangledown + S_{x2}^\triangledown$$

– Per determinare il CT_a, quale punto di applicazione del risultante delle tensioni tangenziali (alla Jourawsky) dovute al taglio, risulta comodo valutare le risultanti R_i delle τ_{zs_i} sui vari tratti:



$$R_i = \int_0^{a_i} \underbrace{\tau_{zs_i}(s_i)\, b_i}_{q_i(s_i)}\, ds_i = -\int_0^{a_i} \boxed{\frac{T_y}{J_x}}\, S_x^*(s_i)\, ds_i$$

$$= -\frac{T_y}{J_x} \underbrace{\int_0^{a_i} S_x^*(s_i)\, ds_i}_{\text{formula di Simpson}} \longleftrightarrow \text{forma analitica}$$

bastano tre valori dei momenti statici

$$= \frac{a_i}{6}\left(S^*_{xA_i} + 4\,S^*_{xC_i} + S^*_{xB_i}\right)$$

(integra esattamente una parabola)

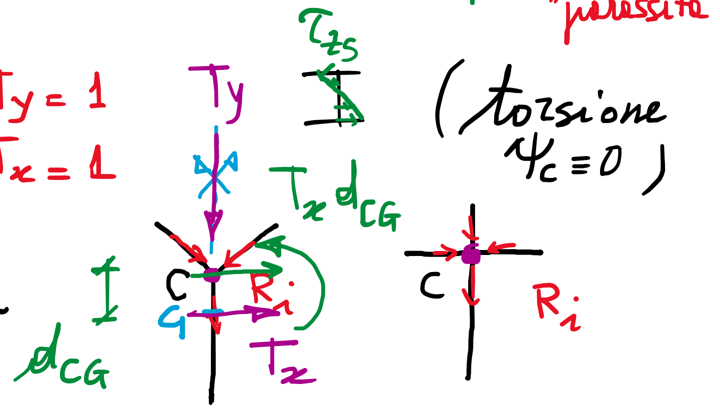
– Quindi, imporre la condizione di equivalenza statica (in termini di momento torcente) rispetto al baricentro G (o altro punto comodo):

$$T_y\, x_C = \sum_i R_i\, r_{G_i} \Rightarrow \boxed{x_C = \sum_i \frac{R_i}{T_y}\, r_{G_i}}$$

$x_c \leftarrow T_y = 1$

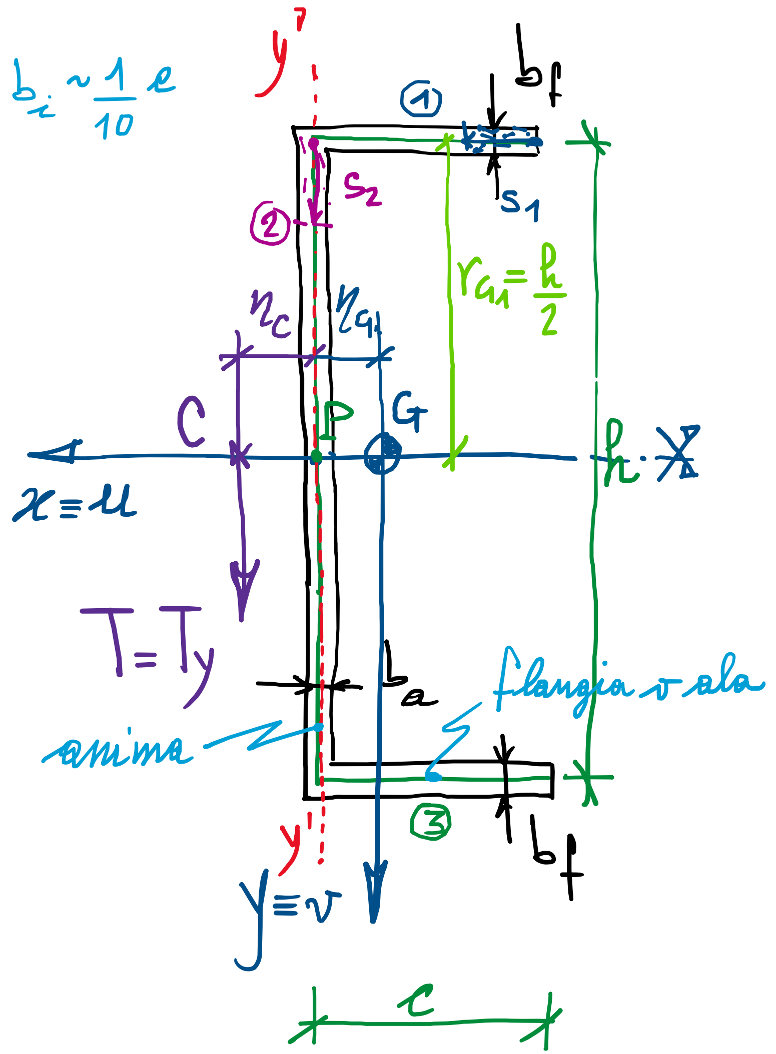
$y_c \leftarrow T_x = 1$

$M_t\ (M_{tp})$ Att. al momento "parassita"



– N.B.: nei profili a stella, il CT_a coincide col centro della stella (poiché tutte le R_i convergono in esso)

Profilo a [e suo CTa



- $A = 2 c b_f + h b_a = b_f c \left(2 + \frac{b_a h}{b_f c}\right)$

$b_a = b_f,\ h = 3c;\ \eta_G = \frac{c}{5}$

- $\eta_G = \frac{S_{y'}}{A} = \frac{\cancel{2} c b_f \frac{c}{\cancel{2}}}{A} = \frac{\cancel{b_f} c^{\cancel{2}}}{\cancel{b_f}\,\cancel{c}\left(2 + \frac{b_a h}{b_f c}\right)} = \boxed{\frac{c}{2 + \frac{b_a h}{b_f c}} = \eta_G}$

- $J_x = \frac{1}{12} b_a h^3 + 2\left(\cancel{\frac{1}{12} c b_f^3} + c b_f \frac{h^2}{4}\right) = \frac{b_f c h^2}{12}\left(6 + \frac{b_a h}{b_f c}\right)$

Tensioni tangenziali $\tau_{zs_i}^J$

(1) $\tau_{zs}(s_1) = -\frac{T_y\, S_x^{\nabla}(s_1)}{J_x\, b_f}$; $S_x^{\nabla}(s_1) = -s_1 b_f \frac{h}{2}$ lin. in s_1

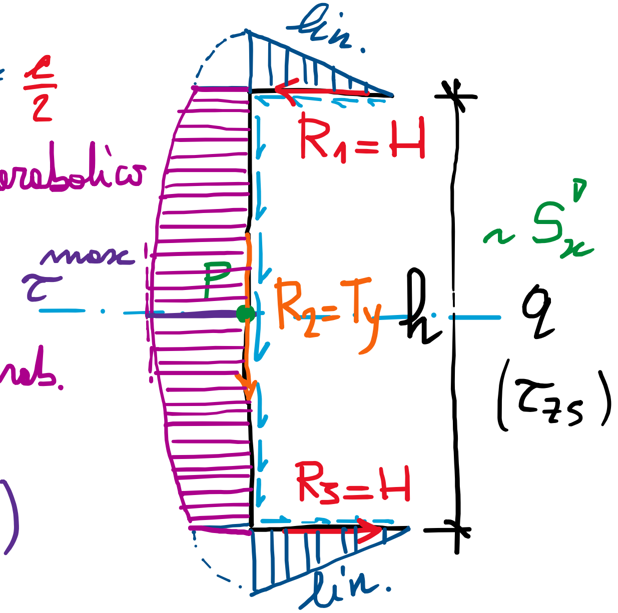
$\tau_{zs_1}^{max} = \frac{T_y}{J_x} \frac{c h}{2}$

$H = \int_0^c \tau_{zs_1} b_f \, ds_1 = \frac{T_y}{J_x} b_f \frac{c h}{2} \frac{c}{2} = \frac{T_y}{J_x} \frac{b_f h c^2}{4}$

(2) $\tau_{zs}(s_2) = -\frac{T_y\, S_x^{\nabla}(s_2)}{J_x\, b_a}$

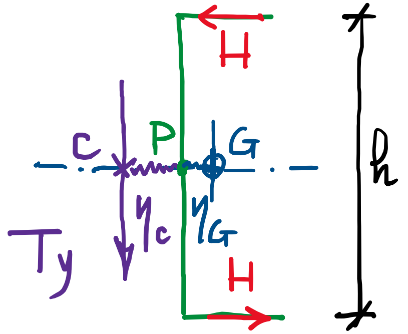
$S_x^{\nabla}(s_2) = c b_f \frac{h}{2} + b_a s_2 \left(\frac{h}{2} - \frac{s_2}{2}\right) \sim s_2^2$ parab.

$\tau^{max} = \tau_{zs}\left(s_2 = \frac{h}{2}\right) = \frac{T_y}{J_x} \frac{h^2}{8}\left(1 + 4 \frac{b_f c}{b_a h}\right)$



Centro di taglio:

– Equivalenza statica rispetto a P (punto "comodo")



es. $\frac{e}{3}$ $\frac{e}{5}$

$\overline{CG} = \eta_c + \eta_G \Rightarrow \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\right) e = \frac{8}{15} e$

coppia generata dalle H

$$\boxed{T_y\,\eta_c = H h}$$

N.B. C a sinistra dell'anima verticale

$$\Rightarrow \eta_c = \frac{H}{T_y} h = \frac{1}{J_x}\frac{b_f h c^2}{4} h$$

$$= 3\,\frac{1}{6+\frac{b_a h}{b_f e}}\,e$$

$$= \frac{1}{2+\frac{1}{3}\frac{b_a h}{b_f e}}\,e > \eta_G \Leftarrow \frac{e}{5}$$

es. $b_a = b_f$; $h = 3e$; $\eta_G = \frac{e}{3}$

$$\eta_c = \frac{3c}{4+e/\eta_G} = \eta_G\,\frac{3c/\eta_G}{4+e/\eta_G}$$

N.B.: per $T = T_y$ applicato in $O \neq C$
(ad es. tipicamente in G), cioè
"eccentrico" rispetto al CTa,
nasce, da considerare, un concomitante
momento torcente parassita $M_{tp} = T_y\,\eta_{CO}$
(es. $O \equiv G$ ecc. $\eta_{CG} = \eta_c + \eta_G$)

Conclusioni sul Corso di CdSdC (da Indice delle Lezioni)

ARCHIVIO LEZIONI ONLINE CdSdC 2021

Meccanica delle Strutture

Meccanica dei Solidi