

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI BERGAMO

SCUOLA DI INGEGNERIA (DALMINE)

ANNO ACCADEMICO 2014/2015

INSEGNAMENTO: DINAMICA, INSTABILITÀ E ANELASTICITÀ DELLE STRUTTURE (9 CFU)  
*DYNAMICS, INSTABILITY AND ANELASTICITY OF STRUCTURES*

CORSO DI LAUREA MAGISTRALE: INGEGNERIA EDILE

DOCENTE: PROF. EGIDIO RIZZI

## INDICE DELLE LEZIONI

DATA	N. ORE	ARGOMENTO	N. ORE PROGR.
24/02/15 Lez. 01	1	Introduzione al corso. Le tematiche della dinamica, dell'instabilità e dell'anelasticità delle strutture.	01
"	1	Esempi di sistemi meccanici inerenti. Concetti e caratteristiche fondamentali. Parti e programma indicativo del corso. Modalità d'esame.	02
"	1	Illustrazione delle tematiche integrate con riferimento ad esempio esplicativo ad 1 gdl: scrittura dell'equazione del moto. Criterio di stabilità dinamica secondo Liapunov, nozione di carico critico $P^{cr}$ , risposta armonica per $P < P^{cr}$ , risposte divergenti per $P \geq P^{cr}$ .	03
25/02/15 Lez. 02	1	<b>PARTE I – DINAMICA.</b>  Dinamica dei sistemi ad 1 gdl. Oscillatore semplice. Molla elastica lineare: costante di rigidezza, energia elastica. Smorzatore viscoso lineare: coefficiente di smorzamento, funzione di dissipazione. Scrittura dell'equazione del moto tramite equazione di equilibrio dinamico (principio di d'Alembert). Condizioni iniziali. Scrittura dell'equazione del moto tramite equazioni di Lagrange. Teorema dell'energia cinetica.	04
"	1	Esempi di sistemi strutturali reali da associare all'oscillatore semplice. Determinazione della costante elastica k. Telaio shear-type. Fattore di rigidezza trave/colonna. Portale ad 1 gdl con travi flessibili e delimitazioni sulla costante elastica.	05
27/02/15 Lez. 03	1	Oscillazioni libere non smorzate. Equazione dei moti armonici. Pulsazione propria. Derivazione dell'integrale generale in forma esponenziale e in termini di seno e coseno. Imposizione delle condizioni iniziali.	06
"	1	Rappresentazione grafica della risposta armonica. Periodo proprio e frequenza propria. Espressione e rappresentazione in termini di ampiezza e fase dell'oscillazione. Sfasamento in ritardo o in anticipo.	07

"	1	Interpretazione del moto armonico secondo il moto di vettori rotanti nel piano di Argand. Ampiezza di spostamento, velocità ed accelerazione.	08
04/03/15 Lez. 04	1	Oscillazioni libere smorzate. Coefficiente di smorzamento e fattore di smorzamento (relativo al critico). Soluzione dell'equazione caratteristica. Casistica delle radici per smorzamento subcritico, critico e supercritico. Caso subcritico. Integrale generale. Imposizione delle condizioni iniziali. Moto armonico periodico di ampiezza smorzata esponenzialmente e moto oscillatorio aperiodico risultante. Rappresentazione grafica del moto oscillatorio.	09
"	1	Decremento logaritmico e stima del fattore di smorzamento. Casi critico e supercritico: integrale generale, risposta non oscillatoria aperiodica.	10
06/03/15 Lez. 05	1	Risposta (non smorzata) a forzante armonica. Rilevanza pratica e concettuale. Integrale particolare. Rapporto di frequenze. Fattore di amplificazione dinamica e angolo di fase. Risposta in fase o in opposizione di fase. Condizione di risonanza.	11
"	1	Integrale generale e imposizione delle c.i. Rappresentazione grafica della risposta. Componenti di risposta alle sole c.i. e alla forzante per c.i. omogenee.	12
"	1	Battimenti. Integrare particolare in condizioni di risonanza con risposta divergente in t e ampiezza crescente linearmente.	13
11/03/15 Lez. 06	1	Risposta smorzata a forzante armonica. Derivazione dell'integrale particolare $u_p = U \sin(\omega t - \xi)$ . Fase e fattore di amplificazione dinamica. Curve di risonanza e di fase.	14
"	1	Analisi delle condizioni di stazionarietà delle curve di risonanza. Stima del fattore di amplificazione massimo. Curva traccia dei massimi relativi. Rappresentazione dell'integrale particolare $u_p = Z_1 \sin \omega t - Z_2 \cos \omega t$ . Risposta transiente e risposta a regime. Integrare generale.	15
13/03/15 Lez. 07	1	Risposte a $F \sin \omega t$ e $F \cos \omega t$ mediante trattazione in variabili complesse. Integrare particolare in forma esponenziale.	16
"	1	Componenti sfasate, in opposizione di fase e in quadratura. Diagramma di Argand della risposta e delle forze in gioco, con illustrazione dell'equilibrio dinamico.	17
"	1	Risposta a forzante periodica tramite sviluppo in serie di Fourier. Forma esponenziale della serie di Fourier. Rilevanza pratica e concettuale. Definizione delle componenti armoniche. Risposta tramite sovrapposizione degli effetti (PSE). Effetto filtro sulle armoniche con pulsazioni più vicine a quella naturale del sistema.	18
18/03/15 Lez. 08	1	Risposta a forzante a gradino. Risposta completa e per c.i. nulle. Risposta tramite PSE a impulso $I = F \Delta \tau$ di breve durata $\Delta \tau$ . Passaggio al limite per $\Delta \tau \rightarrow 0$ . Funzione risposta ad impulso unitario.	19
"	1	Teorema dell'impulso. Condizione iniziale in termini di velocità corrispondente all'impulso. Risposta conseguente per oscillazioni libere da tale c.i. Distribuz. delta di Dirac e sue proprietà.	20
20/03/15 Lez. 09	1	Rappresentazione di forzante generica per sovrapposizione di impulsi. Integrare di convoluzione (integrale di Duhamel). Integrare generale con sovrapposizione della risposta a c.i. non nulle. Scritture alternative dell'integrale di Duhamel. Fattore di amplificazione dinamica dipendente dal tempo. Pseudo-velocità. Risposta pseudo-armonica.	21

"	1	Interpretazione alternativa per sovrapposizione di forzanti a gradino. Conseguente derivazione dell'integrale tramite integrazione per parti. Valutazione numerica dell'integrale di Duhamel: regola dei rettangoli, regola dei trapezi, regola di Simpson.	22
"	1	Risposta al moto del riferimento. Rilevanza pratica. Forzante indotta per effetto d'inerzia (trascinamento). Risposta da integrale di Duhamel in termini di pseudo-velocità. Azione sismica. Accelerogramma sismico. Spettri di risposta. Pseudo-spettri, assunzioni e motivazioni. Spettri di progetto. Effetto di periodi propri brevi e lunghi	23
25/03/15 Lez. 10	1	Integrazione diretta dell'equazione del moto. Metodo dell'accelerazione lineare. Derivazione delle relazioni incrementali da sviluppo in serie di Taylor. Generalizzazione secondo il Metodo di Newmark.	24
"	1	Rigidità efficace, forza efficace e soluzione per l'incremento di spostamento. Schema di algoritmo di integrazione. Proprietà del Metodo di Newmark: implicito vs. esplicito, accuratezza, stabilità, $\Delta t$ critico. Casi particolari: metodo dell'accelerazione media, metodo dell'accelerazione lineare, metodo delle differenze centrali.	25
27/03/15 Lez. 11	1	Analisi nel dominio delle frequenze. Concetto e derivazione, tramite processo al limite, della trasformata di Fourier per rappresentazione di forzante aperiodica nel dominio delle frequenze. Proprietà di differenziazione della trasformata di Fourier. Risposta nel dominio delle frequenze. Trasformazione dell'integrale di convoluzione nel dominio delle frequenze: risposta in forma di prodotto algebrico di funzioni trasformate.	26
"	1	Funzione risposta in frequenza, da trasformata di Fourier della funzione risposta ad impulso unitario ed interpretazione da risposta a forzante armonica, tramite trasformata delta di Dirac di forzante armonica. Schema riassuntivo sull'analisi nei domini del tempo e delle frequenze.	27
"	1	Sistemi dinamici ad n gradi di libertà. Introduzione. Schemi strutturali. Strutture a masse concentrate. Discretizzazione di sistemi continui. Equazioni del moto (non smorzate) per equilibrio dinamico. Scrittura in forma matriciale. Matrice di rigidità elastica. Matrice di cedevolezza elastica. Energia elastica. Simmetria e definizione positiva delle matrici.	28
08/04/15 Lez. 12	1	Forze d'inerzia. Energia cinetica. Matrice delle masse. Simmetria e definizione positiva della matrice delle masse. Derivazione delle equazioni del moto secondo le equazioni di Lagrange. Oscillazioni libere. Modi principali di vibrazione. Problema agli autovalori generalizzato associato alle matrici K e M. Forme standard.	29
"	1	Autosoluzioni. Proprietà di mutua ortogonalità degli autovettori corrispondenti ad autovalori distinti. Pulsazioni proprie e modi propri. Rapporto di Rayleigh. Stima degli autovalori. Normalizzazione degli autovettori. Matrici degli autovettori e degli autovalori. Forma diagonale con matrici delle masse e di rigidità trasformate diagonali. Trasformazione in coordinate principali. Significato. Disaccoppiamento delle equazioni del moto: diagonalizzazione ed equazioni del moto in coordinate principali.	30
10/04/15 Lez. 13	1	Sunto sull'analisi in coordinate principali. Trasformazione inversa e espressione esplicita della singola coordinata principale. Oscillazioni libere non smorzate in risposta alle condizioni iniziali. Schema riassuntivo sull'analisi dinamica modale.	31

"	1	Esempio di sistema a 2 gdl dinamici (e 1 gdl statico). Calcolo della matrice delle masse da scrittura dell'energia cinetica. Procedimento di condensazione statica. Scrittura della matrice di rigidezza 3x3 (con termini inerenti anche il gdl statico rotazionale).	32
"	1	Condensazione statica con calcolo della matrice di rigidezza efficace finale 2x2. Scrittura della matrice di cedevolezza e calcolo della matrice di rigidezza come sua inversa (3x3 e 2x2). Scrittura delle equazioni finali del moto.	33
15/04/15 Lez. 14	1	Analisi modale dell'esempio a 2 gdl. Calcolo degli autovalori in forma analitica. Calcolo analitico degli autovettori. Rappresentazione dei modi principali di vibrare. Normalizzazione degli autovettori. Trasformazione diretta e inversa in coordinate principali.	34
"	1	Calcolo iterativo di autovettori e autovalori mediante il metodo dell'iterazione vettoriale inversa. Passi del calcolo iterativo. Ortogonalizzazione di Gram-Schmidt.	35
17/04/15 Lez. 15	1	Sistemi smorzati. Smorzamento intrinseco e smorzamento aggiunto tramite dispositivi esterni. Ruolo dei singoli smorzatori, con trasformazione di coordinate $z(q)$ . Funzione di dissipazione o di Rayleigh. Matrice di smorzamento.	36
"	1	Smorzamento classico o alla Rayleigh. Ipotesi di disaccoppiamento. Fattori di smorzamento modali. Esempio a 2gdl con smorzatore inclinato.	37
"	1	Calcolo delle azioni interne. Sovrapposizione di effetti $A_i$ per coordinate lagrangiane unitarie $q_i=1$ e di effetti $\tilde{A}_i$ per coordinate principali unitarie $p_i=1$ (azioni interne modali). Calcolo delle forze d'inerzia modali. Stime SRSS di spostamento massimo e azioni interne massime in t. Applicazione al calcolo del momento M per l'esempio a 2 gdl.	38
22/04/15 Lez. 16	1	Azione sismica per strutture ad n gdl. Telaio multipiano "shear-type". Equazioni del moto in coordinate lagrangiane. Sunto su analisi modale e disaccoppiamento delle equazioni del moto in coordinate principali. Masse partecipanti modali e fattori di partecipazione modale all'azione sismica.	39
"	1	Analisi tramite spettro di risposta. Stima degli spostamenti massimi via SRSS. Azione interne modali e stima dei valori max (SRSS). Taglio modale e max alla base. Masse modali efficaci e loro proprietà.	40
24/04/15 Lez. 17	1	<b>PARTE II – INSTABILITÀ.</b>  Instabilità dell'equilibrio. Concetti e caratteristiche generali. L'equilibrio scritto nella configurazione deformata. "Grandi spostamenti" e "spostamenti geometricamente piccoli". Non-linearità geometrica. Effetti del 2° ordine.	41
"	1	Approccio statico completo su esempio emblematico di sistema discreto ad 1 gdl con deformabilità elastica concentrata. Equazione non lineare di equilibrio. Studio delle soluzioni e casistica. Carico critico.	42
"	1	Punto di biforcazione dei percorsi di equilibrio. Risposta non lineare carico/spostamento (rotazione). Comportamento biforcuto in spostamenti geometricamente piccoli.	43
29/04/15 Lez. 18	1	Approccio energetico. Nozione di stabilità dell'equilibrio per problema puramente posizionale: equilibrio stabile, indifferente, instabile. Teorema di Dirichlet di minimo dell'Energia Potenziale Totale (CS di stabilità). Stazionarietà dell'EPT (CN di equilibrio).	44

"	1	Applicazione del metodo energetico nell'esempio di riferimento. Mappa delle configurazioni di equilibrio stabili/instabili. Analisi dell'esempio in spostamenti geometricamente piccoli (teoria del II ordine). Linearizzazione delle equazioni di equilibrio variato.	45
06/05/15 Lez. 19	1	Ruolo delle imperfezioni nei sistemi reali. Effetto di curvatura iniziale in asta tesa o compressa. Illustrazione estesa per l'esempio in esame, con imperfezione (eccentricità), mediante il metodo statico. Mappa dei percorsi di equilibrio, con rami primario e secondario non biforcati. Analisi dell'esempio con imperfezione per spostamenti "geometricamente piccoli" tramite approccio statico.	46
"	1	Analisi di sistemi con imperfezioni tramite il metodo energetico. Mappa delle configurazioni stabili/instabili. Analisi energetica per spostamenti "geometricamente piccoli".	47
08/05/15 Lez. 20	1	Formalizzazione della teoria del II ordine. Equazioni di equilibrio da stazionarietà dell'EPT. Analisi di stabilità. Problemi euleriani di stabilità. Variazione seconda dell'EPT lineare col moltiplicatore dei carichi p. Matrice di rigidezza elastica $K_E$ , matrice di rigidezza geometrica $K_G$ e problema agli autovalori generalizzato ad esse associato. Carico critico euleriano. Rapporto di Rayleigh (in stabilità delle strutture). Sintesi sul metodo energetico.	48
"	1	Esempio di sistema discreto a 3 gdl. Definizione dei gradi di libertà. Analisi mediante metodo energetico in grandi spostamenti. Scrittura dell'EPT. Derivazione delle eq. di equilibrio tramite stazionarietà.	49
"	1	Calcolo della matrice di rigidezza tramite derivate seconde. Analisi energetica in spostamenti geometricamente piccoli tramite teoria del 2° ordine. Matrici di rigidezza $K$ , $K_E$ e $K_G$ . Calcolo dei carichi critici da condizione di annullamento del determinante di $K$ .	50
13/05/15 Lez. 21	1	Continuazione esempio di sistema discreto a 3 gdl. Calcolo e rappresentazione delle deformate critiche. Soluzione da problema agli autovalori generalizzato associato alle matrici di rigidezza $K_E$ e $K_G$ . Soluzione tramite metodo statico. Scrittura diretta delle equazioni di equilibrio variato. Equazioni di equilibrio linearizzate per spostamenti geometricamente piccoli. Matrice di rigidezza di equilibrio e sua relazione (combinazione lineare di righe) con $K$ da metodo energetico. Soluzione dei medesimi carichi critici da condizione di singolarità.	51
"	1	Instabilità di sistemi continui. Asta di Eulero: analisi di biforcazione secondo il metodo statico. Equazione della linea elastica con effetti del II ordine (equilibrio nella configurazione deformata). Determinazione dei carichi critici. Deformate critiche. Lunghezza di libera inflessione.	52
15/05/15 Lez. 22	1	Asta compressa semplicemente incastrata. Analisi completa con carichi critici e deformate critiche. Analisi di altre condizioni di vincolo. Formula generale per la determinazione del carico critico tramite coefficiente di vincolo c e lunghezza di libera inflessione $l_0$ .	53
"	1	Asta compressa incastro-carrello. Instabilità di telai piani a nodi fissi. Effetto della rigidezza elastica trave/colonna. Molla elastica equivalente. Delimitazioni del carico critico. Formula di Newmark.	54

"	1	Verifica di stabilità vs. verifica di resistenza. Snellezza. Curva di stabilità (iperbole di Eulero). Snellezza limite. Metodo omega per la verifica di stabilità condotta similmente a verifica di resistenza.	55
20/05/15 Lez. 23	1	<b>PARTE III – ANELASTICITÀ (Strutture).</b>  Introduzione al comportamento elastoplastico dei materiali, con riferimento alla risposta sforzo-deformazione monoassiale. Limite elastico. Deformazioni plastiche. Dipendenza dalla storia. Legame anolonomo in forma incrementale. Modulo di rigidezza tangente. Legame diretto e inverso. Incrudimento isotropo, cinematico, misto e effetto Bauschinger.	56
"	1	Univocità nel caso di incrudimento positivo, nullo e negativo. Modello con incrudimento lineare. Modulo di incrudimento. Derivazione del modulo tangente. Cenno alla generalizzazione in ambito 3D (condizione di plasticità, legge di scorrimento plastico, tensore di rigidezza tangente del 4° ordine). Materiale perfettamente elasto-plastico.	57
22/05/15 Lez. 24	1	Flessione elastoplastica (retta) nell'ambito del calcolo a rottura dei telai. Caso di riferimento: sezione rettangolare (doppiamente simmetrica), materiale a comportamento simmetrico a trazione/compressione, perfettamente elastoplastico. Ipotesi cinematica sul campo lineare di deformazione con conservazione delle sezioni piane. Campo di sforzo conseguente da legame costitutivo in campo elastico. Momento e curvatura a limite elastico. Modulo di resistenza elastico. Risposta in regime elastico.	58
"	1	Risposta in campo elastoplastico. Momento flettente da equivalenza statica. Legame momento/curvatura non-lineare risultante, con incrudimento a tendenza asintotica per curvatura infinita.	59
"	1	Momento limite o momento plastico. Modulo di resistenza plastico. Fattore di forma della sezione trasversale. Limiti alla curvatura massima e significato pratico del momento limite.	60
27/05/15 Lez. 25	1	Trave isostatica appoggio-appoggio con carico concentrato in mezzzeria. Carico a limite elastico, carico di collasso. Ipotesi di cerniera plastica. Meccanismo di collasso. Carico di collasso tramite applicazione del PLV, a partire dal meccanismo noto.	61
"	1	Trave iperstatica doppiamente incastrata soggetta a carico uniformemente distribuito. Moltiplicatore dei carichi. Analisi elastoplastica evolutiva sulla base dell'ipotesi di cerniera plastica. Ridistribuzione dei momenti oltre il limite elastico. Moltiplicatore a limite elastico, moltiplicatore limite e frecce ad essi corrispondenti. Curva carico/spostamento lineare a tratti. Meccanismo di collasso. Calcolo del moltiplicatore limite tramite PLV.	62
29/05/15 Lez. 26	1	Teoremi fondamentali dell'analisi limite. Definizioni: azioni staticamente e plasticamente ammissibili, moltiplicatori staticamente ammissibili $\lambda^-$ ; meccanismo cinematicamente e plasticamente ammissibile, moltiplicatori cinematicamente ammissibili $\lambda^+$ . Teorema statico: delimitazione inferiore del moltiplicatore di collasso $\lambda_L$ . Teorema Cinematico: delimitazione superiore del moltiplicatore di collasso $\lambda_L$ . Teorema misto.	63

"	1	Dimostrazione del Teorema Statico. Dimostrazione del Teorema Cinematico. Corollari: indipendenza del moltiplicatore di collasso dalle proprietà elastiche e da stati pregressi di coazione. Calcolo del moltiplicatore di collasso con metodi "manuali", alla luce dei teoremi fondamentali dell'analisi limite.	64
"	1	Esempio incastro-appoggio con carico uniformemente distribuito. Stime successive di $\lambda^+$ e $\lambda^-$ con delimitazione bilaterale del moltiplicatore di collasso $\lambda_L$ . Determinazione della posizione esatta della cerniera in campata e del moltiplicatore di collasso $\lambda_L$ .	65
03/06/15 Lez. 27	1	Esempio di telaio a portale semplice soggetto a carichi concentrati. Meccanismo completo di parete. Meccanismo parziale di trave. Stime successive di $\lambda^+$ e $\lambda^-$ , con delimitazione bilaterale del moltiplicatore limite $\lambda_L$ .	66
"	1	Meccanismo completo di trave/parete. Verifica della conformità plastica ed individuazione del moltiplicatore limite $\lambda_L$ . Cenno alla soluzione sistematica tramite Programmazione Lineare.	67