Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dolmine)
CCS Ingegneria Edile
LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

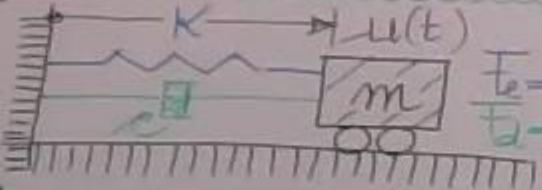
A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 03

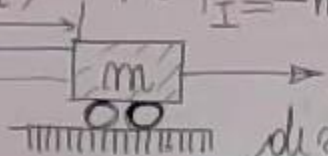
Oscillazioni libere smorzate

$\left\{\begin{array}{l} c \\ u_0 \\ \dot u_0 \end{array}\right.$



$F_e = K u$

$F_d = c \dot u$



$\forall t \quad F_I = -m\ddot u$

$\frac{c}{m} = 2\zeta\omega_1$

$\zeta = \frac{c}{2m\omega_1} = \frac{c}{2m\sqrt{\frac{K}{m}}} = \frac{c}{2\sqrt{Km}} = \frac{c}{c_{cr}}$ fattore di smorzamento relativo al critico

$\underbrace{2\sqrt{Km}}_{c_{cr}}$

Strutture civili

$\zeta \simeq 2-7\%$ (tipic 5%)

$\simeq 1\% = 0.01 \ll 1$ (caso subcritico)

($\zeta = 0$ caso non smorz.
$c = 0$)

"Equil. dinamico" $\rightarrow$ eq.ne del moto:
(Principio di d'Alembert)

$\cancel{m}\ddot u(t) + \underbrace{\frac{c}{m}}_{2\zeta\omega_1}\dot u(t) + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} u(t) = 0 \Rightarrow \ddot u + 2\zeta\omega_1\dot u + \omega_1^2 u = 0$

$\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsaz. naturale sistema non smorzato

Soluz. nella forma

$u(t) = e^{\lambda t}$; $\dot u = \lambda e^{\lambda t}$; $\ddot u = \lambda^2 e^{\lambda t}$

eq.ne caratteristica $\rightarrow \lambda^2 + 2\zeta\omega_1\lambda + \omega_1^2 = 0$

$u(t) = e^{\lambda_{1,2}t} = e^{-\zeta\omega_1 t} \cdot e^{\pm i\omega_d t}$

ampiezza della risposta decrescente esponenzialmente nel tempo

moto armonico di pulsaz. $\omega_d \simeq \omega_1$
$\sin\omega_d t, \cos\omega_d t$

* supercritico $\zeta > 1$: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{\underbrace{\zeta^2 - 1}_{>0}}$ due radici reali distinte < 0

Radici dell'eq.ne caratt. $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm \sqrt{\zeta^2\omega_1^2 - \omega_1^2}$

$\omega_1\left(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}\right) = -\zeta\omega_1 \pm \omega_1\sqrt{\zeta^2 - 1}$

smorz. critico $\zeta = 1$: $\lambda_{1,2} = -\omega_1$ due radici reali coincid. < 0

* subcritico $\zeta < 1$: $\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_1 \pm i\omega_1\sqrt{\underbrace{1-\zeta^2}_{>0}}$

$\zeta^2 - 1 = -(1-\zeta^2) = i^2(1-\zeta^2)$

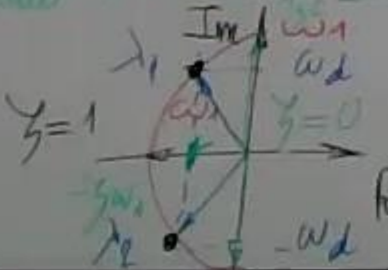
due radici complesse coniugate

$u(t) = e^{-\zeta\omega_1 t} \cdot (A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$

$= e^{-\zeta\omega_1 t} \cdot R\cos(\omega_d t - \varphi)$

$= e^{-\zeta\omega_1 t} \cdot R\sin(\omega_d t + \psi)$

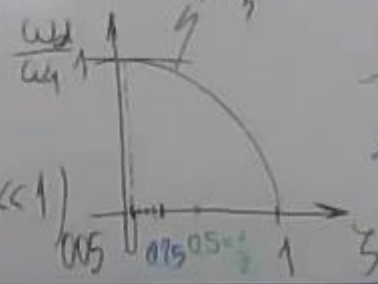
$\dot u(t) = -\zeta\omega_1 e^{-\zeta\omega_1 t}(A\sin\omega_d t + B\cos\omega_d t)$
$+ e^{-\zeta\omega_1 t}\omega_d(A\cos\omega_d t - B\sin\omega_d t)$



$|\lambda_{1,2}| = \omega_1$

$\underbrace{\omega_d = \omega_1\sqrt{1-\zeta^2}}$ pulsaz. naturale del sistema smorzato $\omega_d \leq \omega_1$
$\simeq \omega_1$ ($\zeta \ll 1$)

$\left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 = (1-\zeta^2)^{1/2}$; $\left(\frac{\omega_d}{\omega_1}\right)^2 + \zeta^2 = 1$



Imposizione delle c.i. $(t = t_0 = 0)$

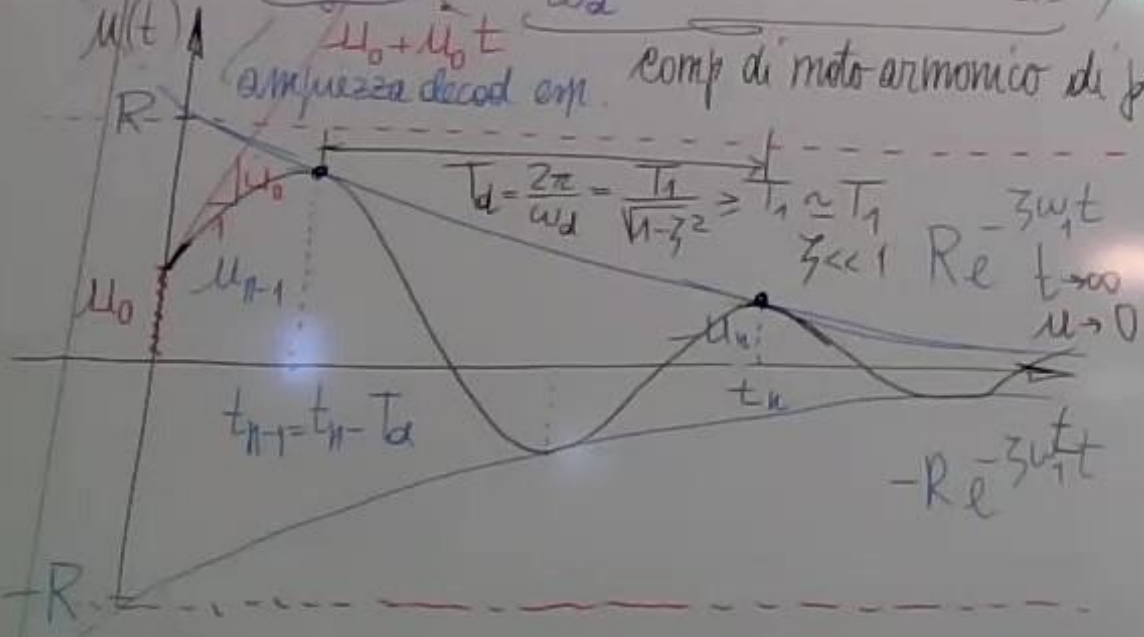
$$\begin{cases} u(0) = u_0 = B \\ \dot u(0) = \dot u_0 = -\zeta\omega_1 B + \omega_d A \end{cases} \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot u_0 + \zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}}$$

$\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}$

Risposta

$$u(t) = \underbrace{e^{-\zeta\omega_1 t}}_{\text{ampiezza decad esp}}\underbrace{\left(\frac{\dot u_0+\zeta\omega_1 u_0}{\omega_d}\sin\omega_d t + u_0\cos\omega_d t\right)}_{\text{comp di moto armonico di puls } \omega_d \simeq \omega_1}$$

$u_0 + \dot u_0 t$



moto oscillatorio aperiodico (con ampiezza decadente esponenzialmente nel tempo)

Rapporto dei valori max (decremento)

$$r = r_n = \frac{u_{n-1}}{u_n} = \frac{Re^{-\zeta\omega_1(t_n - T_d)}\cos(\ )}{Re^{-\zeta\omega_1 t_n}\cos(\ )} = e^{\zeta\omega_1 T_d}$$

$$\delta = \ln r = \zeta\omega_1 T_d = \zeta\omega_1 \frac{2\pi}{\omega_1\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \simeq 2\pi\zeta \Rightarrow \zeta = \frac{\delta}{2\pi}$$

$\zeta \ll 1,\ \delta \ll 1$

decremento logaritmico

$$\delta^2(1-\zeta^2) = 4\pi^2\zeta^2 \Rightarrow \delta^2 = (\delta^2 + 4\pi^2)\zeta^2 \Rightarrow \boxed{\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2+\delta^2}} = \frac{\delta}{2\pi\sqrt{1+(\delta/2\pi)^2}} \simeq \frac{\delta}{2\pi}}$$

Stima del fattore di smorzamento

- Caso critico $(\zeta = 1)$

$u(t) \Rightarrow e^{-\omega_1 t};\ te^{-\omega_1 t}$

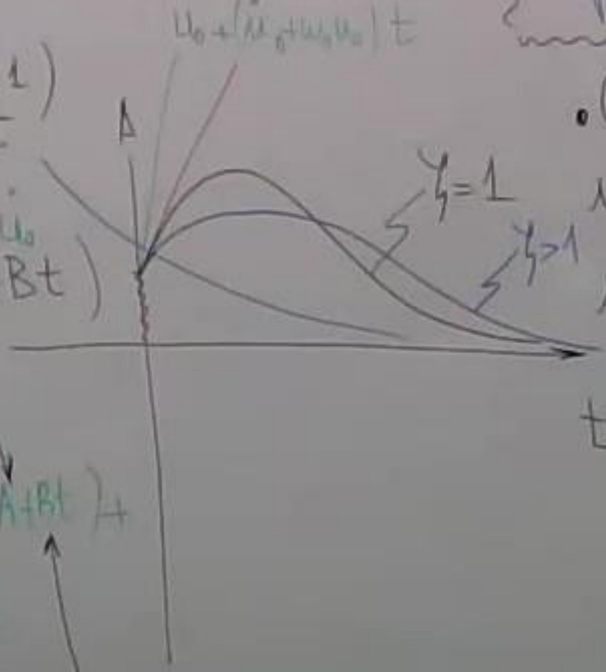
$$u(t) = e^{-\omega_1 t}(A + Bt)$$

integrale generale

c.i. u_0: $\boxed{u_0 = A}$

$\dot u_0$: $\dot u_0 = -\omega_1 e^{-\omega_1 t}(A + Bt) + e^{-\omega_1 t}B$

$$B = \dot u_0 + \omega_1 u_0$$



- Caso supercritico $(\zeta > 1)$

$u(t) \Rightarrow e^{\lambda_1 t},\ e^{\lambda_2 t}$

$$u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

$\dot u(t) = \lambda_1 A e^{\lambda_1 t} + \dots$

SOMMARIO (Lez. 03) [ex post]

- Oscillazioni libere smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Fattore di smorzamento (~ 1% per strutture civili).
- Radici dell'eq.ne caratteristica: poli.
- Casistica: subcritico ⟹ moto oscillatorio con ampiezza decadente.
  critico ⟹ moto aperiodico non oscillatorio.
  supercritico ⟹ idem, con ampiezza iniziale e picco inferiore.
- Decremento logaritmico e stima del fattore di smorzamento.
- Integrale generale e imposizione delle c.i.
- Next step: visto l'integrale generale dell'eq.ne omogenea con termine noto nullo. Da sovrapporsi ad integrale particolare dipendente dalla forzante ⟹ risposta forzata