

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica(, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2019/2020

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 20

Esempio 3DOF - Deformate critiche

Eq. di equil. (da staz. obl' EPT $V_2(v)$)

$$q_i = \vartheta_i \quad P = p \frac{K}{2l} \quad |v_i| \ll 1 \sim v_i$$

$$\begin{aligned} (1) \quad & \begin{cases} (3-p)\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0 \\ -\vartheta_1 + (2-p)\vartheta_2 - \vartheta_3 = 0 \\ -\vartheta_2 + (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow K = \begin{bmatrix} 3-p & -1 & 0 \\ -1 & 2-p & -1 \\ 0 & -1 & 1-\frac{p}{2} \end{bmatrix} \\ (3) \quad & \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = K_E - K_G$$

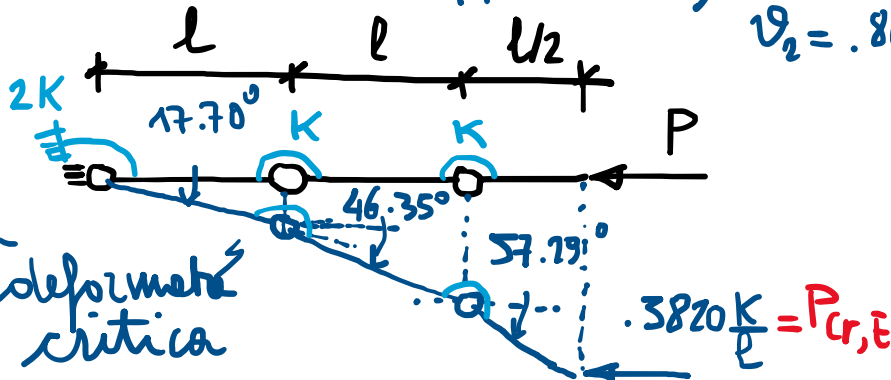
carichi critici: $\det(K) = 0 \Rightarrow p_i^*$

Deformate critiche associate a $p_i^* \Rightarrow \delta q_i^* = q_i^* - q_0$

Dalla (1) $\Rightarrow \vartheta_1 = \frac{\vartheta_2}{3-p} = \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} \vartheta_3$

Dalla (3) $\Rightarrow \vartheta_2 = (1-\frac{p}{2})\vartheta_3 = \frac{2-p}{2} \vartheta_3$

1° carico critico ($p_1^* = .3820$): $\vartheta_1 = .3090 \text{ rad} = 17.70^\circ$
 $\vartheta_2 = .8090 \text{ rad} = 46.35^\circ$



$$\delta q_i^* = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \frac{2-p}{3-p} \\ \frac{2-p}{2} \\ 1 \end{Bmatrix}$$

Alternativamente: $K \delta q_i = 0$

$$K_E \delta q_i^* = p_i^* K_G \delta q_i^*$$

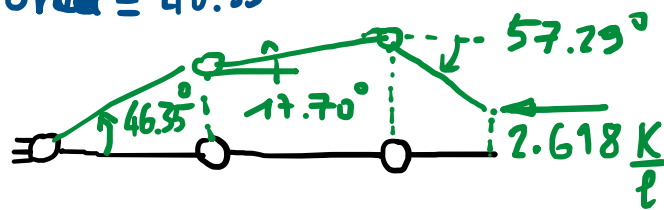
p_i^* agli autovalori generalizzati
 p_i^* autovalori

δq_i^* autovettori

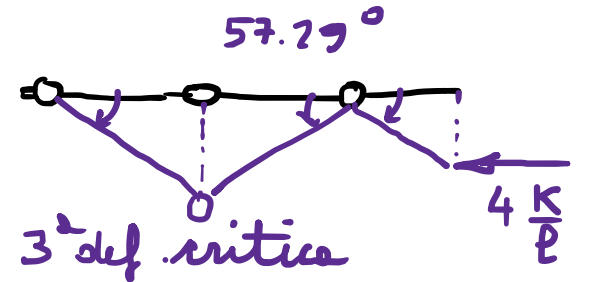
note a mem di cost. arbitraria

$\hookrightarrow \vartheta_3 = 1 \text{ rad} = 57.29^\circ$

Analogam. per $p_2^* = p_3^*$

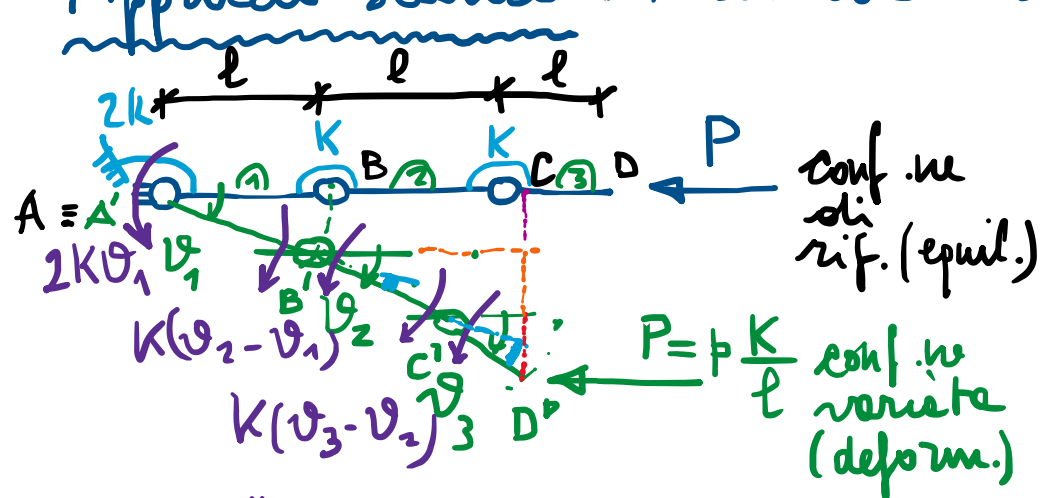


2° def. critica



3° def. critica

Approccio statico: scrittura diretta delle eq. di equilibrio variato (nella conf. in def.)



$$\begin{aligned} \sum M_{C'}^3 &= 0 \Rightarrow K(\vartheta_3 - \vartheta_2) - P \frac{l}{2} \sin \vartheta_3 = 0 & \leftarrow \text{app. enery.} \leftrightarrow 3 \text{ eq.} \\ \sum M_{B'}^{3+2} &= 0 \Rightarrow K(\vartheta_2 - \vartheta_1) - P \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 \right) = 0 & \leftarrow 2^a + 3^a \text{ eq.} \\ \sum M_A^{3+2+1} &= 0 \Rightarrow 2K\vartheta_1 - p \left(\frac{l}{2} \sin \vartheta_3 + l \sin \vartheta_2 + l \sin \vartheta_1 \right) = 0 & \leftarrow 1^a + 2^a + 3^a \text{ eq.} \end{aligned}$$

eq. di equil. non-lineari (non-lin. geometrica)

Spost. "geometricamente piccoli" $|\vartheta_i| \ll 1 \Rightarrow \sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$: eq. linearizzate

$$\begin{cases} \vartheta_1 - \vartheta_2 + (1 - p_2) \vartheta_3 = 0 \\ -\vartheta_1 + (4 - p) \vartheta_2 - p_2 \vartheta_3 = 0 \\ (4 - p) \vartheta_1 - p \vartheta_2 - p_2 \vartheta_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \tilde{K} \delta q = 0 \Rightarrow \tilde{K} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} - p \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \tilde{K}_E - p \tilde{K}_G$$

conf. in dirif. equil.

non simm.

Carichi critici:

$$-\det(\tilde{K}) = 0 \Rightarrow p_i^*$$

$$-\tilde{K}_E \delta q_i^* = p_i^* \tilde{K}_G \delta q_i^* \Rightarrow \text{autoval. autovett.}$$

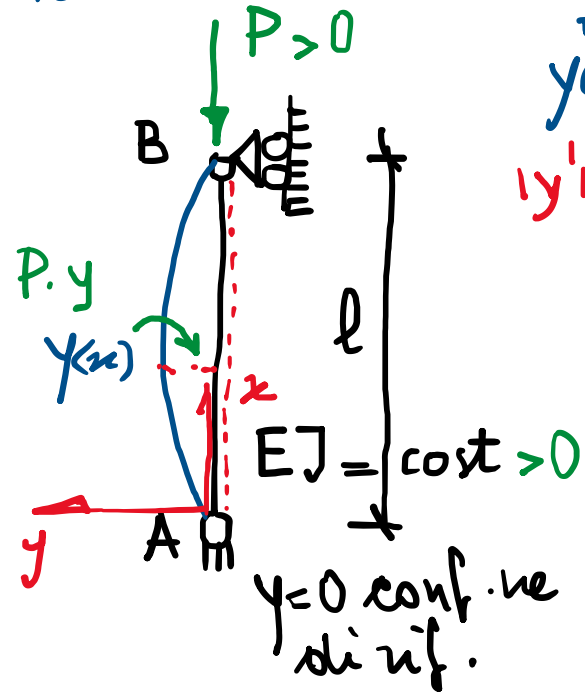
con
identici
risultati

N.B. $\tilde{K}$ da approccio statico può differire da K da approccio energetico (sim.) ma con le stesse proprietà algebriche sottostanti

Sistemi continui (aste semplicemente compresse deformabili elasticamente flessionali.)

Aste di Eulero (~ 1750) - Approccio statico

nella conf. ne def.



$$y''(x) \approx \chi(x) = \frac{M(x)}{EJ} \leadsto EJ y''(x) = M(x) = -Py(x)$$

$|y'| \ll 1$ Legge di Bernoulli-Euler-Navier

Momento interno elastico

Momento esterno legato a P

metodo delle Linee Elastiche

$$y''(x) + \underbrace{\frac{P}{EJ}}_{\alpha^2} y(x) = 0$$

$$\alpha^2 = \frac{P}{EJ} ; P = \alpha^2 l^2 \frac{EJ}{l^2} = n^2 \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Sistema delle a.e.

$$P_{c2} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Solut.

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x$$

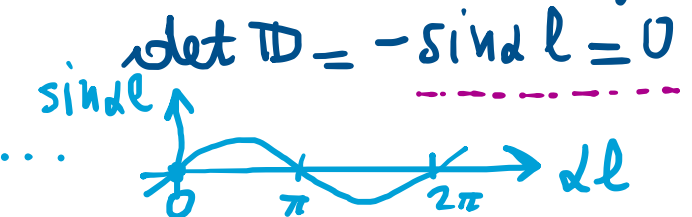
a.e. (scrittura e imposizione)

$$\begin{cases} y(0) = 0 \\ y(l) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} B = 0 \\ A \sin \alpha l + B \cos \alpha l = 0 \end{cases}$$

$$\sin \alpha l A = 0 \begin{cases} \sin \alpha l \neq 0 \rightarrow A = 0 \quad (y \equiv 0) \\ \sin \alpha l = 0 \rightarrow A \text{ arb.} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0$$

Ammette solut. non banali $X \neq 0$ se D sing.

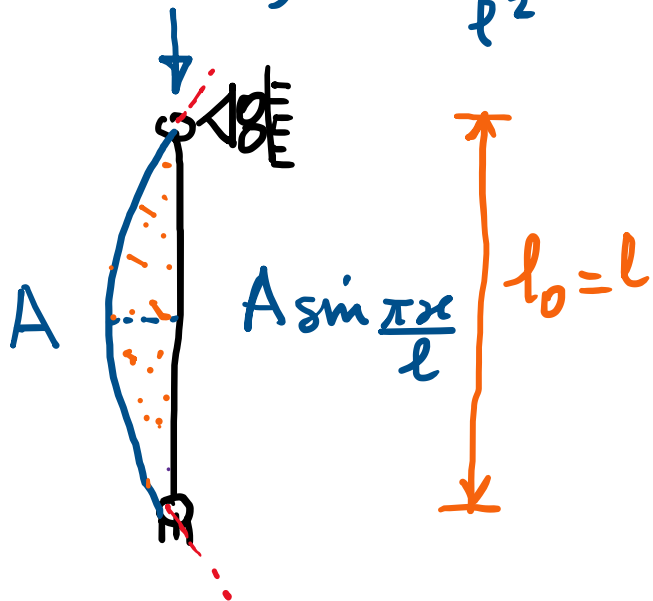


$$\det D = -\sin \alpha l = 0$$

$$\alpha l = n\pi ; n = 1, 2, 3, \dots$$

$$P_{cr,n} = n^2 \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{\left(\frac{l}{n}\right)^2} = \pi^2 \frac{EI}{l_{0,n}^2}$$

$$P_{cr,E} = \pi^2 \frac{EI}{l^2}$$

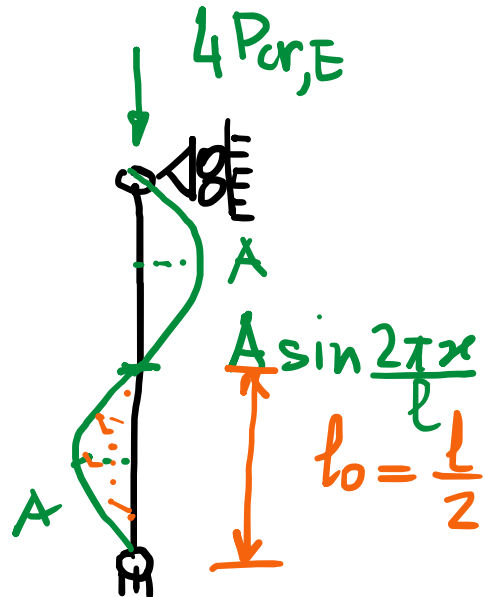


$n=1$

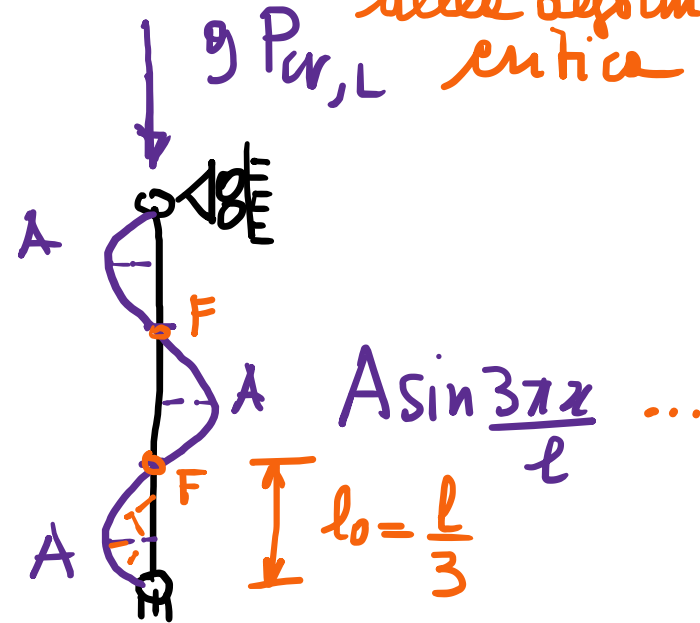
$$l_{0,n} = \frac{l}{n} \text{ lunghezza di libera inflessione}$$

$$y_{cr,n}(x) = A \sin \frac{n\pi x}{l}$$

distanza tra due punti di flesso consecutivi della deform. critica



$n=2$



$n=3$

...

- Successive generalizzazioni per altre condizioni di vincolo (al contorno)

SOMMARIO (Lez. 20)

- Deformate critiche esempio 3DOF ("modi di instabilità").
- Approccio statico: scrittura diretta delle eq. in equilibrio nella configurazione deformata.
 - non-lineari per spost. finiti.
 - lineari per spost. geometricamente piccoli ($\sin \vartheta_i \approx \vartheta_i$).
 - Eq. in risultano comb. lineare di quelle de stat. di EPT₂ con matrice di rigidità $\mathbf{K}$ con stesse proprietà algebriche.
- Sistemi continui (deformabilità elastica distribuita).
- Asta di Eulero (con approccio statico) [eq. in LE nelle conf. in deform.].
- Carichi critici, deformate critiche, lunghezza di libera riflessione.

Next step: Generalizzazione ad altre condizioni di vincolo, cerni e telai, formula di Newmark, verifica di stabilità.