Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

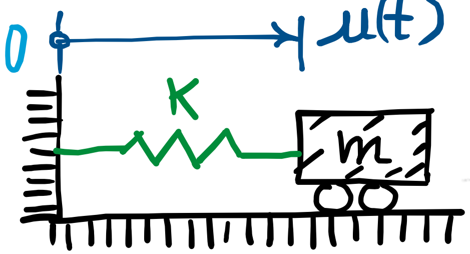
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 02

Sistemi SDOF – Oscillazioni libere (non smorzate) [Notazione: $\frac{d}{dt}(\ ) = (\dot{\ })$]

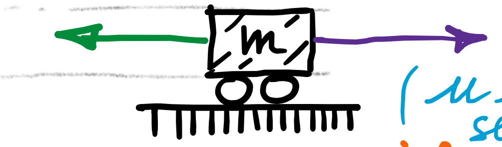
$F = 0$ $(c = 0)$

$t = 0$, u_0, $\dot u_0$ c.i.



m, K cost > 0

$F_e = Ku$ $F_i = -m\ddot u$



(u e $\ddot u$ di segno opposto)

t equil. dinamico

$$\cancel{m}\ddot u + \underbrace{\frac{K}{m}}_{\omega_1^2} u = \frac{0}{m} \qquad (1)$$

$\omega_1^2 = \frac{K}{m}$; $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ pulsazione naturale o propria (frequenza angolare)

$[\omega_1] = \frac{1}{[t]}$ $\frac{rad}{s}$

$\omega_1 \uparrow$ $K\uparrow$ $m\downarrow$; $\omega_1\downarrow$ $K\downarrow$ $m\uparrow$

Si cercano soluzioni nelle forme:

$$u(t) = e^{\lambda t}$$

$$\dot u(t) = \lambda e^{\lambda t} = \lambda u$$

$$\ddot u(t) = \lambda^2 e^{\lambda t} = \lambda^2 u$$

$e^{\lambda t} \neq 0 \ \forall t$

$i = e^{i\frac{\pi}{2}}$

i: unità immaginaria

$i^2 = -1$

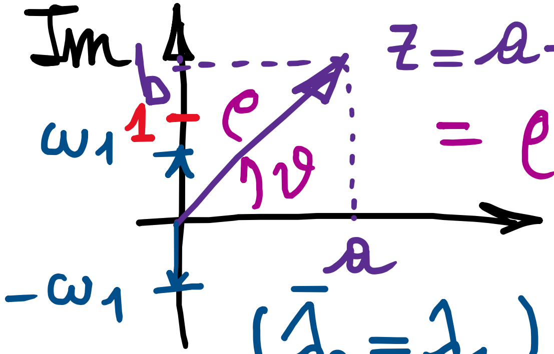
Sostituendo in (1): $\lambda^2 u + \omega_1^2 u = 0 \rightarrow (\lambda^2 + \omega_1^2) u = 0$

$$\lambda^2 + \omega_1^2 = 0 \rightarrow \lambda^2 = -\omega_1^2 = i^2\omega_1^2 = (i\omega_1)^2$$

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$$

due radici puram. immaginarie (compless. coniug.)

piano complesso o di Argand



$z = a + ib = \rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$(\bar\lambda_2 = \lambda_1)$

Integrale generale: $u = e^{\lambda_{1,2} t}$ $\qquad \lambda_{1,2} = \pm i\omega_1$

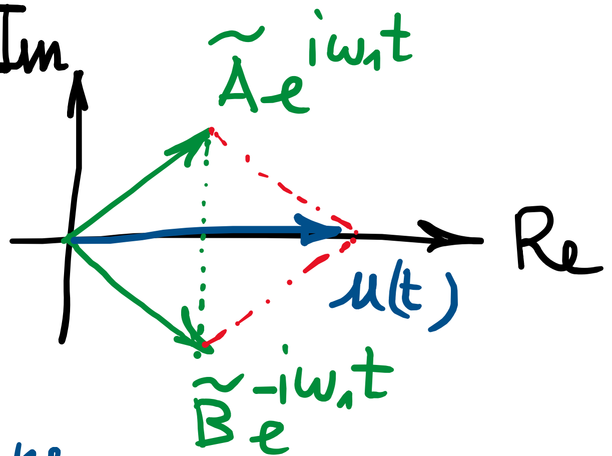
$$u(t) = \tilde{A}\, e^{\lambda_1 t} + \tilde{B}\, e^{\lambda_2 t}$$

combinaz. lineare di $e^{\lambda_1 t}$ ed $e^{\lambda_2 t}$

$\tilde{B} = \overline{\tilde{A}}$

complesso coniugato

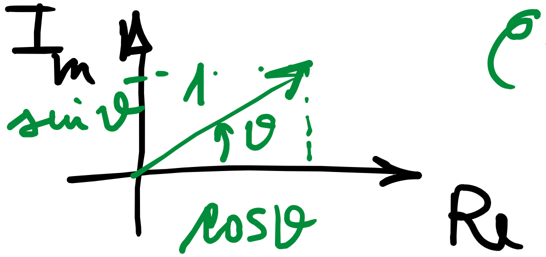
$$\overline{e^{i\omega_1 t}} = e^{-i\omega_1 t}$$



Peraltro, dati $e^{\lambda_{1,2} t}$, anche una loro combinazione è integrale, utile a formare l'integrale generale.

Formula di Eulero: $\rho e^{i\vartheta} = \rho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$

$$e^{-i\vartheta} = \cos\vartheta - i\sin\vartheta$$



$\rho = 1$

$$e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta} = 2\cos\vartheta \rightarrow \cos\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}}{2}$$

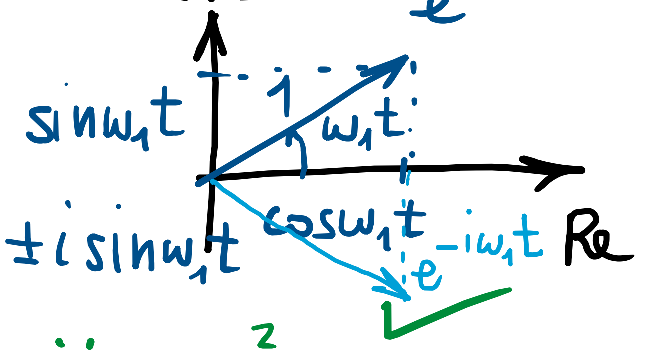
$$e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta} = 2i\sin\vartheta \rightarrow \sin\vartheta = \frac{e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta}}{2i}$$

sin e cos sono combinaz. lineare di $e^{i\vartheta}$ ed $e^{-i\vartheta}$

Quindi, anche $\sin\omega_1 t$ e $\cos\omega_1 t$ sono integrali utili a generare l'integrale generale cercato.

Integrale generale in sen e cos:

$$e^{\lambda_{1,2} t} = e^{\pm i\omega_1 t} = \cos\omega_1 t \pm i \sin\omega_1 t$$



$$\boxed{u(t) = A \sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t}$$

$$\dot{u}(t) = \omega_1 \left(A\cos\omega_1 t - B\sin\omega_1 t\right)$$

$$\ddot{u}(t) = -\omega_1^2 \underbrace{\left(A\sin\omega_1 t + B\cos\omega_1 t\right)}_{u} = -\omega_1^2 u \Leftarrow \ddot{u} + \omega_1^2 u = 0$$

equazione dei moti armonici

Costanti A e B da determinare imponendo le c.i.:

$$u(0) = u_0 \rightarrow u(0) = \boxed{B = u_0}$$

$$\dot{u}(0) = \dot{u}_0 \rightarrow \dot{u}(0) = \omega_1 A = \dot{u}_0 \Rightarrow \boxed{A = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}}$$

Integrale finale:

u_0 e $\dot{u}_0$ definiscono l'ampiezza (cost) del moto armonico

$$\boxed{u(t) = \frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\sin\omega_1 t + u_0 \cos\omega_1 t}$$

moto armonico di pulsazione ω_1 e periodo proprio $T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1}$

ampiezza costante

Infatti: $\sin\omega_1(t+T_1) = \sin\omega_1 t \Rightarrow \omega_1 T_1 = 2\pi$
cos

$\llcorner$ periodo

funzioni periodiche di periodo 2π

$u(t+T)=u(t)$
f.ne periodica di periodo T

$[s]\ T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{1}{f_1}$

$f_1 = \frac{\omega_1}{2\pi}$; $\omega_1 = 2\pi f_1$ $\llcorner$ frequenza ciclica $[s^{-1}] = [Hz]$

Hertz (cicli al secondo)

Altre rappresentazioni:

$u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi)$

$u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi)$

R: ampiezza; φ e ψ: fasi = angoli di fase

$\llcorner$ sfasamento in ritardo rispetto a $\cos\omega_1 t$

in anticipo $\sin\omega_1 t$

$$u(t) = R(\cos\omega_1 t\cos\varphi + \sin\omega_1 t\sin\varphi)$$
$$= \underbrace{R\sin\varphi}_{A}\sin\omega_1 t + \underbrace{R\cos\varphi}_{B}\cos\omega_1 t$$

$$u(t) = R(\sin\omega_1 t\cos\psi + \cos\omega_1 t\sin\psi)$$
$$= \underbrace{R\cos\psi}\sin\omega_1 t + \underbrace{R\sin\psi}\cos\omega_1 t)$$

$$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases}$$

$\frac{A}{B} = \tan\varphi = \frac{1}{\tan\psi}$ $\quad (\varphi+\psi = \frac{\pi}{2})$

relaz. $R; \varphi, \psi \Rightarrow A, B$

$$\begin{cases} A = R\sin\varphi = R\cos\psi \\ B = R\cos\varphi = R\sin\psi \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^2 + B^2 = R^2 \Rightarrow R = \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\frac{\dot{u}_0}{\omega_1}\right)^2 + u_0^2}$$

ampiezza dipendente dalle c.i.

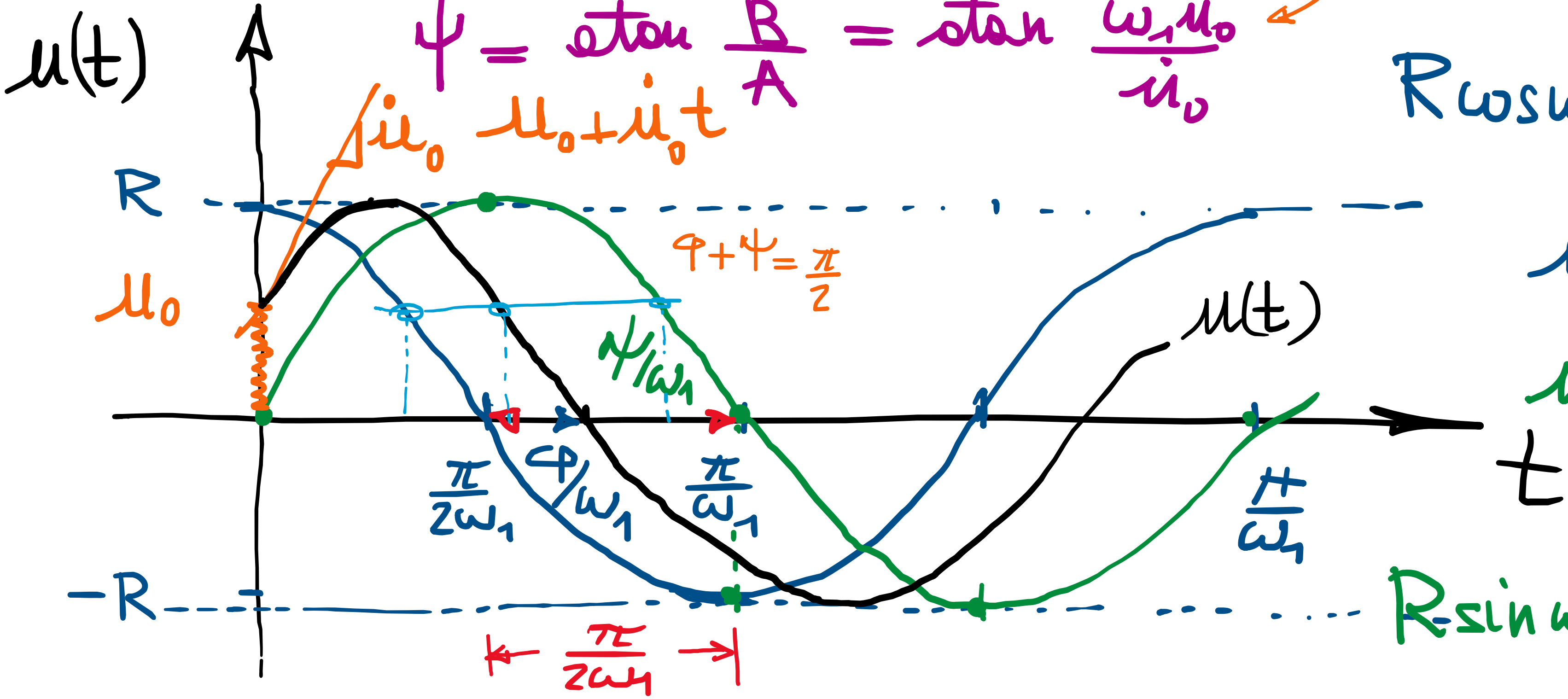
e da ω_1 (caratteristica del sistema)

$$\frac{A}{B} = \tan\varphi = \frac{1}{\tan\psi} \qquad \left(\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}\right) \text{ angoli complementari}$$

$$\Rightarrow \varphi = \operatorname{atan}\frac{A}{B} = \operatorname{atan}\frac{\dot{u}_0}{\omega_1 u_0}$$

$$\psi = \operatorname{atan}\frac{B}{A} = \operatorname{atan}\frac{\omega_1 u_0}{\dot{u}_0}$$

relazioni $A, B \Rightarrow R; \varphi, \psi$



$R\cos\omega_1 t$

$$u(t) = R\cos(\omega_1 t - \varphi)$$

$$u(t) = R\sin(\omega_1 t + \psi)$$

$R\sin\omega_1 t$

Interpretazione (del moto armonico) mediante vettori rotanti nel piano di Argand:

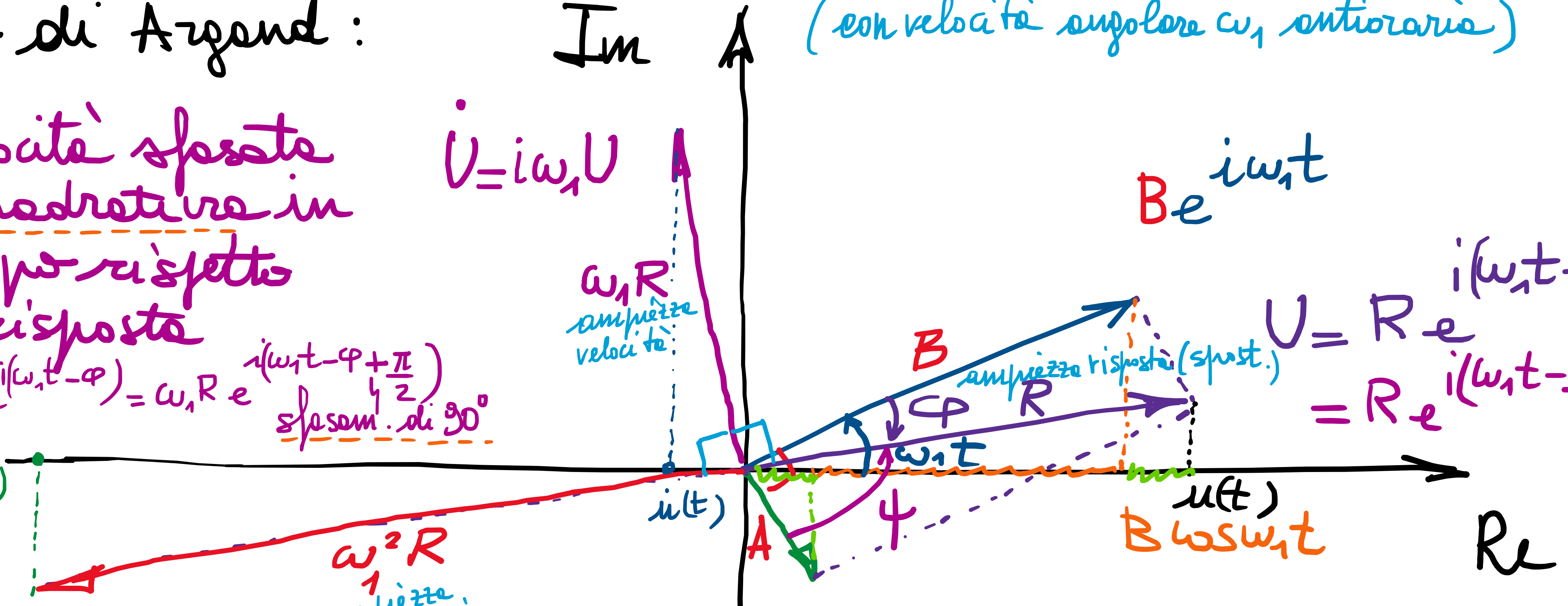
(con velocità angolare ω_1 antioraria)

velocità sfasata in quadratura in anticipo rispetto alla risposta

$\dot{U} = i\omega_1 U$

$\dot{U} = i\omega_1 R e^{i(\omega_1 t - \varphi)} = \omega_1 R\, e^{i(\omega_1 t - \varphi + \frac{\pi}{2})}$ sfasam. di 90°

$e^{i\pi/2}$



$U = R e^{i(\omega_1 t - \varphi)}$

$= R e^{i(\omega_1 t - \frac{\pi}{2} + \psi)}$

$A e^{i(\omega_1 t - \pi/2)}$

$A\cos(\omega_1 t - \pi/2) =$

$A\sin\omega_1 t$

$\varphi + \psi = \frac{\pi}{2}$

$\ddot{U} = -\omega_1^2 U$

accelerazione in opposizione di fase rispetto alla risposta

sfasamento di 180°

$(\ddot{u} = -\omega_1^2 u)$ ove u è positivo, $\ddot{u}$ è negativo

$u(t)$ è la proiezione orizzontale di $U(t)$ (ombra sull'asse x)

SOMMARIO (Lez. 02)

- Oscillazioni libere non smorzate (in risposta alle sole c.i.).
- Eq.ne dei moti armonici.
- Pulsazione naturale del sistema $\omega_1 = \sqrt{K/m}$.
- Moto armonico di periodo naturale $T_1 = 2\pi/\omega_1$ (e ampiezza costante).
- Ampiezza e sfasamento, rispetto a puro cos o sin.
- Rappresentazione del moto mediante vettori rotanti nel piano di Argand: U sfasata; $\dot{U} \sim \omega_1 U$ in quadratura in anticipo; $\ddot{U} \sim \omega_1^2 U$ in opposizione di fase.

- Next step: generalizzazione al caso smorzato, con ampiezza decadente nel tempo.