Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

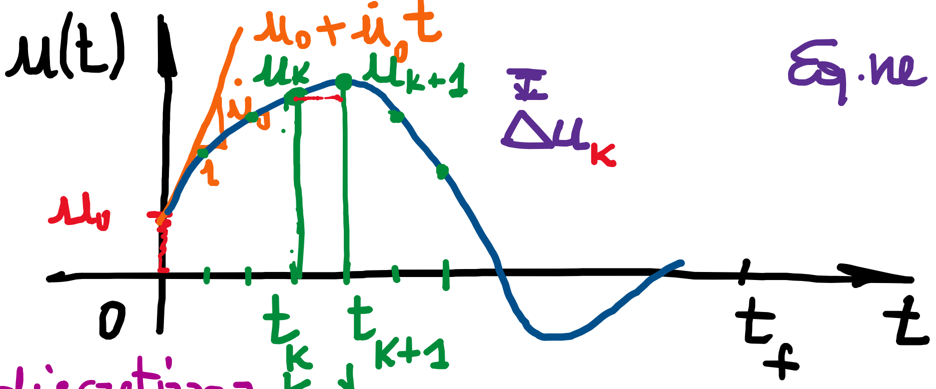
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 09

Integrazione diretta nel tempo dell'equazione del moto (integrazione passo-passo) "step-by-step"



discretizzaz. dell'asse dei tempi

Δt_k passo temporale "time step"

$\Delta t_k = \Delta t = \dfrac{t_f - t_0}{n}$ .... n° dei passi

Eq.ne del moto in forma incrementale:

$$m\, \Delta \ddot{u}_k + c\, \Delta \dot{u}_k + K\, \Delta u_k = \Delta F_k \Rightarrow \Delta u, \Delta \dot{u}, \Delta \ddot{u}$$

(esatta o approx.)

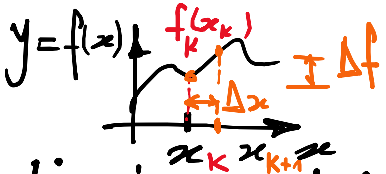
"Avanzamento" $t_k \to t_{k+1}$

$$\ddot{u}_{k+1} = \ddot{u}_k + \Delta \ddot{u}_k \qquad [\, \Delta \ddot{u}_k = \ddot{u}_{k+1} - \ddot{u}_k \,]$$

aggiornamento della soluzione

soluz. all'inizio del passo

incremento della soluzione nel passo



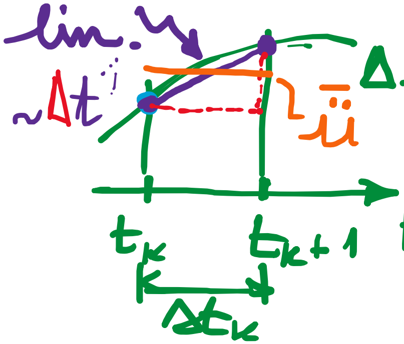
"Metodo delle differenze finite" $\Rightarrow$ rappresentaz. di derivate tramite rapporti incrementali

Sviluppo in serie di Taylor: $\Delta f_k = f(x_k + \Delta x_k) - f(x_k) = f'(x)\,\Delta x + \frac{1}{2} f''(x)\,\Delta x^2 + \frac{1}{6} f'''(x)\,\Delta x^3 + \dots$ termini di ordine superiore

troncamento

- Metodo dell'accelerazione lineare (media)

lin.



$\Delta \ddot{u} = \dddot{u}\, \Delta t$ 1° ord.

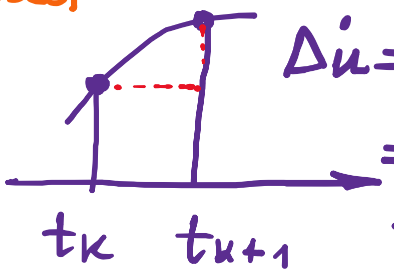
$\Rightarrow \dddot{u} = \dfrac{\Delta \ddot{u}}{\Delta t}$

$f_1 \Rightarrow \ddot{u}$

$\sim \Delta t^2$

$f_2 \Rightarrow \dot{u}$

2° ord.



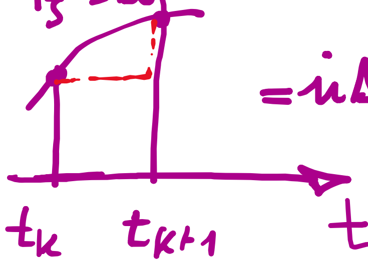
$\Rightarrow$ $\Delta \dot{u} = \ddot{u}\, \Delta t + \frac{1}{2} \dddot{u}\, \Delta t^2$

$= \Delta t \left(\ddot{u} + \frac{1}{2} \Delta \ddot{u} \right)$

$\Rightarrow$

$\sim \Delta t^3$

$f_3 \Rightarrow u$



$\Delta u = \dot{u}\, \Delta t + \frac{1}{2} \ddot{u}\, \Delta t^2 + \frac{1}{6} \dddot{u}\, \Delta t^3$ 3° ord.

$= \dot{u}\, \Delta t + \frac{1}{2} \Delta t^2 \left(\ddot{u} + \frac{1}{3} \Delta \ddot{u} \right)$

sostituzione

Metodo di Newmark (1959) $\Rightarrow$ Generalizzazione (famiglia di metodi di integrazione)

β, γ costanti del metodo di N.

$$
\begin{cases}
(1)\quad \Delta u = \dot u \Delta t + \frac{1}{2}\Delta t^2 \underbrace{(\ddot u + 2\beta \overbrace{\Delta \ddot u}^{\ddot u_{k+1} - \ddot u_k})}_{(1-2\beta)\ddot u_k + 2\beta \ddot u_{k+1}} = \dot u \Delta t + \frac{1}{2}\ddot u \Delta t^2 + \beta \Delta \ddot u \Delta t^2 \\
(2)\quad \Delta \dot u = \Delta t \underbrace{(\ddot u + \gamma \Delta \ddot u)}_{(1-\gamma)\,\text{"}\, + \,\gamma\, \text{"}}
\end{cases}
$$

medie pesate di $\ddot u_k$ e $\ddot u_{k+1}$

- Acc. lin. $2\beta = \frac{1}{3}$; $\beta = \frac{1}{6}$; $\gamma = \frac{1}{2}$
- " media $2\beta = \frac{1}{2}$; $\beta = \frac{1}{4}$; $\gamma = \frac{1}{2}$

- Dalle (1)

$$\Delta \ddot u = \frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot u \cancel{\Delta t}}{\beta \Delta t^{\cancel{2}}} - \frac{1}{2}\frac{\ddot u \cancel{\Delta t^2}}{\beta \cancel{\Delta t^2}} = \boxed{\frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot u}{\beta \Delta t} - \frac{\ddot u}{2\beta} = \Delta \ddot u} \quad (3)$$

$\Delta \ddot u$ f.ne di Δu

- Sost. la (3) nella (2):

$\Delta \dot u$ f.ne di Δu

$$\Delta \dot u = \ddot u \Delta t + \gamma \Delta t \frac{\Delta u}{\beta \Delta t^2} - \gamma \Delta t \frac{\dot u}{\beta \Delta t} - \gamma \Delta t \frac{\ddot u}{2\beta} = \boxed{\frac{\gamma}{\beta}\frac{\Delta u}{\Delta t} - \frac{\gamma}{\beta}\dot u + \frac{2\beta - \gamma}{2\beta}\ddot u \Delta t = \Delta \dot u} \quad (4)$$

- Sost. la (3) e la (4) nell'eq.ne del moto in forma incrementale: $m\Delta \ddot u + c\Delta \dot u + k\Delta u = \Delta F$

$$\underbrace{\left(\frac{m}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma c}{\beta \Delta t} + k\right)}_{\tilde K \text{ rigidezza efficace}} \Delta u = \underbrace{\Delta F + \frac{m}{\beta}\left(\frac{\dot u}{\Delta t} + \frac{\ddot u}{2}\right) + \frac{c}{\beta}\left(\gamma \dot u - \frac{2\beta - \gamma}{2}\ddot u \Delta t\right)}_{\Delta \tilde F \text{ forza incrementale efficace}} \Rightarrow \boxed{\tilde K \Delta u = \Delta \tilde F}$$

$$\Delta u = \tilde K^{-1} \Delta \tilde F$$

- Noto Δu, sost. nelle (4) e (3), si ottengono gli incrementi $\Delta \dot u$ e $\Delta \ddot u$, a consentire l'avanzamento della soluzione all'istante temporale successivo.

Implementazione ("pseudo-code") $\Rightarrow$ Algoritmo di integrazione

- Partendo da c.i. $u_0, \dot{u}_0$

CICLO su tutti i time step

- t_k : $u_k, \dot{u}_k, \ddot{u}_k$; ΔF_k
- calcolo di $\tilde{K}, \Delta\tilde{F}_k$
- soluzione $\Delta u_k = \tilde{K}^{-1}\, \Delta\tilde{F}_k$
- determinaz. di $\Delta\dot{u}_k, \Delta\ddot{u}_k$
- aggiornamento variabili $u_{k+1}, \dot{u}_{k+1}, \ddot{u}_{k+1}$

cf. $\Rightarrow$ accuratezza del metodo (bontà della soluz. approssimata rispetto alla reale)

indicazione tipica per suff. accurat.

$$\Delta t \simeq \frac{T_1}{10}$$

Caratteristiche

- esplicito sse $\beta = 0$
- accuratezza del 2° ordine sse $\gamma = 1/2$ $\quad \varepsilon \sim \Delta t^2$ (errore)
- stabilità (numerica) u limitata $\forall \Delta t$
- incondizionatamente stabile ($\forall \Delta t$) $\quad 2\beta \geq \gamma \geq 1/2$
- condizionatamente stabile $\quad 2\beta < \gamma$; $\gamma \geq 1/2$

$$\Delta t \leq \Delta t_{cr} = \frac{\Omega_{cr}}{\omega_1} = \frac{\Omega_{cr}}{2\pi} T_1$$

metodo	β	γ	tipo	Δt_{cr}
acc. media	$1/4$		implicito	incond. stab. (∞)
" lineare	$1/6$	$\frac{1}{2}$	implicito	$\sqrt{3}\,\frac{T_1}{\pi}$
differenze centrali	0		esplicito	$\frac{T_1}{\pi}$

valore di riferim. per stabilità

Stima Δt_{cr}

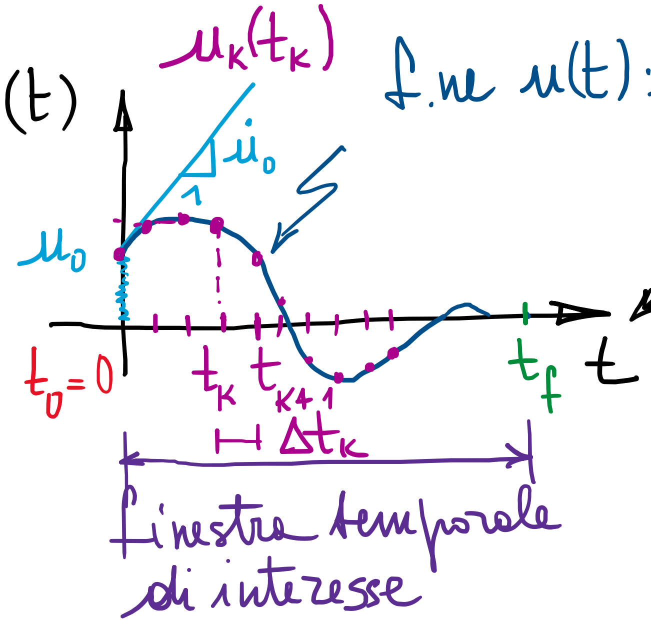
$$\Omega_{cr} = \frac{\xi(\gamma - 1/2) + \sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta + \xi^2(\gamma - 1/2)^2}}{\frac{\gamma}{2} - \beta}$$

stima conserv. $\xi = 0$ $\rightarrow$ $\gamma = 1/2$

$$\Omega_{cr} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\gamma}{2} - \beta}} \; ; \; \Delta t_{cr} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\gamma - 4\beta}} T_1$$

Concetti fondamentali:

• $u(t)$



f.ne $u(t)$: risposta temporale

asse dei tempi (tempo "continuo" ↔ "continuous time")

$$t_0 \le t_k \le t_f$$

asse campionato dei tempi (tempo "discreto" ↔ "discrete time")

n° discreto di istanti temporali, campionati ad intervallo di tempo Δt_k – Spesso $\Delta t_k = \Delta t = \frac{t_f - t_0}{n} = cost$

"passo temporale o di tempo"

n°. dei passi temporali ("time steps")

Soluzione continua esatta $u(t)$

" discreta esatta $u_k(t_k)$ (campionamento di $u(t)$)

" " approssimata $\tilde{u}_k(t_k)$ (sufficientemente accurata, nella rappresentazione della risposta reale)

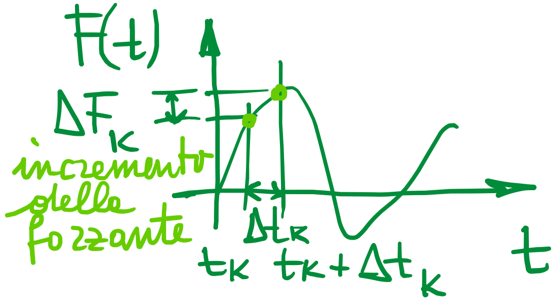
- Eq.ne del moto in forma incrementale:

$m, c, K = \text{cost}$ (sist. dinamico tempo invariante)

all'inizio del passo t_K: $\quad m\,\ddot{u}_K + c\,\dot{u}_K + K\,u_K = F_K(t_K) \quad \ominus$

alla fine del passo $t_{K+1} = t_K + \Delta t_K$: $\quad m\,\ddot{u}_{K+1} + c\,\dot{u}_{K+1} + K\,u_{K+1} = F_{K+1}(t_{K+1}) \quad \oplus$

$$m\,\Delta\ddot{u}_K + c\,\Delta\dot{u}_K + K\,\Delta u_K = \Delta F_K$$



"avanzamento" della soluzione nel passo temporale $\Rightarrow$

$$\ddot{u}_K = \ddot{u}_K + \Delta\ddot{u}_{K+1}$$

valori alla fine del passo

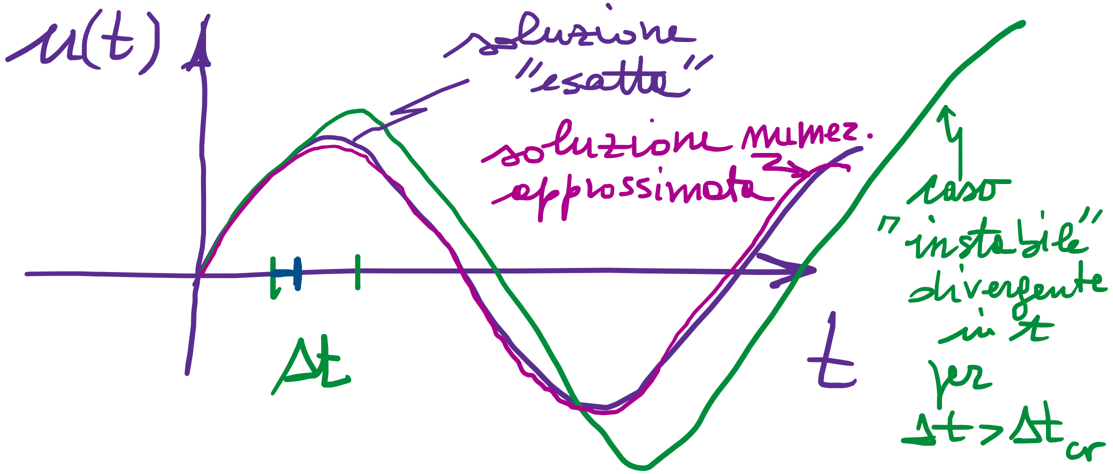
valori all'inizio del passo

incremento della risposta nel passo

- Metodo di integrazione: due aspetti fondamentali

  - stabilità del metodo (risposta non divergente o limitata in t al variare, crescere, di Δt)

    $\tilde{u}(t)$ di significato numerico e fisico (non esplode, diverge)



  - accuratezza del metodo (stima della vicinanza della soluzione approssimata, rispetto a quella reale)

- Inoltre, caratteristica del metodo
  - implicito (necessita della soluzione all'interno del passo) non avanza automaticamente
  - esplicito ("in avanti" – "forward") può richiedere passi molto piccoli (es. in dinamica veloce)

SOMMARIO (Lez. 09)

- Integrazione diretta dell'eq.ne del moto (nel dominio del tempo).
- Da sviluppo in serie di Taylor ⟹ differenze finite (approx. nel passo).
- Metodo dell'accelerazione lineare/media.
- Generalizzazione ⟹ Metodo di Newmark (famiglia di metodi).
- Implementazione in algoritmo numerico passo-passo.
- Caratteristiche (implicito/esplicito; accuratezza; stabilità numerica).

Next step: Introduzione (cenno) all'analisi nel dominio delle frequenze.

Sistemi MDOF (Multi Degree of Freedom Systems) ⟹ alias sistemi discreti a più gradi di libertà.