

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

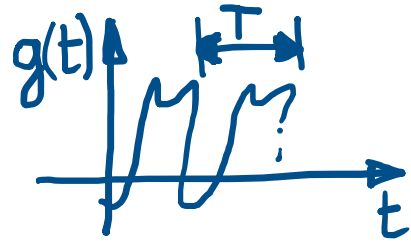
Dinamica(, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 10

Analisi nel dominio delle frequenze



forzante del sistema in TD
Time Domain

f.ne periodica di periodo T , $g \in P_T$

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{+i\omega_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) e^{-i\omega_n t} dt e^{+i\omega_n t}$$

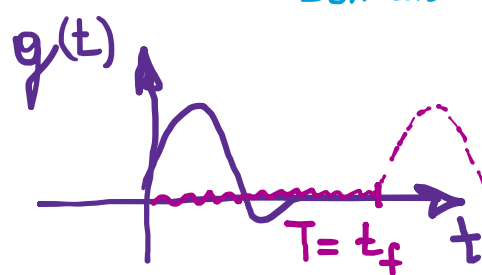
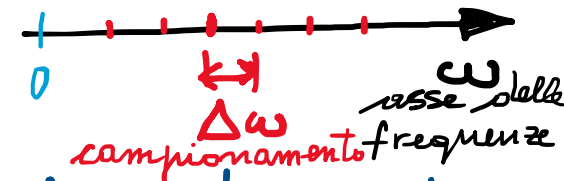
Sviluppo in serie di Fourier:

sovrapposizione di ∞ componenti armoniche a pulsazioni discrete, separate da $\Delta\omega$ finita

$$\frac{1}{T} = \frac{\Delta\omega}{2\pi}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T} = \Delta\omega$
pulsazione fundam.

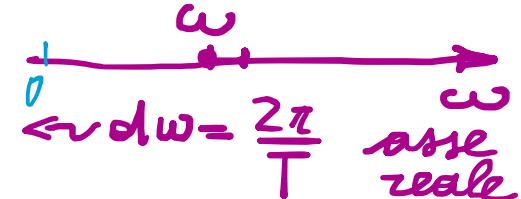
$$\omega_n = n\omega = n\Delta\omega$$



f.ne aperiodica $g \in P_\infty$ ($T \rightarrow \infty$)

$$g(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt e^{+i\omega t}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{d\omega}{2\pi}$$



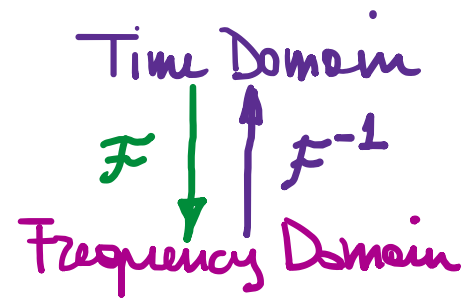
Trasformata di Fourier: $G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$

Antitrasform. di F.: $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$
trasf. inversa

CS di Dirichlet:

per $\exists$ una $\int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)| dt < +\infty$
 $\Rightarrow g(t) \in P_\infty$

sovrapposizione di ∞ componenti armoniche, di ampiezza $G(\omega)$, a pulsazioni continue, separate da $d\omega$ infinitesime.



nel dominio delle frequenze

Proprietà di $\mathcal{F}$ (di differenziaz.)

$$\frac{d^n}{dt^n}(-e^{i\omega t}) = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

proprietà di differenziazione della f. ne esponenziale (autosomiglianza della derivata)

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$\mathcal{F}(g(t))$

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{G(\omega)}_{\mathcal{F}(g(t))} (i\omega)^n e^{i\omega t} d\omega = \mathcal{F}^{-1}((i\omega)^n G(\omega)) \Rightarrow \boxed{\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right) = (i\omega)^n \mathcal{F}(g(t))}$$

Equazione del moto (SDOF): $q(t) \rightarrow u(t)$ TD

$$Ku = F_e \quad u = K^{-1} F_e$$

$$F_e = Ku \rightarrow \underbrace{K^{-1}}_{\text{cedevolezza}} F_e = u$$

$\mathcal{F}(m\ddot{u} + c\dot{u} + ku(t) = g(t))$
equazione differenziale

$G(\omega) \rightarrow U(\omega)$ FD

proprietà sistema dinamico relaz. algebrica con prodotto

$$m(i\omega)^2 U(\omega) + c(i\omega) U(\omega) + K U(\omega) = G(\omega)$$

equazione algebrica

$$(K - m\omega^2 + i c \omega) \cdot U(\omega) = G(\omega) \Rightarrow U(\omega) = \underbrace{(K - m\omega^2 + i c \omega)^{-1}}_{\text{cedevolezza}} G(\omega) = H(\omega) \cdot G(\omega) = U(\omega)$$

$i^2 = -1$
rigidezza in FD

$$\omega_1^2 = K/m$$

$$\frac{c}{m} = 2\zeta \omega_1$$

$$K \left(1 - \frac{m}{K} \omega^2 + i \frac{c}{K} \omega\right)$$

$$K \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_1^2} + i 2\zeta \omega_1 \frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

$$K \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i 2\zeta \frac{\omega}{\omega_1}\right) \Rightarrow H(\omega) = \frac{1}{K} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2 + i 2\zeta \frac{\omega}{\omega_1}}$$

frequency ratio $\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$

$$u_x = \frac{F=1}{K} \sim N\left(\beta = \frac{\omega}{\omega_1}\right)$$

N è il modulo di H

$H(\omega)$ Funzione di risposta in frequenza (FRF)
"cedevolezza" nel dominio delle Frequenze (FD) è f. ne complessa

ampiezza in FD della risposta a forzante armonica di ampiezza unitaria $u(t) = H(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$
 $g(t) = 1 e^{i\omega_0 t}$

(come visto per forzante armonica, di puls. $\omega = \omega_0$ e ampiezza 1)

INPUT

$q(t) = \int_{-\infty}^t q(\tau) \delta(t-\tau) d\tau$ $\swarrow$ delta di Dirac

Dominio del tempo

TD

$q(t) = 1 e^{i\omega_0 t}$

$q(t) = \delta(t)$

"filter"

Integrale di D.



OUTPUT

$u(t)$

f. la risposta ad impulso unitario

$u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(\tau) h(t-\tau) d\tau$

integrale di convoluzione (Duhamel)

$u(t) = H(\omega_0) e^{i\omega_0 t}$

$u(t) = h(t) = \frac{1}{m\omega_d} e^{-\gamma\omega_d t} \sin\omega_d t$

Dominio delle frequenze

FD

$G(\omega) = 1$

$q(\omega) = 2\pi \delta(\omega - \omega_0)$

$G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} q(t) e^{-i\omega t} dt$

$H(\omega) = \frac{U(\omega)}{G(\omega)}$

$U(\omega) = H(\omega) \cdot G(\omega)$

FRF (trasf. di Fourier di $h(t)$)

"cedevolezza" nel dominio delle frequenze

$U(\omega) = H(\omega)$

$U(\omega) = 2\pi H(\omega) \delta(\omega - \omega_0)$

$U(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) e^{-i\omega t} dt$

trasf. di Fourier delle $h(t)$

Concetti fondamentali:

• Analisi della risposta dinamica:

- Nel dominio del tempo:

INPUT: Forzante

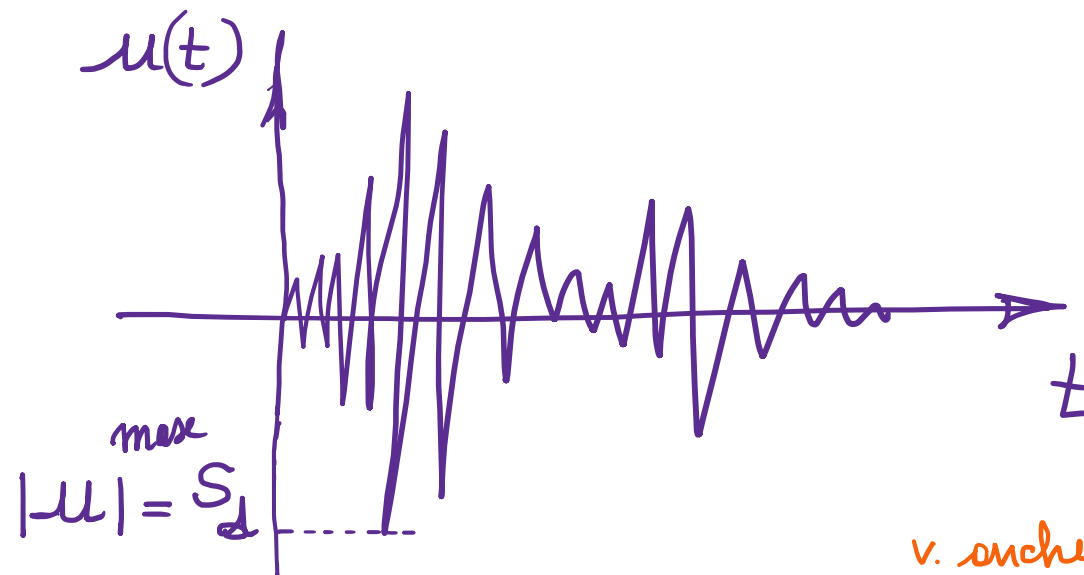
$q(t)$



SISTEMA

OUTPUT: Risposta

$u(t)$

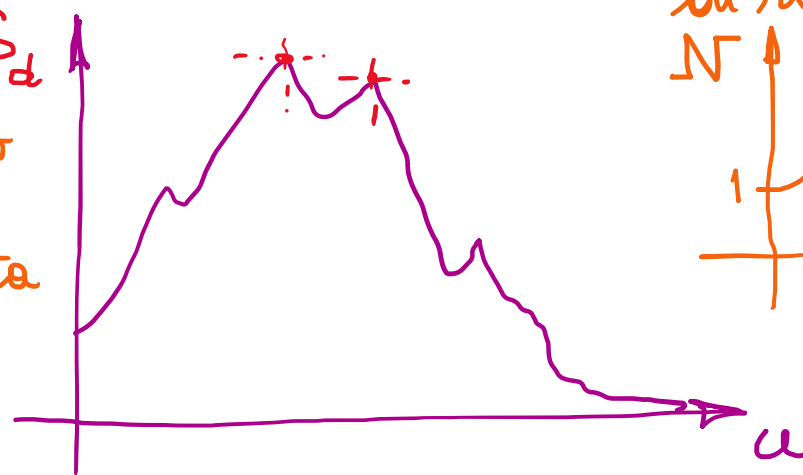


- Nel dominio delle frequenze:

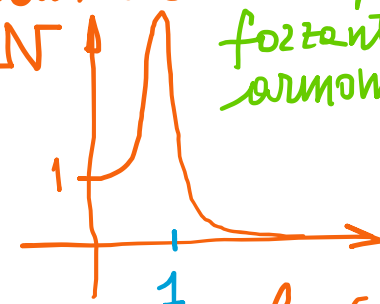
- freq. angolari, pulsaz. $\omega = 2\pi f$ [rad/s]
- " cicliche, $f = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz]

$$S_a = \omega_1^2 S_d$$

Spettro
di
risposta



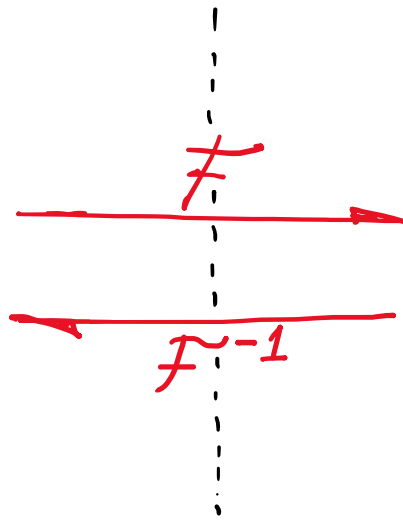
v. anche curve
di risonanza per
forzante
armonica



$$\beta = \frac{\omega}{\omega_1}$$

Dominio del Tempo

$g(t)$



Dominio delle Frequenze

$G(\omega)$

diretta
Trasformata di Fourier : $G(\omega) = \mathcal{F}(g(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$
della funzione $g(t)$

Trasformata inversa o
antitrasformata di
Fourier : $g(t) = \mathcal{F}^{-1}(G(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$

Proprietà di differenziazione: (della funzione esponenziale)

$$\frac{d}{dt} (e^{i\omega t}) = i\omega e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} () = \frac{d}{dt} (i\omega e^{i\omega t}) = (i\omega)^2 e^{i\omega t}$$

$$\frac{d^3}{dt^3} () = \frac{d}{dt} ((i\omega)^2 e^{i\omega t}) = (i\omega)^3 e^{i\omega t}$$

$$\mathcal{F}^{-1}: g(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

$$\frac{d^n}{dt^n} (e^{i\omega t}) = (i\omega)^n e^{i\omega t}$$

per
conseguenze

$$\mathcal{F}\left(\frac{d^n}{dt^n} g(t)\right) = (i\omega)^n \underbrace{\mathcal{F}(g(t))}_{G(\omega)}$$

$$\mathcal{F}: G(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{-i\omega t} dt$$

SOMMARIO (Lez. 10)

- Analisi nel dominio delle frequenze (FD).
- Trasformata di Fourier (generalizzazione di sviluppo in serie di Fourier, tramite intero o semi-asse delle frequenze).
- Trasformata di F. dell'eq. ne del moto $\Rightarrow U(\omega) = \underbrace{H(\omega)}_{FRF} \cdot G(\omega)$
risposta in FD tramite prodotto algebrico.
- Schema interpretativo di analisi, tra i livelli TD e FD, coi legami tra le f. in presenti. In particolare $H(\omega) = \mathcal{F}(h(t)) \approx N(\omega)$.

Next step: Sistemi dinamici a più gdl (MDOF)
(generalizzazione dei sistemi SDOF).