

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

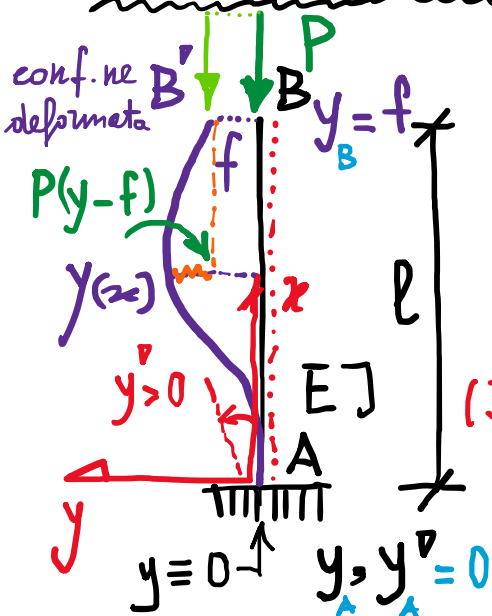
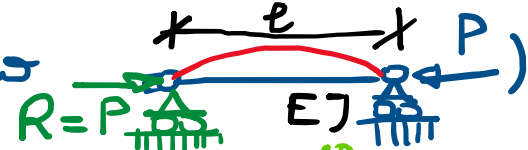
Dinamica(, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 21

Altre condizioni di vincolo (generalizzazione dell'asta di Eulero)



$$LE: \quad \underbrace{EJ}_{>0} y''''(x) = + M(x) \quad (\text{nella configurazione deformata})$$

$$= -P(y-f)$$

$$P_{cr}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

formule di Eulero

$$y'' + \frac{P}{EJ} y = \frac{P}{EJ} f \Rightarrow y(x) = \underbrace{A \sin \alpha x + B \cos \alpha x}_{\text{integ. gen. omog.}} + \underbrace{f}_{\text{integ. part.}}$$

$\alpha l = \frac{x}{l}$

$$P = \alpha^2 l^2 \frac{EJ}{l^2} = (\alpha l)^2 \frac{EJ}{l^2}$$

Scrittura e imposizione delle c.c.:

$$\begin{cases} y(0) = 0 \Rightarrow B + f = 0 \rightarrow B = -f \\ y'(0) = 0 \Rightarrow \alpha l A = 0 \\ y(l) = f \Rightarrow \sin \alpha l A + \cos \alpha l B + f = f \end{cases}$$

Sistema delle condizioni al contorno

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \alpha l & 0 & 0 \\ \sin \alpha l & \cos \alpha l & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ f \end{bmatrix} = 0$$

$D \quad \times$

($\times = 0$ soluz. "banale")

Soluzioni non banali
 $y \neq 0$ sse

$$\underbrace{\alpha l \cos \alpha l}_{\neq 0} = 0$$

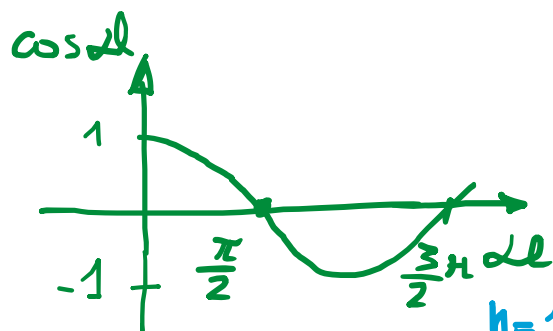
dispari $\leftarrow$

$$\alpha l = n \frac{\pi}{2} \quad n = 1, 3, 5, \dots$$

$$(\alpha l)^2 = n^2 \frac{\pi^2}{4} \Rightarrow P_{cr, n} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EJ}{l^2}$$

$$n=1 \quad P_{cr}^E = \frac{1}{4} \pi^2 \frac{EJ}{l^2} = \frac{1}{4} P_{cr, aE} = \pi^2 \frac{EJ}{l_{0, n}^2}; \quad l_{0, n} = \frac{2}{n} l \quad \text{lunghezza di libera inflessione}$$

conf. ne di rif.
(equilibrata)
condiz. di
singolarità:



- Soluzione e deformate critiche ($\mu \alpha l = n \frac{\pi}{2}$)

$$\begin{cases} B = -f \\ A = 0 \end{cases} \Rightarrow y_{cr,n}(x) = f \left(1 - \cos \frac{n\pi x}{2l} \right)$$

$$l_{0,n} = \frac{2l}{n}$$

$$y_{cr} = f \left(1 - \cos \frac{\pi x}{2l} \right)$$

$$l_0 = 2l$$

$$n = 1$$

$$l_0 = \frac{2}{3}l$$

$$n = 3$$

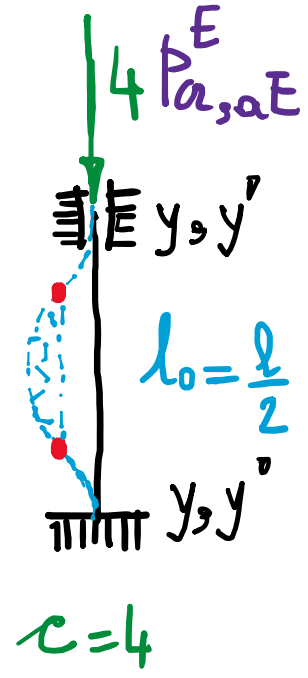
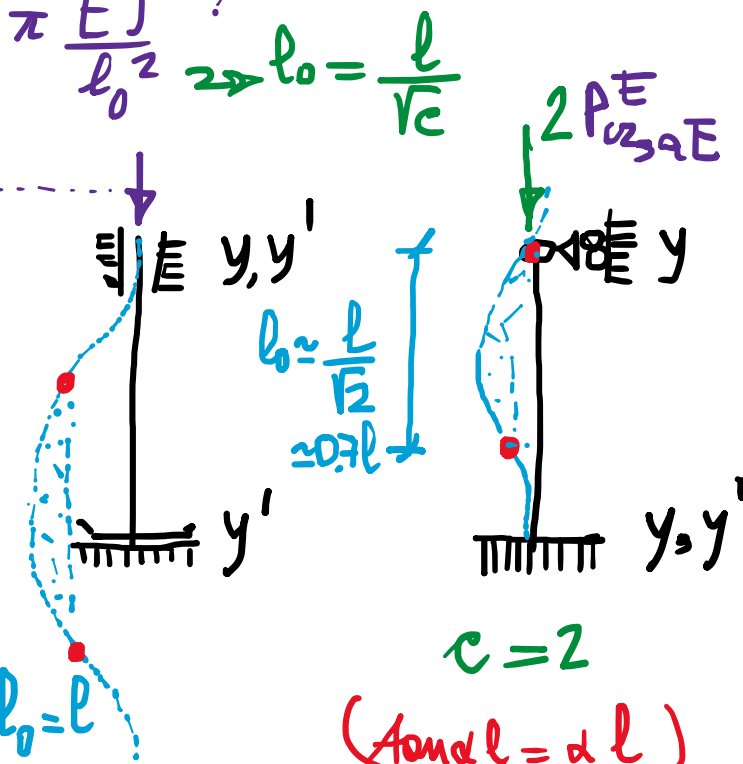
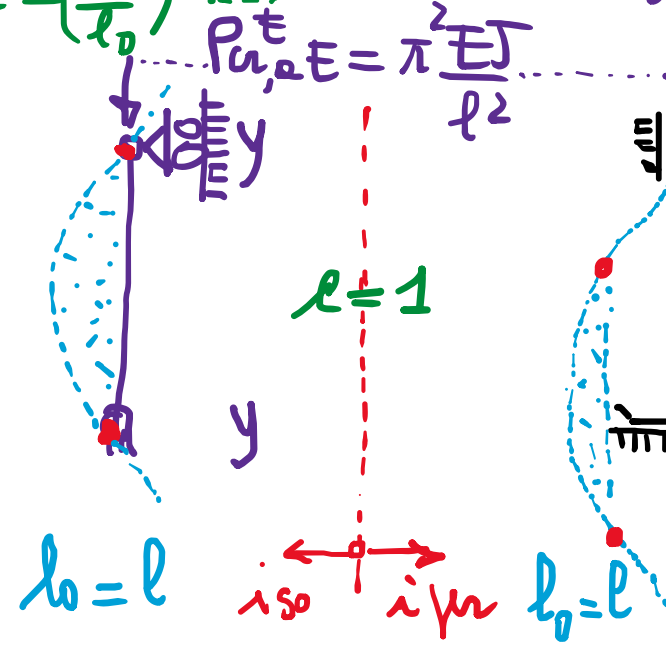
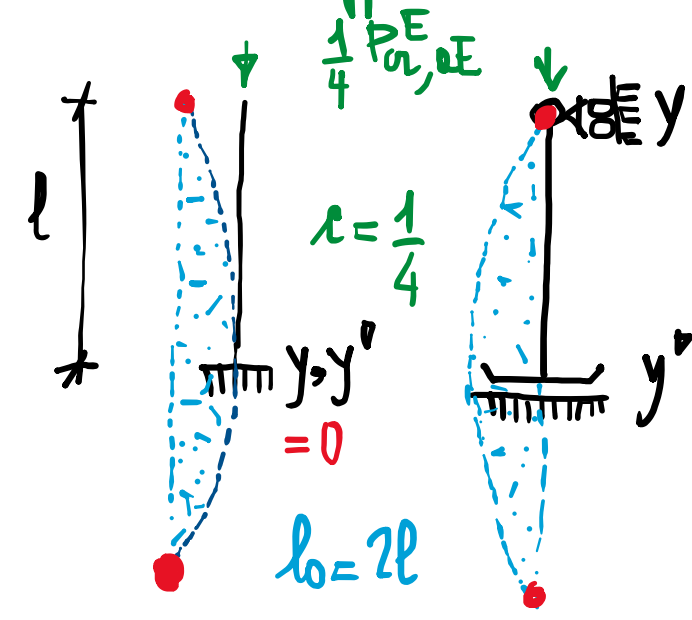
$$y_{cr,3} = f \left(1 - \cos \frac{3\pi x}{2l} \right)$$

$\Rightarrow$ nota la lunghezza di libera inflessione della deformata critica è noto il carico crit.

$$P_{cr} = n^2 \frac{\pi^2}{4} \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{l_{0,n}^2}$$

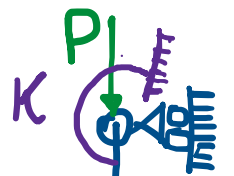
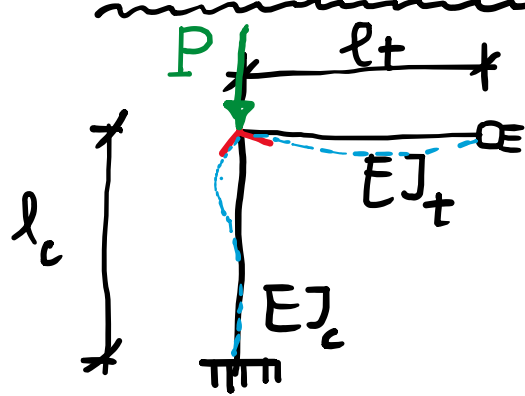
- Altre condizioni di vincolo: $P_{cr} = c \pi^2 \frac{EI}{l^2} = \pi^2 \frac{EI}{l_0^2} \Rightarrow l_0 = \frac{l}{\sqrt{c}}$

coeff. di vincolo $c = \left(\frac{l}{l_0} \right)^2$

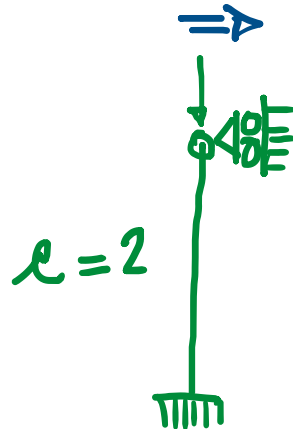


(Annull = αl)

- Telai a nodi fissi (solo rotazioni)



$$K = \frac{1}{\mu} \frac{EJ_c}{l_c}$$



$$l = 2$$

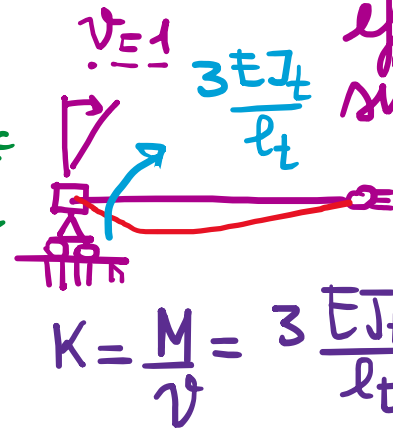
$$K = 0, \mu \rightarrow \infty$$

$$l \leq c \leq$$



$$l = 4$$

$$K \rightarrow \infty, \mu = 0$$



effetto flessionale della trave sulla colonna

$\frac{1}{\mu}$... coeff. di cedevolezza

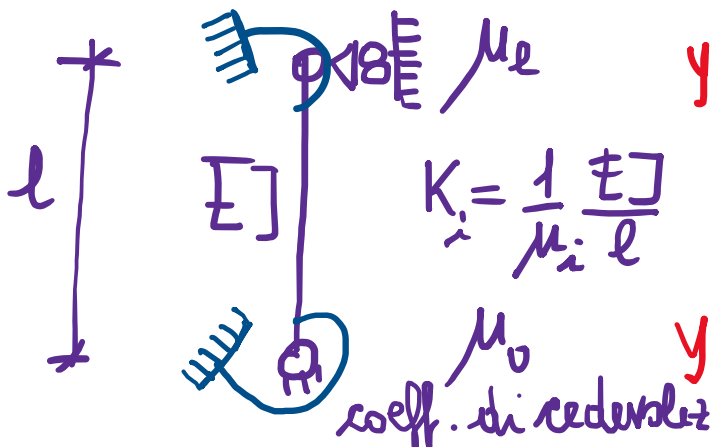
$$K = \frac{M}{\nu} = 3 \frac{EJ_t}{l_t} \left[\frac{EJ_c}{l_c} \right] \frac{l_c}{EJ_c} = \frac{1}{\frac{1}{3} \frac{EJ_c}{l_c} \frac{l_t}{l_c}} \frac{EJ_c}{l_c}$$

Es. $\mu_0 \rightarrow 0, \mu_e = \mu$

$$c_N = 2 \frac{0.4 + \mu}{0.2 + \mu} ; \frac{EJ_t}{l_t} = \frac{EJ_c}{l_c} \mu = 1/3$$

$$= \frac{11}{4} = 2.75$$

- Formule di Newmark:



$$K_i = \frac{1}{\mu_i} \frac{EJ}{l}$$

coeff. di cedevolezza

$$P_{cr} \approx c_N \pi^2 \frac{EJ}{l^2} \text{ (valori approx., err. } < 4\%)$$

$$c_N = \frac{(0.4 + \mu_0)(0.4 + \mu_e)}{(0.2 + \mu_0)(0.2 + \mu_e)}$$

- $\mu_i \rightarrow 0$ $c_N = 4$
 - $\mu_i \rightarrow \infty$ $c_N = 1$ (valori esatti in casi particolari)

Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza: $N=P$; $\sigma = \frac{N}{A} = \frac{P}{A} < \sigma_0$)

$$\sigma = \frac{P}{A} < \frac{P_{cr}^E}{A} = \sigma_{cr}^E \Rightarrow$$

$$\sigma_{cr}^E = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2} \left(\frac{1}{A} \right) r^2$$

$$r_{min} = \sqrt{\frac{J_{min}}{A}}$$

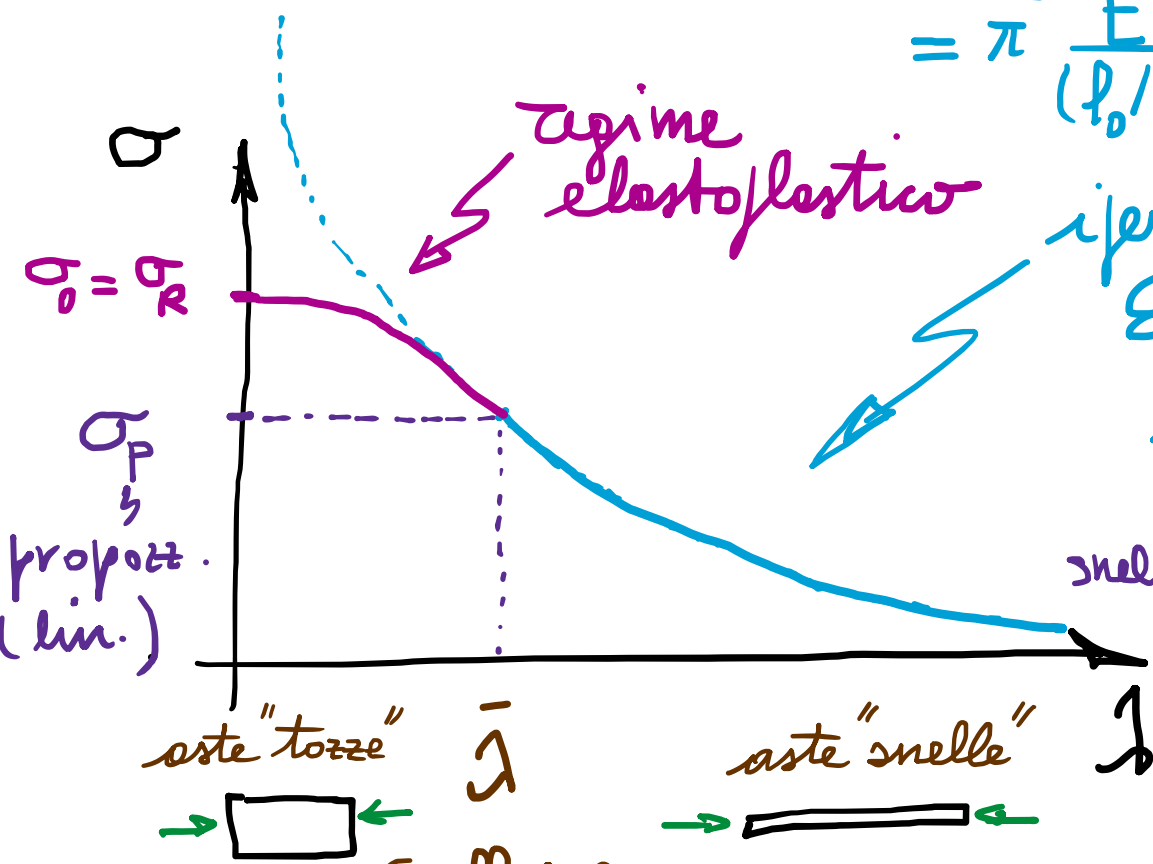
oppure raggio giratore d'inerzia
lunghezza e c.e.

$$= \pi^2 \frac{E}{(l_0/r)^2} = \pi^2 \frac{E}{\lambda^2} = \sigma_{cr}^E$$

$$\lambda = \frac{l_0}{r}$$

set. trasv.

snellezza (rapporto di)



iperbole di

Eulero (elastico lineare)

$$\pi^2 \frac{E}{\lambda^2}$$

come verifica di resist.

$$\sigma < \sigma_{cr}^E \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\sigma_0} \Rightarrow \frac{\sigma_0}{\sigma_{cr}^E} \sigma < \sigma_0$$

$$\omega = \frac{\lambda^2}{\pi^2} \frac{\sigma_0}{E}$$

Metodo "omega"

fattore di amplificazione del carico P

$$\omega \Rightarrow \sigma < \sigma_0 \Rightarrow \frac{P}{A}$$

(tabellato per

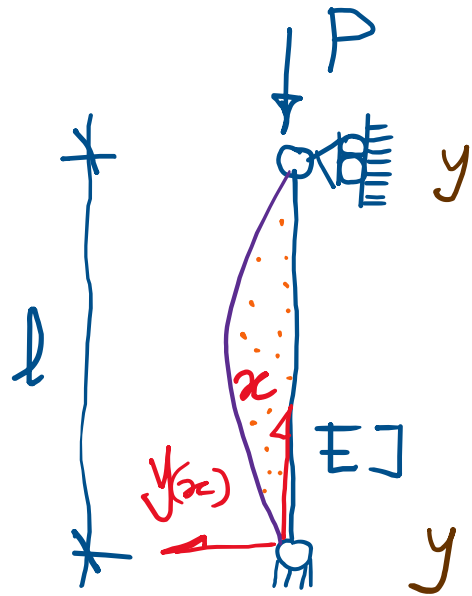
snellezza limite

$$\sigma_P = \pi^2 \frac{E}{\bar{\lambda}^2} \Rightarrow \bar{\lambda} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_P}} \approx \sqrt{10^4} = 100$$

acciaio

Concetti fondamentali :

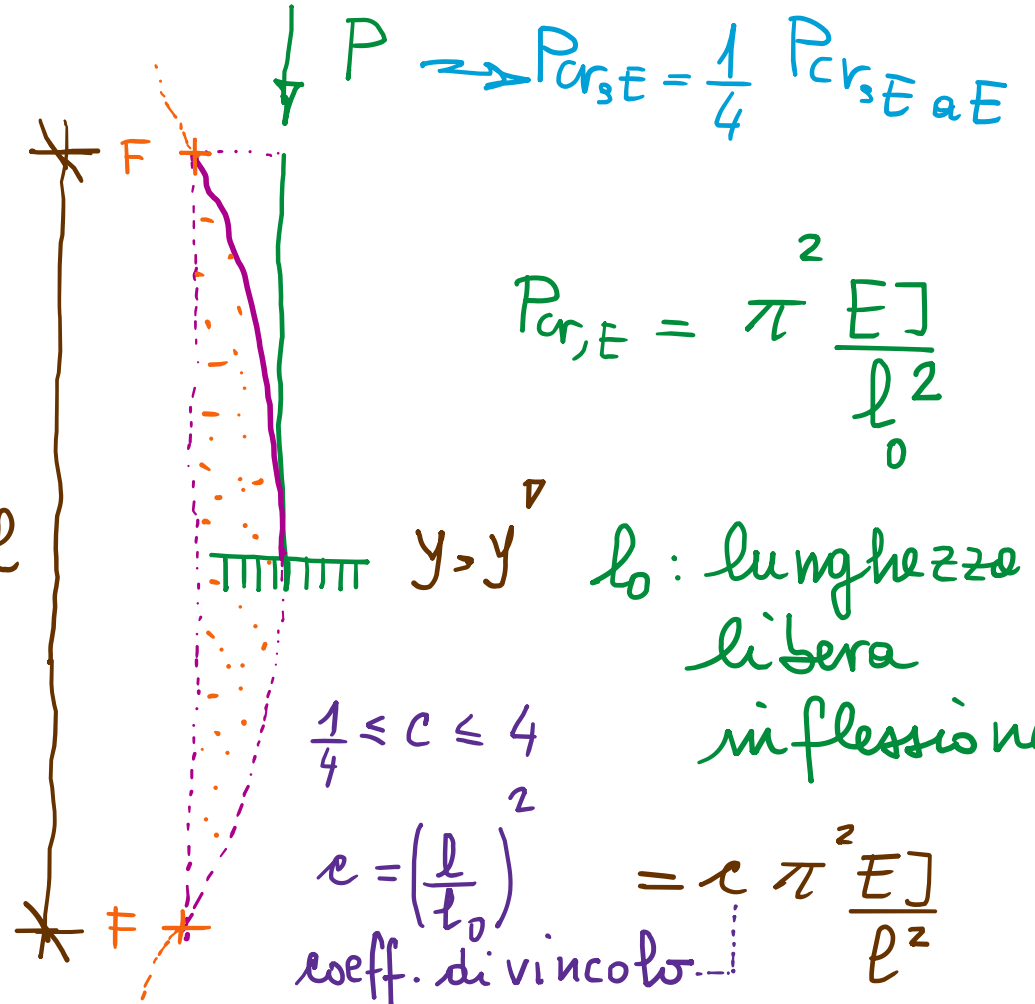
- Generalizzazione dell'analisi delle aste di Eulero per altre condizioni al contorno (c.c.), cioè di vincolo :



$$P_{cr,E} = \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$



$$l_0 = 2l$$



$$P_{cr,E} = \pi^2 \frac{EJ}{l_0^2}$$

l_0 : lunghezza di libera inflessione

$$\frac{1}{4} \leq c \leq 4$$

$$c = \left(\frac{l}{l_0} \right)^2 = c \pi^2 \frac{EJ}{l^2}$$

coeff. di vincolo

- Estensione per telai (a nodi fissi)

- Formula di Newmark (vincoli cedevoli elasticamente $\rightarrow$ molle rotazionali)

} Aste di Eulero generalizzate

- Verifica di stabilità (vs. verifica di resistenza)

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_{cr} = \frac{P_{cr}}{A}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \leq \sigma_0$$

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{cr}}{\omega/\omega_0} \sigma_0$$

$$\frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\sigma \leq$$

$$\sigma_0$$

$$(\text{Metodo "omega"}) \rightarrow \omega \frac{P}{A} \leq \sigma_0$$

ω coeff. amplificativo di P (ai fini dell'instabilità)

SOMMARIO (Lec. 21)

- Aste incastrate e generalizzazione ad altre condizioni di vincolo.
- Coefficiente di vincolo, lunghezza di libera inflessione.
- Telai a nodi fissi: effetto flessionale delle travi condensato in molle rotazionali (elementi a deform. elastica concentrata).
- Formule di Newmark per travi appoggiate (errori contenuti).
- Verifica di stabilità (può essere interpretata come verifica di resistenza con esico amplificato di fattore $\omega \rightarrow$ "Metodo omega").
- Fine Instabilità delle Strutture - (2^a parte).

Next step: Anelasticità (plasticità) delle Strutture (3^a parte).
Comportamento elastoplastico del materiale.