

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

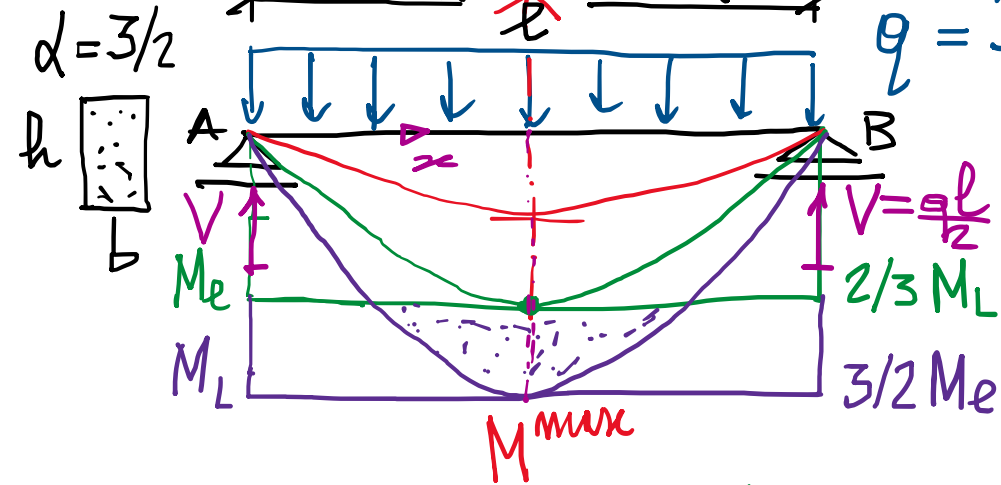
Dinamica(, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture
(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 25

Trave appoggio-appoggio, con carico distribuito $\rightarrow$ poi incastro-incastro (IPER)



$$M(x) = \frac{ql}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$= \frac{ql^2}{2} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right)$$

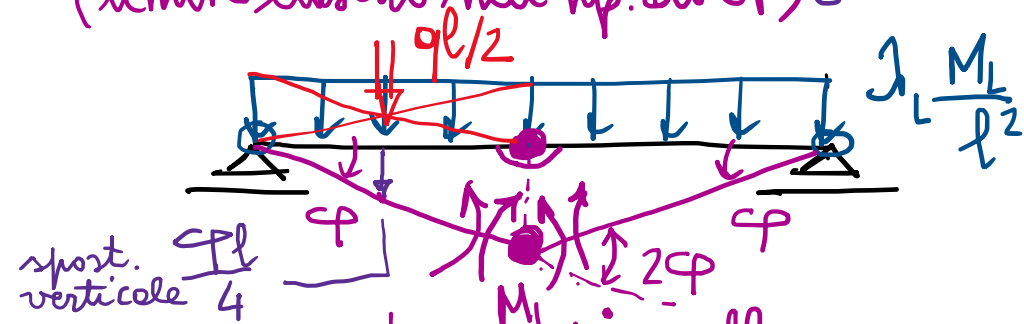
$$M^{\max} = \frac{ql^2}{8} = \frac{1}{8} M_L$$

$$x = \frac{l}{2} \Rightarrow \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{4-2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$$

$$= \frac{I_A^2}{2q} = \left(\frac{ql}{2} \right)^2 \frac{1}{2q} = \frac{ql^2}{8}$$

• Limite elastico: $M^{\max} = \frac{1}{8} M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow \lambda_e = \frac{16}{3} = 5.3$ (Regime el. $0 \leq \lambda \leq \lambda_e$)

• Collasso plastico: $M^{\max} = \frac{1}{8} M_L = M_L \Rightarrow \lambda_E = \lambda_L = 8 = \frac{24}{3}$ (Regime EP $\lambda_e \leq \lambda \leq \lambda_L$)
(limite elastico nell'ip. di CP) 8 [+50% rispetto a λ_e]



PLV: $L_e = 2 \left(\frac{ql}{2} \right) \frac{l}{4} = L_{ip} = D = M_L 2 \frac{l}{4}$

$$\lambda_L = \frac{D}{L_{eo}} = \frac{2 M_L \frac{l}{4}}{\frac{q_0 l^2}{4}} = 8 \text{ (come volevasi dim.)}$$

meccanismo di collasso di trave
(arco e tre cerniere allineate)

equilibrio e collasso incipiente

(il moltiplicatore di collasso λ_L può agevolmente essere determinato, noto il meccanismo di collasso, via PLV)

Risposta elastoplastica (analisi evolutiva)

"Fracce"

elastische: $\rightarrow \overset{\text{max}}{f} = \frac{1}{24} \frac{q l^3}{EI}$, $f^{\text{max}} = \frac{5}{384} \frac{q l^4}{EI}$

Quindi, in campo elastico:

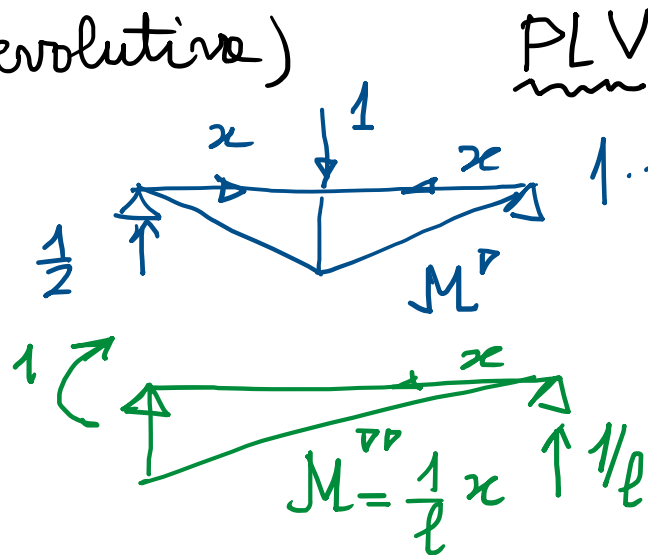
$$\bar{f} = \frac{5}{384} \lambda \frac{M_L l^2}{EJ} \rightarrow \bar{f} = \frac{5}{384} \lambda \rightarrow \frac{\lambda}{\bar{f}} = \frac{384}{5}$$

$$\bar{f}_e = \frac{5}{24} \frac{384}{3} = \frac{5}{72}$$

$$\bar{f}_E = \frac{5}{384} \cdot 8 = \frac{5}{48}$$

Diagramma forza-spostamento (A-A) $\rightarrow$
 multipl. del carico-freccia $(1-\bar{f})$

Risposta evolutiva elastoplastica non-lineare,
per non-linearità di materiale.



PLV

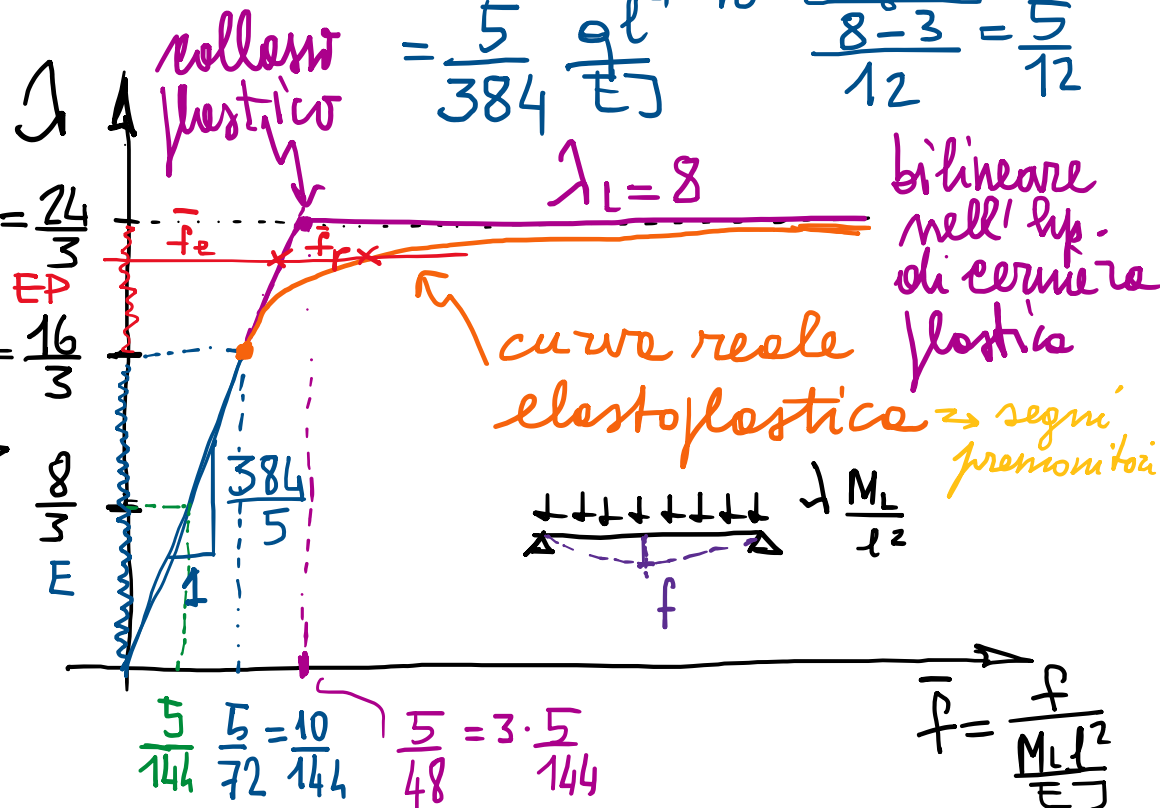
$1 \cdot f_e^{\max} = 2 \int_0^{\frac{l}{2M}} \frac{1}{z} \cdot \frac{ql}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \frac{dx}{EJ}$

$= \frac{1}{2} \frac{ql^2}{EJ} \left(\frac{1}{l} \frac{1}{3} \frac{l}{8} - \frac{1}{l} \frac{1}{4} \frac{l}{16} \right)$

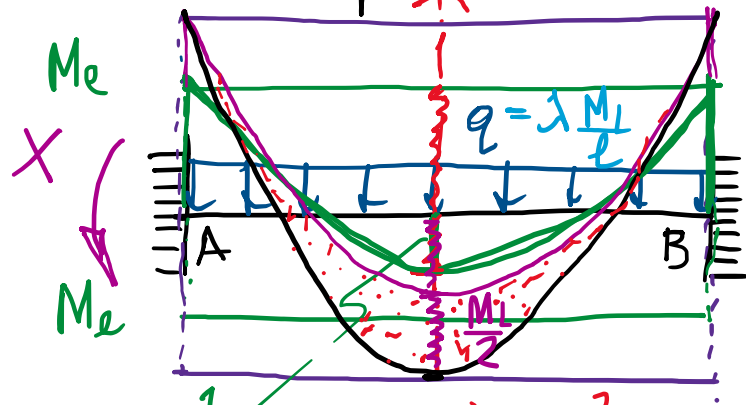
$= \frac{1}{2} \frac{ql^4}{EJ} \frac{1}{16} \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} \right)$

$= \frac{5}{384} \frac{ql^4}{EJ}$

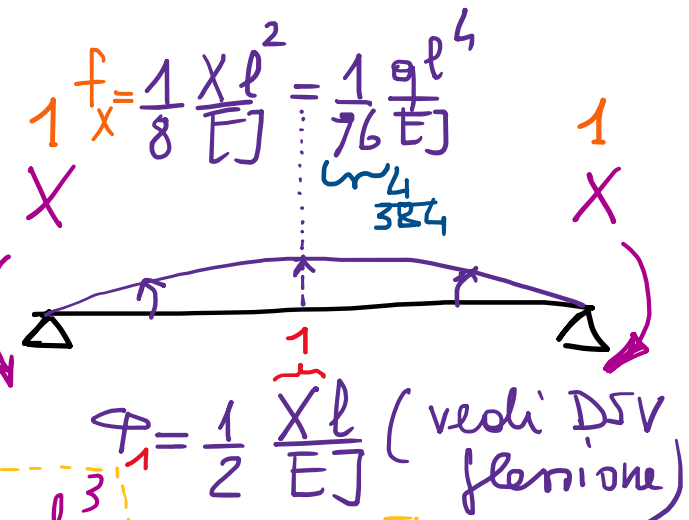
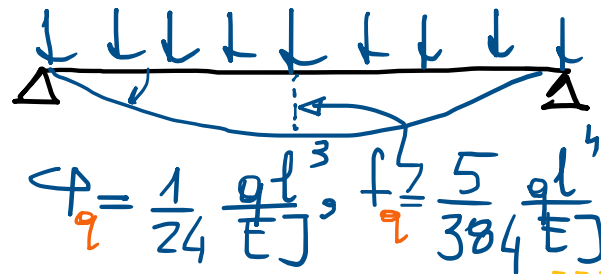
collar
flexico



Strutture iperstatiche (trave doppiamente incastrata)



$$M_{el.}^{L_{max}} = \frac{ql^2}{12} = \frac{2}{24} ql^2 = \frac{1}{12} M_L$$



$$\frac{ql^3}{24} = \frac{1}{24} M_L$$

$$\frac{ql^2}{8} = \frac{3}{24} ql^2$$

$\Phi = 0 \Rightarrow 0 = \Phi_q - \Phi_1 X \Rightarrow$
eq. in di cong.

$$X = \frac{\frac{1}{24} \frac{ql^3}{EJ}}{\frac{1}{2} \frac{l}{EJ}} = \frac{1}{12} ql^2$$

$$f_{tot} = \frac{5-4}{384} \frac{ql^4}{EJ} = \frac{1}{384} \frac{ql^4}{EJ}$$

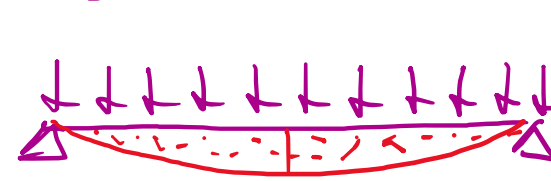
Limite elastico: $\frac{\lambda_e}{12} M_L = M_e = \frac{2}{3} M_L \Rightarrow \lambda_e = 8$

Momento limite: $\frac{\lambda_E}{12} M_L = M_L$
in A e B

$\lambda_E = 12$ (limite elastico nell'ip. di C.P.)

N.B.: Il momento può ancora crescere in campo, sino ad M_L , mediante ridistribuzione di sforzi (dei momenti), mentre si producono deform. plastiche nelle trave (localizzate in A e B nell'ip. di C.P.).

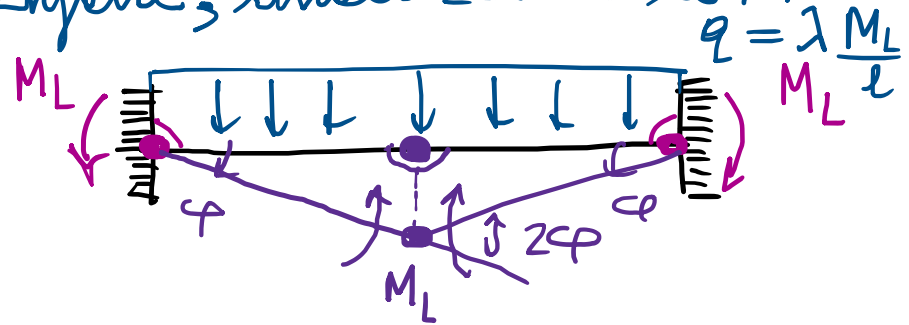
$$\Delta \lambda \Rightarrow M^{max} = M_L \Rightarrow \Delta M = \frac{M_L}{2} = \frac{\Delta \lambda}{8} M_L$$



$$\Delta q = \Delta \lambda \frac{M_L}{l^2} \Rightarrow \Delta M^{max} = \frac{\Delta q l^2}{8} = \frac{\Delta \lambda}{8} M_L \Rightarrow \Delta \lambda = \frac{8}{2} = 4$$

$$+ 33\% \Rightarrow \lambda_L = 16$$

• Infatti, analizzando il meccanismo di collasso:

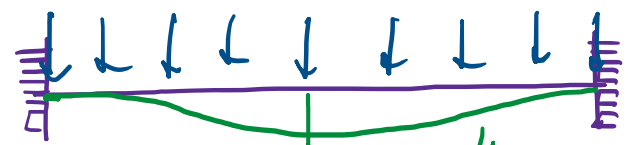


PLV: $f_L = 2 f_{e0} = D = f_{ip}$

$\lambda_L = \frac{D}{f_{e0}} = \frac{4 M_L \phi}{\frac{1}{4} M_L \phi} = 16$

raddoppio di dissipazione plastica D , a parità di f_{e0} , rispetto a ISO

• Risposta evolutiva elastoplastica:



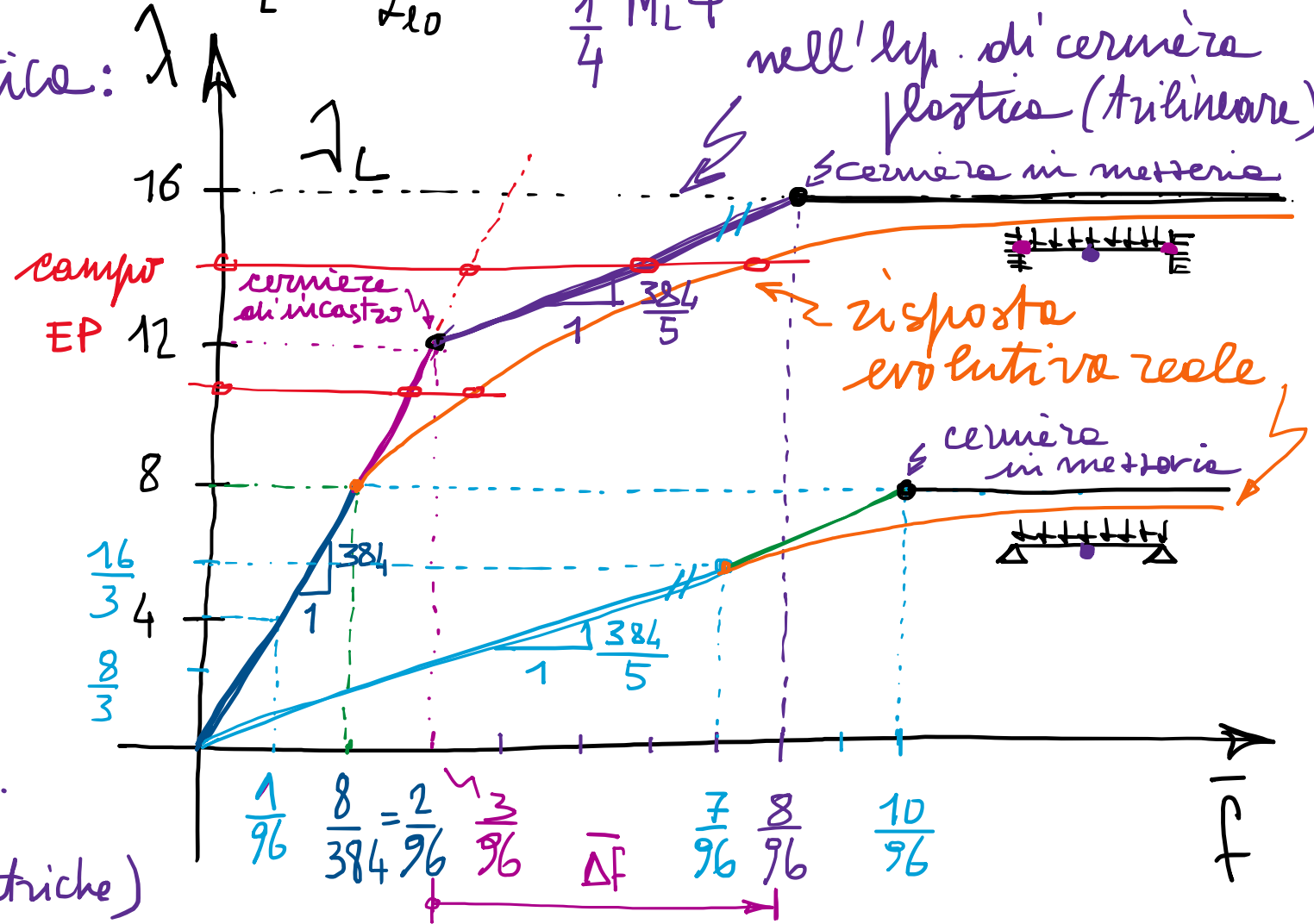
$\Delta \bar{f} = \frac{5}{384} \Delta \lambda = \frac{10}{384} = \frac{5}{96}$

$f = \frac{1}{384} \frac{q l^4}{EJ}$

$f = \frac{1}{384} ; \quad \frac{1}{f} = 384$

N.B.: - rigidità elastica 5 volte
- multipl. collasso 1 volta

Guadagno ottenibile con sole e.c. (di vincolo) e parità di proprietà intrinseche (di materiale e geometriche)



Concetti fondamentali:

- Gerarchia di approcci nell'analisi elastoplastica delle strutture:

- determinazione della risposta EP completa, in termini di forze e spostamenti (curva $P-\Delta$ non-lineare) -

- tracciamento delle risposte evolutive EP, lineare a tratti, nell'ipotesi di cerniera plastica (curva $P-\Delta$ "piece-wise linear"), con sottostime dell'entità delle deformazione e valutazione corretta dei valori di carico corrispondenti alla sequenza di attivazione delle CP, sino a raggiungere la situazione di collasso plastico.

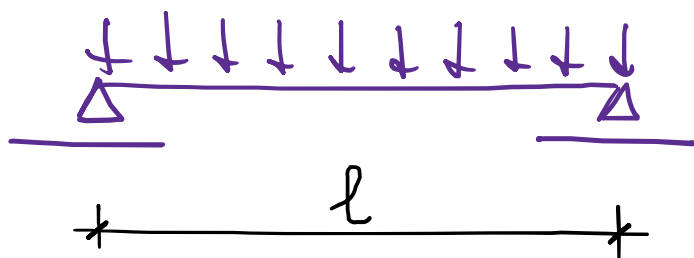
- individuazione delle sole caratteristiche di collasso plastico, in termini di: moltiplicatore (dei carichi) di collasso e corrispondente meccanismo di collasso (incipiente). $\Rightarrow$ "metodi diretti"

ANALISI

- Illustrazione mediante esempio emblematico (differenza della risposta in campo elastoplastico):

$$q = \lambda \frac{M_L}{l^2}$$

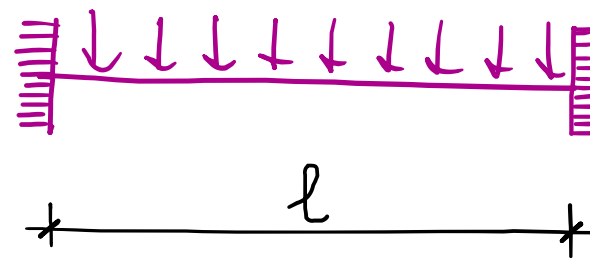
vs.



trave appoggio-appoggio

ISO

(staticamente determinata)



trave incastro-incastro

I PER

(staticamente indeterminata)

SOMMARIO (Lec. 25)

- Analisi evolutiva trave appoggio-appoggio con q ($\lambda - \bar{f}$ bilineare): collasso all'attivazione della prima cerniera plastica in mezzeria (non risorse ulteriori); λ_L agevolmente determinato (via PLV), nonostante sottostima deformazione EP.
- Analisi evolutiva trave incastro-incastro con q (trilineare): sequenza di attivazione delle cerniere plastiche (due istanze di apertura); ulteriori risorse portanti da ridistribuzione di sforzo per sviluppo di deformazioni plastiche, a carico crescente.
- Confronto: moltiplicatore di collasso doppio (+100%); rigidità elastica iniziale quintupla (rigidità successive uguali a quelle del caso precedente, all'apertura delle cerniere plastiche alle estremità incastrate).
- In genere, informazione essenziale è collasso plastico (meccanismo e moltiplicatore) vs. analisi evolutiva.

Next step: Teoremi fondamentali dell'Analisi Limite (calcolo a rottura dei telai), per stima del collasso plastico - Esempi.