Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

LM-24 Ingegneria delle Costruzioni Edili

Dinamica (, Instabilità) e Anelasticità delle Strutture

(ICAR/08 - SdC ; 6 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 12

Modi principali di vibrare e oscillazioni libere (di sistemi dinamici MDOF)

- Eq.ni del moto ("eq. dinamico" o eq.ni di Lagrange): [n eq.ni accoppiate] n: n° di gdl

es. $\mathbb{K}$ non diagonale

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\ddot{q} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{q(t)} = \underbrace{Q = 0}_{n\times 1} \qquad \left[\begin{matrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{matrix}\right. \text{c.i.}$$

$q(t)$: coordinate lagrangiane (gdl "fisici" del sistema dinamico)

- Soluzioni in termini di moto armonico:

$$q = \phi_i \sin(\omega_i t + \psi_i) = \phi_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = \phi_i (A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t)$$

modi principali di vibrazione

ω_i: pulsazione modale

ϕ_i: vettore di ampiezze forma modale

$$\dot{q} = \omega\,\phi\cos(\omega t + \psi)$$

$$\ddot{q} = -\omega^2 \underbrace{\phi\sin(\omega t + \psi)}_{q(t)} = -\omega^2 q(t)$$

$$\mathbb{A}x = \lambda\,\mathbb{B}x \quad \begin{cases} \lambda \text{ autovalore} \\ x \text{ autovettore} \end{cases}$$

Problema agli autovalori (generalizzato)

- Sostituendo nelle eq.ni del moto:

$$(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})\,\phi\,\cancel{\sin(\omega t + \psi)} \overset{\forall t}{=} 0 \Rightarrow (\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M})\,\phi = 0; \quad \boxed{\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2\,\mathbb{M}\phi_i} \begin{cases} \omega_i^2 \text{ autovalore} \\ \phi_i \text{ autovettore} \end{cases}$$

- soluzioni non banali sse: $\phi \neq 0$

$$0 = \det(\mathbb{K} - \omega^2\mathbb{M}) = \underbrace{a_n(\omega^2)^n + a_{n-1}(\omega^2)^{n-1} + \dots + a_2\omega^2 + a_1}_{\text{polinomio caratteristico associato a } \mathbb{K} \text{ e } \mathbb{M} \text{ grado } n} = 0$$

eq.ne caratteristica

- n soluz. ω_i^2: $\omega_1^2 \le \omega_2^2 \le \dots \le \omega_i^2 \le \dots \le \omega_n^2$

1° modo; n° modo (ultimo modo); $\omega \uparrow$

ω_i pulsazione propria o naturale del sistema; periodo proprio $T_i = \frac{2\pi}{\omega_i} = \frac{1}{f_i}$

$T_1 \ge T_2 \ge \dots \ge T_i \ge \dots \ge T_n$ $\quad T\downarrow$

Proprietà delle autosoluzioni:

- ω_i^2 reali e positivi $\Rightarrow$ $\omega_i = \sqrt{\omega_i^2} > 0$ reali (in genere distinti per sistemi strutturali reali)

$\mathbb{K}, \mathbb{M}$ (reali) e definite positive simmetriche

- a due autovalori distinti corrisp. due autovettori mutuamente perpendicolari rispetto alle matrici $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$:

$$\sum_i \phi_{r_i} \cdot \phi_{s_i} = \phi_r^T \mathbb{I} \, \phi_s = 0$$

matrice identità $n \times n$

hp. $\omega_r \neq \omega_s$

$$\omega_r : \quad \phi_s^T \left(\mathbb{K} \phi_r = \omega_r^2 \mathbb{M} \phi_r \right)$$
$$\omega_s : \quad \phi_r^T \left(\mathbb{K} \phi_s = \omega_s^2 \mathbb{M} \phi_s \right) \quad -$$

$$\phi_s^T \mathbb{K} \phi_r - \phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \omega_r^2 \phi_s^T \mathbb{M} \phi_r - \omega_s^2 \phi_r^T \mathbb{M} \phi_s$$

$$0 = \phi_r^T \mathbb{K}^{(T)} \phi_s - {}'' = \omega_r^2 \phi_r^T \mathbb{M}^{(T)} \phi_s - {}'' = \underbrace{(\omega_r^2 - \omega_s^2)}_{\neq 0 \text{ per hp.}} \boxed{\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = 0}$$

(proprietà chiave è la simmetria delle matrici strutturali $\mathbb{M}$ e $\mathbb{K}$)

$$\boxed{\phi_r^T K \phi_s = 0}$$

- quindi, presi due autovettori ϕ_r, ϕ_s:

$$\phi_r^T \mathbb{M} \phi_s = \delta_{rs} M_r \begin{cases} r = s & M_r = \phi_r^T \mathbb{M} \phi_r > 0 \quad (\delta_{rs} = 1) \\ r \neq s & 0 \quad (\delta_{rs} = 0) \end{cases}$$

δ_{rs}: delta di Kronecker

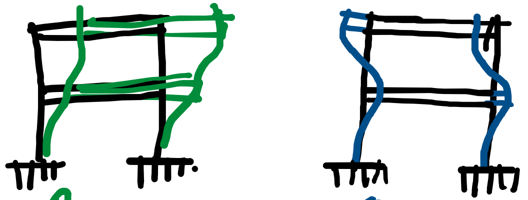
M_r: massa modale

;

$$\phi_r^T \mathbb{K} \phi_s = \delta_{rs} K_r \begin{cases} r = s & K_r = \phi_r^T \mathbb{K} \phi_r > 0 \\ r \neq s & 0 \end{cases}$$

K_r: rigidezza modale

- Pertanto: ϕ_i autovettori $\Rightarrow$ forme modali



1° modo ω_1 — 2° modo ω_2

$$\phi_i^T \left(\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i \right) \Rightarrow \underbrace{\phi_i^T \mathbb{K}\phi_i}_{K_i} = \omega_i^2 \underbrace{\phi_i^T \mathbb{M}\phi_i}_{M_i}$$

MDOF — SDOF

$$\tilde{\omega}_i^2 = \frac{\frac{1}{2}\tilde{\phi}_i^T \mathbb{K}\tilde{\phi}_i}{\frac{1}{2}\tilde{\phi}_i^T \mathbb{M}\tilde{\phi}_i} = \frac{\mathcal{E}_i^*}{T_i^*} = \frac{K_i}{M_i} \Rightarrow \omega_i = \sqrt{\frac{K_i}{M_i}} \longleftrightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Rapporto di Rayleigh (in dinamica)

$\dfrac{\text{En. elastica}}{\text{En. cinetica}}$ modo i

stime degli autovettori $\tilde{\phi}_i$ (buona stima della pulsazione propria)

- Autovettori: $(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\phi_i = 0 \Rightarrow \phi_i$, noti gli ω_i^2

- Forme standard: $(\mathbb{A}x = \lambda \mathbb{I} x)$

forme generalizzate $\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i$

- $\underbrace{\mathbb{K}^{-1}\mathbb{M}}_{\mathbb{G}}\phi_i = \dfrac{1}{\omega_i^2}\phi_i$

- $\underbrace{\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K}}_{\mathbb{H}}\phi_i = \omega_i^2\phi_i$

$\mathbb{G} = \mathbb{H}^{-1}$; $\mathbb{H} = \mathbb{G}^{-1}$ (def. pos. ma non simm.)

(comunque autovalori reali, poiché matrici sorgenti simmetriche)

– Normalizzazione degli autovettori $\phi_i \Rightarrow \alpha\,\phi_i$ è autov. (definito a meno di costante arbitraria)

- $1 = \|\phi_i\| = \sqrt{\phi_i^T \mathbb{I}\, \phi_i} = \sqrt{\sum_k \phi_{ik}^2} = 1$, $\phi_i \Rightarrow \dfrac{\phi_i}{\|\phi_i\|}$ versore $\qquad \dfrac{\cancel{\alpha}\,\phi_{i2}}{\cancel{\alpha}\,\phi_{is}}$ invariante
- $1 = M_i = \phi_i^T \mathbb{M}\, \phi_i$ massa modale unitaria
- $1 = K_i = \phi_i^T \mathbb{K}\, \phi_i$ rigidezza " "
- sistemi dinamici tipici $\phi_{ik} = 1$ < es. k ultimo piano $k=n$ / primo " $k=1$ (telai shear-type)

– Notazione matriciale

$$\underset{n\times n}{\Phi} = [\,\phi_1 \,\vdots\, \phi_2 \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \underset{n\times 1}{\phi_i} \,\vdots\, \cdots \,\vdots\, \phi_n\,]$$ matrice degli autovettori (per colonne)

$\Phi_{ki} = \phi_{ik}$ comp. k di autov. ϕ_i

$$\underset{n\times n}{\Omega^2} = \mathrm{diag}[\omega_i^2] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 & & & & \\ & \omega_2^2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \omega_i^2 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & \omega_n^2 \end{bmatrix}$$ matrice degli autovalori

(è matrice diagonale)

- $\mathbb{K}\phi_i = \omega_i^2 \mathbb{M}\phi_i = \mathbb{M}\phi_i\omega_i^2$ $\Rightarrow$ $\Phi^T\left(\boxed{\mathbb{K}\Phi = \mathbb{M}\Phi\Omega^2}\right)$

n modi unitamente rappresentati (tramite Φ e Ω^2)

$i = 1, 2, \ldots, n$
numero del modo

riscrittura del pb. agli autovalori generalizzato originario, per tutti i modi $i = 1, n$, tramite matrici degli autovettori Φ e degli autovalori Ω^2

$$\underbrace{\Phi^T K \Phi}_{} = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{} \Omega^2$$

matrici modali $\mathcal{K} = \mathrm{diag}[K_i]$ di rigidezza, $\mathcal{M} = \mathrm{diag}[M_i]$ di massa

$$\Omega^2 = \mathcal{M}^{-1}\mathcal{K} = \mathrm{diag}\left[\omega_i^2 = \frac{K_i}{M_i}\right]$$

trasformazione di coordinate

- Coordinate principali (significato matematico)

$$\ddot{q} = \sum_i \phi_i \ddot{p}_i = \Phi\ddot{p} \qquad (p = \Phi^{-1}q)$$

comb. lineare

(comp. di q nella base degli autovett.)

Anche $p = (\underbrace{\Phi^T \mathbb{M}\Phi}_{\mathcal{M}})^{-1}\Phi^T \mathbb{M} q$ $\Rightarrow$ $p_i = \dfrac{\phi_i^T \mathbb{M} q}{\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{M_i}}$

Φ invertibile se autovalori distinti (autovettori lin. indip.)

- Disaccoppiamento delle eq.ni del moto

$$\mathbb{M}\ddot{q} + \mathbb{K}q = Q \Rightarrow \Phi^T\left(\mathbb{M}\Phi\ddot{p} + \mathbb{K}\Phi p = Q\right)$$

$$\underbrace{\mathcal{M}}_{\mathrm{diag}[M_i]}\ddot{p} + \underbrace{\mathcal{K}}_{\mathrm{diag}[K_i]}p = \Phi^T Q = \mathbb{P} \longleftrightarrow M_i\ddot{p}_i + K_i p_i(t) = \phi_i^T Q = P_i(t)$$

n eq.ni disaccopp.

$\forall$ modo i

• Oscillazioni libere: $\overset{\text{condizioni iniziali}}{q_0 \,;\, \dot{q}_0}$ (composizione di n moti armonici)

$$M\ddot{q} + Kq = 0 \Rightarrow q(t) = \sum_i \phi_i \left(A_i \sin\omega_i t + B_i \cos\omega_i t\right)$$

$$q(0) = \sum_i \phi_i B_i = \Phi \mathbb{B} \Rightarrow \mathbb{B} = \Phi^{-1} q_0$$

$\{B_i\}$

Le $\omega_i A_i$ sono le p_i di $\dot{q}_0$

$$\Phi^T M q_0 = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \mathbb{B} \rightarrow \boxed{\mathbb{B} = m^{-1} \Phi^T M q_0}$$

Le B_i sono le p_i di q_0

$$B_i = \frac{\phi_i^T M q_0}{\underbrace{\phi_i^T M \phi_i}_{M_i}}$$

Analogamente:

$$\dot{q}_0 = \sum_i \phi_i \omega_i A_i = \Phi \Omega \mathbb{A}$$

$\{A_i\}$

$$\mathbb{A} = (\Phi\Omega)^{-1} \dot{q}_0 = \Omega^{-1} \Phi^{-1} \dot{q}_0$$

$$\Phi^T M \dot{q}_0 = \underbrace{\Phi^T M \Phi}_{m} \Omega \mathbb{A}$$

Φ^{-1}

$$\boxed{\mathbb{A} = (m\Omega)^{-1} \Phi^T M \dot{q}_0 = \Omega^{-1} m^{-1} \Phi^T M \dot{q}_0}$$

N.B.: $q_0 = \phi_j \left\langle \begin{array}{ll} B_j = 1 & i=j \\ B_i = 0 & i \neq j \end{array} \right.$

Il sistema, rilasciato ($\dot{q}_0 = 0$) dal modo j, vibra solo secondo tale modo (selezione del generico modo di vibrare).

Concetti fondamentali:

- Caratteristiche intrinseche vibrazionali di sistema dinamico ad n gdl $\Rightarrow$ oscillazioni libere (no damping, $\mathbb{C} = \mathbb{0}$)
  (modi principali di vibrare o di vibrazione):

$$\underset{n\times n}{\mathbb{M}}\,\underset{n\times 1}{\ddot{\mathbb{q}}} + \underset{n\times n}{\mathbb{K}}\,\underset{n\times 1}{\mathbb{q}(t)} = \underset{n\times 1}{\mathbb{0}}$$

n eq.ni del moto scalari, per sistema MDOF con n gdl $q_i(t)$ (coordinate lagrangiane)

- Soluzione nella forma:

fasi

$$\mathbb{q}(t) = \mathbb{\Phi}_i \sin(\omega_i t + \psi_i) = \mathbb{\Phi}_i \cos(\omega_i t - \varphi_i) = \dots$$

pulsazione (i-esimo $\forall$ modo)

vettore di ampiezze — definito a meno di una cost.

gdl: $\frac{\phi_{i2}}{\phi_{i5}}$

$$\ddot{\mathbb{q}}(t) = -\omega_i^2 \underbrace{\mathbb{\Phi}\sin(\dots\dots)}_{} = -\omega_i^2\, \mathbb{q}(t)$$

- Sostituendo:

$$(\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\,\alpha\,\mathbb{\Phi}_i \cancel{\sin(\dots\dots)} = \mathbb{0} \quad \forall t \;\Rightarrow\; (\mathbb{K} - \omega_i^2 \mathbb{M})\,\mathbb{\Phi}_i = 0;\quad \boxed{\underset{n\times n}{\mathbb{K}\,\mathbb{\Phi}_i = \omega_i^2\, \mathbb{M}\,\mathbb{\Phi}_i}}$$

n autoval. ω_i^2 $\Leftarrow$ problema agli autovalori generalizzato, associato alle matrici $\mathbb{K}$ e $\mathbb{M}$

autovet. $\alpha\mathbb{\Phi}_i$

$$\mathbb{A}\,\mathbb{x} = \lambda\, \mathbb{B}\,\mathbb{x}$$

$\mathbb{B} = \mathbb{I}$: $\mathbb{A}\,\mathbb{x} = \lambda\,\mathbb{x}$ standard

SOMMARIO (Lez. 12)

- Modi principali di vibrare
  - pulsazioni naturali^2 $\leftrightarrow$ autovalori.
  - forme modali $\leftrightarrow$ autovettori.
- Ortogonalità e normalizzazione degli autovettori.
- Autovalori da rapporto di Rayleigh (in dinamica) $\Rightarrow$ generaliz. SDOF.
- Scrittura compatta del pb. agli autovalori tramite matrici degli autovettori e degli autovalori.
- Trasformazione in coordinate principali $\Rightarrow$ disaccoppiamento delle eq.ni del moto (analisi dinamica modale).
- Oscillazioni libere (sovrapposizione di n moti armonici).

Next step: esempio 2DOF; smorzamento; Azioni Interne.