

**ALCUNE NOZIONI FONDAMENTALI SUL METODO DEGLI ELEMENTI
FINITI IN MECCANICA DEI SOLIDI**

Egidio Rizzi
Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bergamo

Note per il Corso di Aggiornamento “Dal disegno alla modellazione agli elementi finiti di componenti strutturali”, Facoltà di Ingegneria dell’Università degli Studi di Bergamo, Dalmine, 18–20 giugno 2003.

ALCUNE NOZIONI FONDAMENTALI SUL METODO DEGLI ELEMENTI FINITI IN MECCANICA DEI SOLIDI

Egidio Rizzi

Facoltà di Ingegneria, Università degli Studi di Bergamo

1. Introduzione

In queste note vengono presentate alcune nozioni fondamentali sul metodo degli elementi finiti in meccanica dei solidi. Il metodo degli elementi finiti si è ormai affermato quale uno degli strumenti maggiormente versatili per la soluzione di problemi strutturali mediante il calcolo automatico. I primi lavori di ricerca cui possono ricondursi le origini del metodo risalgono al periodo temporale intorno alla seconda guerra mondiale mentre gli sviluppi principali coprono la seconda metà del secolo scorso. L'uso primigenio del termine elemento finito sembra essere attribuito a Clough nel 1960 (si vedano i testi classici sul tema, alcuni dei quali citati in bibliografia). Il metodo degli elementi finiti ha avuto successivamente uno sviluppo rapidissimo, avvenuto di pari passo con la disponibilità crescente di elaboratori digitali sempre più potenti. Tra gli anni sessanta e ottanta si è registrata un'esplosione pressoché esponenziale di pubblicazioni di ricerca dedicate al tema, nonché l'edizione di opere anche di tipo divulgativo. Il metodo è oggi sempre più consolidato: mentre la sua applicazione sta entrando nella pratica professionale quotidiana dell'ingegnere, l'attività scientifica sull'affinamento del metodo riguardo problematiche specifiche, varianti, miglorie e nuove frontiere di ricerca continua incessante.

Riguardo l'incerta datazione storica dell'origine del metodo, risulta in effetti alquanto difficile tracciare un confine preciso tra il metodo degli elementi finiti e altri metodi di analisi numerica volti alla risoluzione di problemi fisico-matematici governati da equazioni differenziali. Il denominatore comune di tutti questi metodi consiste nella presenza di una fase di *discretizzazione*, vale a dire il passaggio da un problema continuo dotato di un numero infinito di gradi di libertà ad un problema discreto caratterizzato da un numero finito di gradi di libertà. Il prezzo da pagare per un tale passaggio è naturalmente quello di dover rinunciare in generale alla determinazione della soluzione esatta del problema di partenza in favore di una soluzione anche solamente approssimata. Tuttavia, tali approssimazioni sono in genere del tutto soddisfacenti ai fini ingegneristici.

Insieme a molti dei metodi di discretizzazione tipicamente utilizzati nella matematica e nelle scienze applicate, il metodo degli elementi finiti si è affermato soprattutto per la sua immediatezza concettuale e la notevole versatilità di impiego che ne fanno strumento prezioso per la soluzione dei problemi più disparati in aree disciplinari differenti. Anche all'interno di ogni singola area tematica il metodo presenta un'estrema versatilità d'impiego pur conservando un'unica ossatura concettuale e le medesime procedure standardizzate. Nell'ambito della meccanica strutturale l'analisi per elementi finiti copre le tipologie più svariate: problemi monodimensionali, piani e tridimensionali, problemi assialsimmetrici, calcolo di travi, telai, piastre e gusci, problemi statici e dinamici, calcolo non lineare (non linearità geometrica e/o di materiale). Grazie alla multidisciplinarietà di applicabilità del metodo esso si presta in modo particolare a risolvere problemi ingegneristici accoppiati, quali ad esempio l'interazione termo-meccanica e fluido-strutturale.

Nel seguito di queste note si presenta un primo inquadramento del metodo degli elementi finiti nell'ambito della meccanica del continuo quale forma alternativa di imposizione dell'equilibrio approssimato in forma debole. Si fa inoltre cenno alla connotazione variazionale del metodo e all'idea primigenia di interpolazione sul dominio legata al metodo di Rayleigh-Ritz e ad altre

procedure (metodi dei residui pesati) utilizzate per esprimere e risolvere equazioni governanti in forma debole. Si entra poi maggiormente nel vivo del metodo degli elementi finiti analizzando alcuni suoi aspetti in maniera più dettagliata, in particolare quelli riguardanti i requisiti richiesti alle funzioni interpolanti e la formulazione di elementi finiti piani quadrilateri isoparametrici. Si presenta infine una breve descrizione delle fasi fondamentali tipiche del processo di discretizzazione e di risoluzione.

Ci si occupa qui esclusivamente del metodo degli elementi finiti in ambito statico e lineare (linearità geometrica e di materiale). Le informazioni qui raccolte devono intendersi come meramente introduttive e dedicate a neofiti dell'argomento o utilizzatori del metodo, anche già esperti nelle fasi applicative, che siano interessati ad approfondire i fondamenti che si collocano alla base del metodo. Lo scopo precipuo è quello di descrivere alcuni degli aspetti essenziali che conducono alla formulazione del metodo, cercando di chiarirne la filosofia ispiratrice. Si rimanda quindi ai testi citati in bibliografia per una trattazione esaustiva sia degli aspetti generali qui trattati sia degli aspetti più specifici, nonché per i molti possibili approfondimenti sui vari temi di specifico interesse del lettore.

Notazione. Nel testo viene impiegata una notazione matriciale. Quantità vettoriali o matriciali vengono indicate da simboli in grassetto mentre le loro componenti o elementi vengono indicati con caratteri in corsivo eventualmente recanti pedici. Tipici esempi di rappresentazione sono: il vettore spostamento $\mathbf{u} = \{u_x, u_y, u_z\}^T = \{u, v, w\}^T$, ove $u = u_x, v = u_y, w = u_z$ sono le tre componenti di spostamento $u_i, i=1, 3$, rispetto ad un sistema cartesiano ortogonale; il vettore contenente le sei componenti del tensore delle piccole deformazioni $\boldsymbol{\epsilon} = \{\epsilon_{xx}, \epsilon_{yy}, \epsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T$ ($\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$); il vettore contenente le sei componenti del tensore di sforzo $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\}^T$ ($\tau_{ij} = \sigma_{ij}$). Il simbolo T indica l'operazione di trasposizione.

2. Il problema elastico

Si richiamano di seguito le equazioni fondamentali che definiscono il problema elastico tridimensionale in meccanica dei solidi (nella notazione matriciale sopra richiamata e con le corrispondenti espressioni tensoriali). Esse esprimono rispettivamente i concetti fondamentali di equilibrio (in sede indefinita), congruenza (leggi deformazioni/spostamenti) e legame costitutivo (legame sforzi/deformazioni):

$$\mathbf{L}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_i} + F_j = 0 \quad (3 \text{ eq.})$$

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (6 \text{ eq.}) \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma_{ij} = \sum_{k,l=1}^3 D_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (6 \text{ eq.})$$

ove \mathbf{D} è la matrice (simmetrica) 6×6 dei moduli elastici contenente le componenti D_{ijkl} del tensore di rigidezza elastica del materiale (definito in generale da 21 costanti elastiche indipendenti, 2 nel caso di comportamento isotropo, e.g. modulo di Young o di elasticità longitudinale E , e coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson ν); \mathbf{F} sono le forze per unità di volume (ad es. peso proprio); \mathbf{L} è il seguente operatore differenziale lineare di congruenza (6×3) contenente le derivate parziali rispetto alle direzioni coordinate (introdotto per esprimere le leggi

deformazioni/spostamenti in forma matriciale):

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial z \\ 0 & \partial/\partial y & 0 & \partial/\partial x & \partial/\partial z & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Il rispetto di queste equazioni governanti deve essere garantito in ogni punto \mathbf{x} del dominio occupato dal solido di volume V (*forma forte* del problema differenziale). Le equazioni governanti sono corredate da opportune condizioni al contorno sulle porzioni della superficie di contorno ove sono assegnati rispettivamente gli spostamenti (porzione S_u) e le forze di superficie \mathbf{f} (porzione S_f), $S=S_u \cup S_f$, vedi Fig. 1:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} &\Leftrightarrow u = \bar{u}_i \quad \text{su } S = S_u \\ \mathbf{M}\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^3 m_i \sigma_{ij} = f_j \quad \text{su } S = S_f \end{aligned} \quad (3)$$

ove \mathbf{M} è una matrice (3×6) contenente i coseni direttori del versore normale $\mathbf{m} = \{m_x, m_y, m_z\}^T$ uscente dalla superficie del solido:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_x & 0 & 0 & m_y & 0 & m_z \\ 0 & m_y & 0 & m_x & m_z & 0 \\ 0 & 0 & m_z & 0 & m_y & m_x \end{bmatrix}. \quad (4)$$

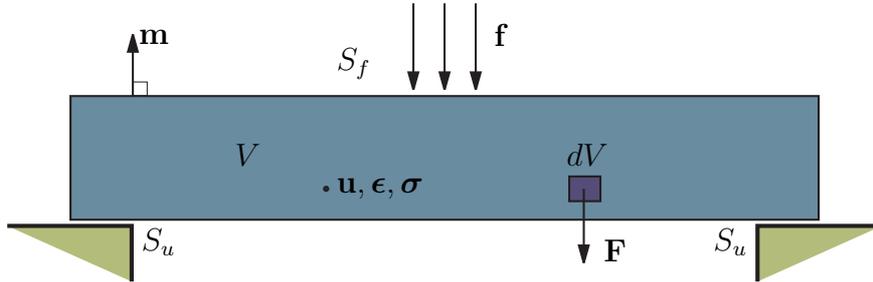


Figura 1: Il solido elastico.

Il problema differenziale (1)-(3) ammette anche la seguente rappresentazione simbolica nei soli spostamenti (*equazioni di Navier*):

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{A}} \quad \text{in } V, \quad \mathbf{a}\mathbf{u} = \bar{\mathbf{a}} \quad \text{su } S_f, \quad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{su } S_u \quad (5)$$

ove \mathbf{A} e \mathbf{a} sono operatori differenziali rispettivamente del 2° e del 1° ordine definiti insieme alle altre quantità come:

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}^T \mathbf{D} \mathbf{L}, \quad \bar{\mathbf{A}} = -\mathbf{F}, \quad \mathbf{a} = \mathbf{M} \mathbf{D} \mathbf{L}, \quad \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{f}. \quad (6)$$

Questa scrittura si presta a interpretare la soluzione del problema di partenza come la condizione di annullamento dei seguenti residui:

$$\mathbf{R}(\mathbf{u}) = \mathbf{A}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{A}} = \mathbf{0} \quad \text{in } V, \quad \mathbf{r}(\mathbf{u}) = \mathbf{a}\mathbf{u} - \bar{\mathbf{a}} = \mathbf{0} \quad \text{su } S_f, \quad (7)$$

sotto la condizione al contorno cinematica $\mathbf{u} - \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$, su S_u .

La determinazione della soluzione del problema elastico in forma chiusa, vale a dire la risoluzione dei campi incogniti di spostamento, deformazione e sforzo, non si presenta agevole in generale. La soluzione analitica è proponibile in pratica solo in casi particolari (vedi ad es. la lastra tesa sottile caricata nel suo piano, il tubo di grosso spessore soggetto a pressione interna, il solido di de Saint Venant soggetto ad azione assiale, flessione, taglio, torsione). Sorge quindi immediata la necessità di giungere ad una soluzione anche approssimata del problema, pervenibile, se non in forma analitica, perlomeno in forma numerica per mezzo di procedure da svolgersi in modo standardizzato e automatico.

In prima ipotesi la scelta naturale potrebbe rivolgersi verso i metodi di discretizzazione diretti delle equazioni differenziali governanti quali quello delle *Differenze Finite*, nel quale le derivate vengono approssimate da rapporti incrementali valutati su di una griglia di punti posti all'interno del dominio. Questo metodo appare essere sì di validità generale, ma in pratica risulta di difficile applicazione in casi ingegneristici reali caratterizzati da geometrie anche molto complesse. A questo punto due appaiono gli approcci possibili al fine di esprimere in maniera modulare il comportamento dell'intero volume di solido:

- i) la trasposizione ad una eventuale *forma variazionale* delle equazioni governanti (*stazionarietà di un funzionale*), eventualmente dotata di una caratterizzazione *estremale* (ad esempio di minimo);
- ii) il passaggio ad una *forma debole* del problema in esame (rispetto delle equazioni governanti *in senso integrale* sul volume).

Nel campo della teoria dell'elasticità i due passaggi sopra indicati si conducono mediante:

- 1) il *principio della stazionarietà dell'energia potenziale totale*;
- 2) il *principio degli spostamenti virtuali* (manifestazione del principio dei lavori virtuali).
- 3) l'annullamento di opportune *medie pesate dei residui*.

Il primo approccio (forma variazionale) conduce dapprima al *metodo di Rayleigh-Ritz* e successivamente al *metodo degli elementi finiti* quale sua spontanea generalizzazione. Il secondo approccio (forma debole) conduce altresì direttamente al metodo degli elementi finiti. Il terzo approccio (forma debole) conduce al *metodo dei residui pesati* il quale può essere ugualmente impiegato nel contesto del metodo degli elementi finiti. A quest'ultimo approccio si farà breve cenno in seguito. Si richiamano invece sinteticamente di seguito i classici principi sopra invocati della teoria dell'elasticità. Le differenti possibilità di scrittura di un problema retto da equazioni differenziali e i relativi metodi di discretizzazione sono rappresentati nello schema di Fig. 2:

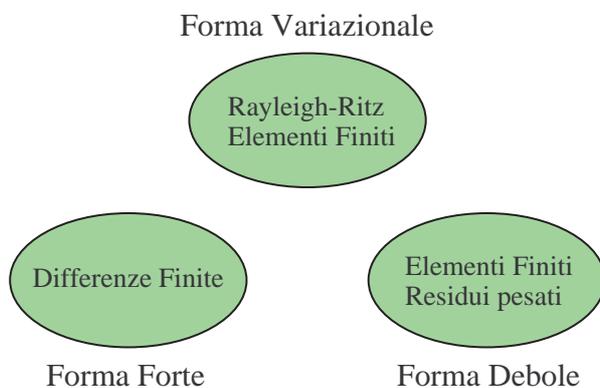


Figura 2: Forme di un problema differenziale e relativi metodi di discretizzazione.

2.1. Stazionarietà dell'energia potenziale totale

Nell'ipotesi di comportamento elastico (esistenza di un'energia elastica di deformazione) e di carichi esterni conservativi (cioè dotati di energia potenziale) si definisce il seguente *funzionale energia potenziale totale* quale differenza tra l'energia elastica dell'intero sistema e il lavoro compiuto dalle forze esterne:

$$\Pi(\mathbf{u}) = \int_V \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\epsilon} - \left(\int_V \mathbf{F}^T \mathbf{u} dV + \int_{S_f} \mathbf{f}^T \mathbf{u} dS \right) \quad (8)$$

ove il campo di deformazione $\boldsymbol{\epsilon}$ è ottenuto per congruenza dal campo di spostamenti, $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$. Entro l'insieme delle configurazioni congruenti di \mathbf{u} e $\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u}$, con $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ su S_u (*condizioni al contorno essenziali* cinematiche, cioè imposte a priori), quella equilibrata risulta caratterizzata dalla stazionarietà del funzionale $\Pi(\mathbf{u})$, vale a dire che, per ogni variazione congruente $\delta \mathbf{u}$, $\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}$ con $\delta \mathbf{u} = 0$ su S_u :

$$\delta \Pi = \int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV - \left(\int_V \mathbf{F}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_f} \mathbf{f}^T \delta \mathbf{u} dS \right) = 0. \quad (9)$$

Tale configurazione equilibrata rende inoltre *minimo* il funzionale Π . In altre parole, l'imposizione dell'equilibrio elastico può essere ottenuta mediante la soluzione di un problema di minimo (*calcolo delle variazioni*). Le equazioni governanti discendono quindi dalle equazioni di Eulero-Lagrange del calcolo delle variazioni, mentre ulteriori condizioni addizionali forniscono le rimanenti *condizioni al contorno naturali* (riguardanti l'equilibrio e non imposte a priori) che devono valere in corrispondenza della stazionarietà.

2.2. Principio degli spostamenti virtuali

Il principio dei lavori virtuali può essere utilizzato quale condizione sufficiente di equilibrio. Si consideri infatti una variazione arbitraria (virtuale) del campo di spostamenti $\delta \mathbf{u}$ e di deformazione $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ nel rispetto della congruenza ($\delta \boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{L} \delta \mathbf{u}$ in V , $\delta \mathbf{u} = \mathbf{0}$ su S_u). La configurazione di partenza è equilibrata se risulta, $\forall \delta \mathbf{u}$, la seguente eguaglianza tra i lavori virtuali interno e esterno $\mathcal{L}_i = \mathcal{L}_e$:

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}^T \delta \boldsymbol{\epsilon} dV = \int_V \mathbf{F}^T \delta \mathbf{u} dV + \int_{S_f} \mathbf{f}^T \delta \mathbf{u} dS. \quad (10)$$

Evidentemente, mediante l'imposizione dell'eguaglianza dei lavori virtuali (10) si perviene alla stessa relazione (9) ottenuta quale condizione di stazionarietà dell'energia potenziale totale. Mentre da un lato non è più consentita una caratterizzazione estrema, a differenza del principio di stazionarietà dell'energia potenziale totale (valido solo in campo elastico), il principio degli spostamenti virtuali risulta valido indipendentemente dal comportamento del materiale e può quindi essere vantaggiosamente impiegato anche nel caso anelastico (vedi ad es. plasticità).

Chiarita brevemente la collocazione del metodo di Rayleigh-Ritz e del metodo degli elementi finiti all'interno dei metodi di discretizzazione e nell'ambito dei principi fondamentali appena esposti, entriamo ora più nel dettaglio del metodo degli elementi finiti, partendo proprio dal metodo di Rayleigh-Ritz che ne contiene già il concetto fondamentale di interpolazione dei campi incogniti sul volume.

3. I concetti fondamentali alla base del metodo degli elementi finiti

3.1. L'interpolazione alla Rayleigh-Ritz sull'intero dominio

L'idea primigenia del metodo consiste nel rappresentare la funzione incognita nel funzionale da minimizzare (qui il campo di spostamenti) come combinazione lineare di un certo numero di funzioni note (*metodo di Rayleigh-Ritz*, 1909). Tale approssimazione degli spostamenti incogniti può quindi esprimersi nella forma

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) \alpha_i = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \boldsymbol{\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u}_j(x_k) = \sum_i N_{ji}(x_k) \alpha_i \quad (11)$$

ove gli α_i , $i=1, n$, sono n parametri incogniti (coordinate lagrangiane, non necessariamente di significato fisico) raccolti nel vettore $\boldsymbol{\alpha}$ dei gradi di libertà del sistema. Gli \mathbf{N}_i , $i=1, n$, sono n vettori (3×1) contenenti le cosiddette *funzioni di forma*, in quanto esse definiscono la sottoclasse di funzioni all'interno della quale si ricerca la stazionarietà del funzionale di partenza. La matrice \mathbf{N} ($3 \times n$) contiene i vettori \mathbf{N}_i come colonne. Questa assunzione consente di trasformare un problema di calcolo delle variazioni (stazionarietà di un funzionale) in un problema prettamente algebrico (stazionarietà di una funzione discreta degli n parametri α_i). Infatti, dagli spostamenti approssimati (11) si ottiene il campo di deformazione

$$\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{L} \tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{L} \mathbf{N} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha} \quad (12)$$

ove $\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N}$ è una matrice ($6 \times n$) contenente le derivate (prime) delle funzioni di forma. Sostituendo in (8) i campi approssimati (11), (12) il funzionale energia potenziale totale diviene una funzione quadratica degli n parametri α_i :

$$\begin{aligned} \Pi(\boldsymbol{\alpha}) &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \left(\int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV \right) \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T \left(\int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int_{S_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS \right) \\ &= \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{P} \end{aligned} \quad (13)$$

ove la matrice \mathbf{K} ($n \times n$) (simmetrica e definita positiva) e il vettore \mathbf{P} ($n \times 1$), quantità corrispondenti agli integrali compresi tra parentesi nella prima delle (13),

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV, \quad \mathbf{P} = \int_V \mathbf{N}^T \mathbf{F} dV + \int_{S_f} \mathbf{N}^T \mathbf{f} dS \quad (14)$$

si definiscono rispettivamente *matrice di rigidità della struttura* e *vettore delle forze equivalenti ai carichi esterni*.

La condizione di stazionarietà della funzione $\Pi(\alpha_i)$ conduce a n condizioni di annullamento delle derivate prime $\partial \Pi / \partial \alpha_i = 0$, le quali forniscono un sistema di n equazioni lineari nelle n incognite α_i :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} = \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} - \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}. \quad (15)$$

Risolto il sistema $\mathbf{K} \boldsymbol{\alpha} = \mathbf{P}$, si procede a ritroso sostituendo il vettore $\boldsymbol{\alpha}$ in soluzione nelle approssimazioni di partenza (11), (12), ricostruendo così i campi di spostamento e di deformazione e, tramite il legame costitutivo $\tilde{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} \tilde{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{D} \mathbf{B} \boldsymbol{\alpha}$, anche il campo di sforzo approssimato.

A tale proposito si fa rilevare che un'approssimazione adeguata sul campo primario (quello degli spostamenti) non è detto si riveli altrettanto idonea a rappresentare i campi ottenuti per successive derivazioni (quelli di deformazione e sforzo). Occorre quindi verificare sempre la bontà della soluzione anche per questi ultimi campi (se, come normalmente avviene, questi

sono determinanti per gli esiti dell'analisi strutturale). Un altro aspetto da rilevare è che il modello cinematico (11) conduce ad una soluzione certamente più rigida di quella reale (energia potenziale totale stimata per eccesso). Infatti, poiché si esegue il processo di minimizzazione all'interno di una sottoclasse cinematica ristretta, il minimo determinato in tal modo è tale per cui l'energia potenziale totale risulta certamente non inferiore al valore corrispondente alla soluzione esatta: $\Pi(\tilde{\mathbf{u}}) \geq \Pi(\mathbf{u})$. Anche se ciò non lo implica necessariamente, gli spostamenti potrebbero quindi risultare sottostimati.

Il metodo di Rayleigh-Ritz può essere vantaggiosamente impiegato in molti problemi strutturali e si presta anche a svolgere i calcoli manualmente in casi semplici (vedi ad es. la teoria delle travi). Tuttavia per problemi generici e con geometrie complesse il metodo presenta dei limiti notevoli nel dover selezionare la base delle funzioni interpolanti sull'intero dominio di soluzione.

3.2. L'interpolazione degli spostamenti sull'elemento finito

Nasce quindi l'idea di suddividere l'intero dominio in una serie di sottodomini o volumi finiti all'interno dei quali si possa formulare un'interpolazione alla Ritz del campo incognito (Fig. 3). In altre parole l'operazione di interpolazione mediante funzioni di forma note si applica non più all'intero dominio ma singolarmente ad ognuna delle cellule base (*elementi finiti*) in cui è stato suddiviso il solido. Questo consente una notevole versatilità di trattazione anche di tipologie geometriche molto complesse. Le cellule base presentano infatti geometrie semplici, ben definite e ripetitive (Fig. 4).

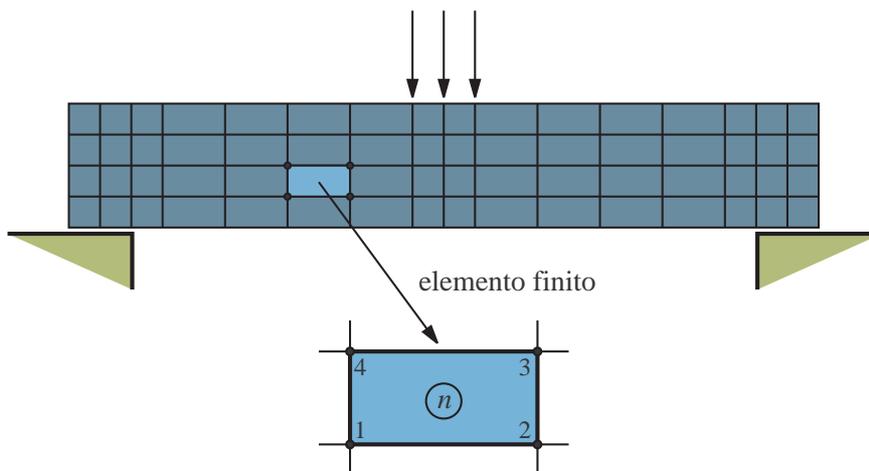


Figura 3: Discretizzazione per elementi finiti. Elemento finito n -esimo e numerazione locale dei nodi.

L'interpolazione alla Rayleigh-Ritz viene quindi applicata al campo di spostamenti all'interno del generico elemento finito n -esimo (Fig. 3). All'interno di ogni elemento finito si individuano dei punti caratteristici, detti *nod*i, i cui spostamenti giocano il ruolo di gradi di libertà dell'elemento. In altre parole i campi di spostamento e, conseguentemente, di deformazione, all'interno dell'elemento finito vengono definiti in funzione degli spostamenti nodali per mezzo delle seguenti interpolazioni:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_n(\mathbf{x}) \mathbf{U}_n, \quad \tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) \mathbf{U}_n \quad (16)$$

ove \mathbf{U}_n è il vettore degli spostamenti nodali dell'elemento finito n -esimo. La matrice \mathbf{N}_n contiene ora le funzioni di forma che definiscono il campo di interpolazione all'interno dell'elemento finito n -esimo e la matrice $\mathbf{B}_n = \mathbf{L} \mathbf{N}_n$ contiene le derivate (prime) di tali funzioni di forma. Esempi di funzioni di forma e loro proprietà vengono discussi più avanti.

Data l'interpolazione (16), la variazione del campo di spostamenti all'interno dell'elemento finito (e conseguente di quello delle deformazioni) è ora legata ad una variazione $\delta\mathbf{U}_n$ dei soli spostamenti nodali:

$$\delta\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_n(\mathbf{x}) \delta\mathbf{U}_n, \quad \delta\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}_n(\mathbf{x}) \delta\mathbf{U}_n. \quad (17)$$

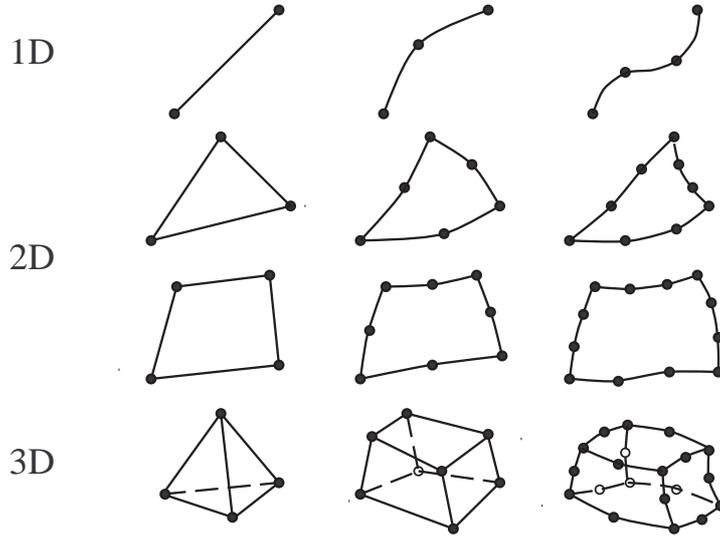


Figura 4: Tipologie di elementi finiti mono, bi e tridimensionali.

3.3. Equilibrio approssimato in forma debole

Il processo di discretizzazione può essere ora formalmente espresso mediante il principio degli spostamenti virtuali inserendo le variazioni congruenti (17) nell'identità dei lavori virtuali (10) e suddividendo gli integrali di volume e di superficie in una somma di contributi relativi ad ogni elemento finito:

$$\sum_n \delta\mathbf{U}_n^T \left[\left(\int_{V_n} \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n dV \right) \mathbf{U}_n - \left(\int_{V_n} \mathbf{N}_n^T \mathbf{F} dV + \int_{S_{f,n}} \mathbf{N}_n^T \mathbf{f} dS \right) \right] = \mathbf{0}, \quad (18)$$

la quale può essere riscritta nel seguente modo:

$$\sum_n \delta\mathbf{U}_n^T [\mathbf{K}_n \mathbf{U}_n - \mathbf{P}_n] = \mathbf{0} \quad (19)$$

ove \mathbf{K}_n e \mathbf{P}_n sono rispettivamente la *matrice di rigidezza* e il *vettore delle forze nodali equivalenti* ai carichi esterni dell'elemento finito n -esimo:

$$\mathbf{K}_n = \int_{V_n} \mathbf{B}_n^T \mathbf{D} \mathbf{B}_n dV, \quad \mathbf{P}_n = \int_{V_n} \mathbf{N}_n^T \mathbf{F} dV + \int_{S_{f,n}} \mathbf{N}_n^T \mathbf{f} dS. \quad (20)$$

La matrice di rigidezza \mathbf{K}_n è simmetrica grazie alla simmetria della matrice \mathbf{D} dei moduli elastici. Si noti la stretta analogia tra la legge elastica di comportamento di un singolo elemento finito deducibile dalla (19) nel caso di un unico elemento $\mathbf{K}_n \mathbf{U}_n = \mathbf{P}_n$ e quella di un'asta di una travatura reticolare (struttura intrinsecamente discreta) o, ancora più semplicemente, di una molla elastica (legge di Hooke). Nell'equazione (19) è quindi resa ben evidente la discretizzazione del problema continuo mediante l'assemblaggio di una serie di elementi finiti aventi ciascuno comportamento elastico.

Al fine di pervenire alla forma finale del problema discretizzato occorre ora introdurre il vettore contenente tutti i gradi di libertà del sistema ed eseguire l'operazione di *assemblaggio* (corrispondente al simbolo di sommatoria nella (19)). A tale proposito occorre stabilire una connessione tra il vettore \mathbf{U}_n dei gradi di libertà locali del singolo elemento finito (spostamenti nodali) e il vettore \mathbf{U} contenente tutti i gradi di libertà del sistema. Tale corrispondenza si può rappresentare simbolicamente nel seguente modo:

$$\mathbf{U}_n = \mathbf{C}_n \mathbf{U} \quad (21)$$

ove \mathbf{C}_n è una *matrice di connettività* binaria (cioè costituita da 1 e 0). Nella pratica computazionale questa procedura di connessione viene svolta solitamente in altro modo utilizzando opportune *tabelle delle incidenze* contenenti le informazioni sui puntatori necessari ad individuare le corrispondenze dirette tra gradi di libertà locali e globali, elemento per elemento (vedi Fig. 9). Grazie alla (21), l'interpolazione del campo di spostamenti all'interno dell'elemento finito (16) può essere formalmente espressa in funzione dei gradi di libertà \mathbf{U} di tutto il sistema, in maniera analoga a quanto avviene nella (11):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_i \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) U_i = \mathbf{N}(\mathbf{x}) \mathbf{U}, \quad \mathbf{N}(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_n(\mathbf{x}) \mathbf{C}_n, \quad \mathbf{N}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{N}_n(\mathbf{x}) \mathbf{C}_{ni} \quad (22)$$

ove $\mathbf{N}(\mathbf{x})$ è la matrice delle funzioni di forma costituita di colonne $\mathbf{N}_i(\mathbf{x})$, essendo \mathbf{C}_{ni} l' i -esima colonna della matrice di connettività \mathbf{C}_n .

Sostituendo la (21) e la relativa variazione $\delta \mathbf{U}_n = \mathbf{C}_n \delta \mathbf{U}$ nel principio degli spostamenti virtuali nella forma discreta (19) si ottiene:

$$\delta \mathbf{U}^T \left[\left(\sum_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{C}_n \right) \mathbf{U} - \sum_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{P}_n \right] = 0 \quad (23)$$

da cui, poiché l'identità dei lavori virtuali deve valere $\forall \delta \mathbf{U}$:

$$\mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{P} \quad (24)$$

ove

$$\mathbf{K} = \sum_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{K}_n \mathbf{C}_n, \quad \mathbf{P} = \sum_n \mathbf{C}_n^T \mathbf{P}_n \quad (25)$$

sono la matrice di rigidezza e il vettore delle forze nodali equivalenti dell'intera struttura. Il problema dell'imposizione dell'equilibrio approssimato in forma debole è quindi ricondotto alla soluzione di un sistema lineare omogeneo nelle incognite \mathbf{U} . Si rammenta che, come commentato più avanti, prima di procedere alla soluzione del sistema (24) occorre ancora eliminare da \mathbf{U} quei gradi di libertà a spostamento noto che corrispondono al contorno S_u . Il sistema (24) è quindi risolubile (non singolare) solo una volta che i moti rigidi presenti in \mathbf{U} sono stati eliminati.

3.4. Forma debole alternativa: metodo dei residui pesati

Riguardo la trasformazione delle equazioni governanti dalla forma forte alla forma debole, un approccio alternativo di validità alquanto generale consiste nell'imporre l'annullamento di n medie pesate dei residui che compaiono nel problema differenziale (7) quando il campo incognito \mathbf{u} viene sostituito dal campo approssimato $\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\int_V \mathbf{W}_i(\mathbf{x})^T \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{u}}) dV + \int_{S_f} \mathbf{W}_i(\mathbf{x})^T \mathbf{r}(\tilde{\mathbf{u}}) dS = 0 \quad (26)$$

ove $\mathbf{W}_i(\mathbf{x})$ (vettori 3×1) sono n funzioni peso e $\tilde{\mathbf{u}}$ è la soluzione approssimata del problema, la quale può essere espressa mediante l'interpolazione alla Rayleigh-Ritz (11) ($\tilde{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{N}_i \alpha_i$) o mediante l'analoga sua generalizzazione agli elementi finiti (22) ($\tilde{\mathbf{u}} = \sum_i \mathbf{N}_i U_i$).

Il metodo dei residui pesati si distingue e identifica nella scelta delle funzioni peso (per collocalazione, minimi quadrati, ecc.). Nel caso in cui le funzioni peso vengono rappresentate dalle derivate della funzione approssimata $\tilde{\mathbf{u}}$ rispetto al generico grado di libertà α_i (o U_i), $\mathbf{W}_i = \partial \tilde{\mathbf{u}} / \partial \alpha_i = \mathbf{N}_i$, cioè quando esse vengono a coincidere con le relative funzioni di forma \mathbf{N}_i , il metodo dei residui pesati viene definito *alla Galerkin* ($\mathbf{W}_i = \mathbf{N}_i$). Se invece $\mathbf{W}_i \neq \mathbf{N}_i$ ci si riferisce in genere ad un metodo di Petrov-Galerkin. Il metodo dei residui pesati alla Galerkin con discretizzazione sul volume per elementi finiti conduce alle stesse equazioni risolventi finali del metodo degli elementi finiti fondato sul principio variazionale della stazionarietà dell'energia potenziale totale o sul principio degli spostamenti virtuali. Esso si presenta quindi come valida alternativa nei casi in cui tali forme variazionali o deboli non siano disponibili.

4. Elementi finiti isoparametrici piani

Al fine di illustrare più nel dettaglio gli ingredienti tipici della discretizzazione per elementi finiti sopra richiamati si illustrano brevemente di seguito le caratteristiche salienti degli elementi finiti isoparametrici piani, con riferimento agli elementi quadrilateri.

4.1. Requisiti delle funzioni di forma

Ai fini di garantire una convergenza monotona (in energia) della soluzione approssimata verso la soluzione reale, la modellazione del campo di spostamenti all'interno dell'elemento finito deve soddisfare i seguenti requisiti:

- *Completezza* del campo interpolante. Ciò significa che devono essere rappresentati correttamente
 - i *moti rigidi*; infatti avviene normalmente che parti della struttura subiscano solo uno spostamento rigido senza che si debba produrre alcuno stato di deformazione o di sforzo al suo interno.
 - gli stati a *deformazione costante*; infatti nel processo al limite di infittimento progressivo con dimensione caratteristica dell'elemento finito tendente a zero, il comportamento dell'elemento deve poter riprodurre quello dell'intorno di un punto e nell'intorno arbitrario di un punto la deformazione non può che risultare costante. Si noti che questa condizione contiene la precedente come caso particolare essendo un moto rigido uno stato di deformazione costante nulla.
- *Conformità* o compatibilità (congruenza) dell'elemento. Il modello di spostamento e deformazione dev'essere tale per cui venga rispettata la continuità sia all'interno dell'elemento che all'interfaccia con elementi contigui (cioè non siano possibili deformazioni infinite). Questo requisito di continuità può riguardare anche le derivate del campo incognito (ad es. le derivate prime per gli elementi di travi e piastre). Riguardo la continuità all'interfaccia si noti che essa è garantita se gli spostamenti lungo il lato dipendono solo dagli spostamenti dei nodi appartenenti allo stesso lato (infatti, a seguito dell'assemblaggio, gli spostamenti di nodi comuni a elementi contigui saranno gli stessi e quindi in tal caso gli spostamenti risulteranno continui anche sulle interfacce).

Altro fattore per garantire convergenza monotona è quello di realizzare una *sequenza minimizzante* di soluzioni approssimate con energia potenziale totale decrescente. Per ottenere ciò occorre che ogni discretizzazione contenga tutti i campi di spostamento consentiti dalle discretizzazioni precedenti, cioè che ogni successivo reticolo contenga tutti i nodi precedenti. Spesso questo approccio non viene seguito (rinunciando alla convergenza monotona a favore dell'ottimizzazione del bilancio accuratezza/onere di calcolo) quando il raffinamento della discretizzazione sia mirato a cogliere localmente le zone ove si rilevano elevati gradienti di sforzo e deformazione (adattamento della mesh, eventualmente automatico). Peraltro questo è uno dei vantaggi tipici offerti dal metodo degli elementi finiti, rispetto ad altri metodi (quali Rayleigh-Ritz) che sfruttano solo interpolazioni globali su tutto il dominio.

Elementi finiti non conformi sono a volte utilizzati in particolari problemi strutturali (ad es. nell'analisi strutturale di piastre e gusci) ove i requisiti di continuità di ordine superiore diventano onerosi per la formulazione e la gestione dell'elemento. In tali casi la convergenza può essere comunque raggiunta all'infittirsi della discretizzazione. Esistono criteri empirici (vedi "patch test") per stabilire se gli elementi finiti (anche non compatibili) possono comunque essere in grado di garantire la convergenza.

Le funzioni di forma che definiscono l'interpolazione degli spostamenti all'interno dell'elemento finito sono generalmente dei *polinomi*. Ciò garantisce innanzitutto la continuità del campo di spostamenti e delle relative derivate all'interno dell'elemento finito. Riprendendo l'interpolazione (16) nel caso bidimensionale (l'indice n relativo all' n -esimo elemento finito verrà qui omesso per brevità) vediamo ora di specificare meglio le proprietà richieste alle funzioni di forma:

$$\begin{cases} u(x, y) = \sum_i N_i(x, y) u_i \\ v(x, y) = \sum_i N_i(x, y) v_i \end{cases} \quad (27)$$

ove u, v sono le componenti di spostamento nelle due direzioni del piano, N_i le funzioni di forma e u_i, v_i gli spostamenti nodali nelle due direzioni. La somma sull'indice i si estende al numero di nodi dell'elemento finito (ad es. 3 per un elemento triangolare a tre nodi a deformazione costante o 4 per un elemento quadrilatero a quattro nodi bilineare).

Le caratteristiche insite nell'interpolazione (27) e le condizioni (sufficienti) per la convergenza prima esposte pongono alle funzioni di forma polinomiali i seguenti requisiti:

- Affinché nel generico nodo j si abbia $u(x_j, y_j)=u_j$, $v(x_j, y_j)=v_j$, occorre evidentemente che risulti:

$$N_i(x_j, y_j) = \delta_{ij}, \quad \text{ove } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} . \quad (28)$$

In sintesi, la funzione di forma N_i relativa al nodo i deve assumere valore unitario in corrispondenza del nodo stesso, mentre si deve annullare in tutti gli altri nodi.

- Affinché sia rappresentabile un moto rigido all'interno dell'elemento per uno spostamento rigido imposto ai nodi, ad es. di tipo traslatorio con $u_i=\bar{u}$ per ogni nodo i , dovrà aversi $u(x, y)=\bar{u}$ per ogni punto (x, y) . Dalle (27) segue quindi che:

$$\sum_i N_i(x, y) = 1 \quad \forall (x, y), \quad (29)$$

vale a dire che la somma dei valori delle funzioni di forma in un qualsiasi punto dell'elemento finito deve valere 1.

- Affinché siano rappresentabili gli stati a deformazione costante (derivate prime costanti del campo di spostamenti), le funzioni di forma polinomiali devono essere polinomi completi almeno nel primo grado.
- Affinché non vi sia preferenza per la modellazione secondo una direzione particolare (proprietà peraltro già implicitamente assunta nella (27) ove si esprimono le due componenti di spostamento con le stesse funzioni di forma), è opportuno che venga rispettata la cosiddetta *invarianza o isotropia geometrica*: ciascuna componente di spostamento deve essere egualmente modellata in tutte le direzioni, quindi il polinomio interpolante deve contenere termini simmetrici rispetto ad x e y (uno scambio tra x e y non deve alterare il polinomio). Per generare polinomi invarianti si utilizza il cosiddetto *triangolo di Pascal* (Fig. 5).
- Affinché sia rispettata la continuità degli spostamenti lungo i lati, il numero di nodi lungo ciascun lato deve essere pari al numero di parametri corrispondente al grado di interpolazione lungo il lato (ad es. lineare per due nodi, quadratico per tre, cubico per quattro).
- Poiché l'ordine di convergenza (per discretizzazioni regolari nel senso commentato più avanti) è dell'ordine di $o(h^{p+1})$, essendo h la dimensione caratteristica dell'elemento e p il grado massimo del polinomio completo interpolante, la situazione ottimale per accuratezza e economia di calcolo corrisponde ad ottenere il massimo grado di polinomio completo col minimo numero di nodi. I termini dei polinomi completi si individuano facilmente nel triangolo di Pascal (Fig. 5, linee tratteggiate orizzontali).

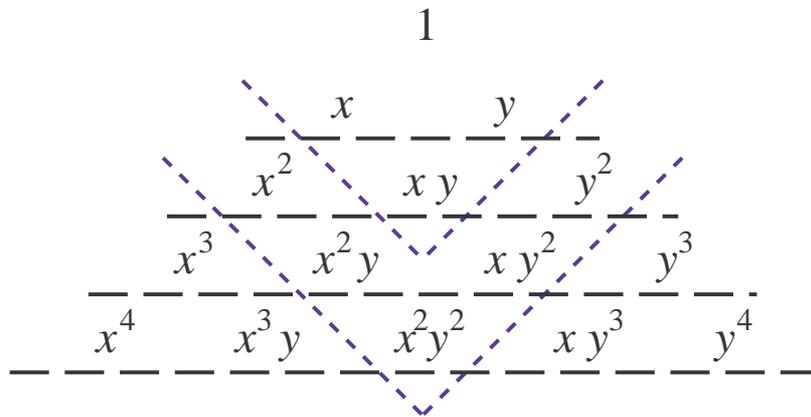


Figura 5: Triangolo di Pascal, termini dei polinomi completi e dei polinomi di Lagrange.

4.2. Elementi finiti quadrilateri

Una famiglia di elementi finiti quadrilateri soddisfacente i requisiti sopra esposti è presto generabile utilizzando i cosiddetti *polinomi di Lagrange* nella variabile $-1 \leq \xi \leq 1$:

$$P_i^r(\xi) = \prod_{k \neq i} \frac{(\xi - \xi_k)}{(\xi_i - \xi_k)} = \frac{(\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_{i-1})(\xi - \xi_{i+1}) \dots (\xi - \xi_r)}{(\xi_i - \xi_1)(\xi_i - \xi_2) \dots (\xi_i - \xi_{i-1})(\xi_i - \xi_{i+1}) \dots (\xi_i - \xi_r)} \quad (30)$$

ove r è il numero di punti che caratterizzano il polinomio e i il punto ove il polinomio fornisce valore unitario (mentre negli altri $r-1$ punti si annulla).

Le funzioni di forma di elementi bidimensionali della *famiglia di Lagrange* si generano (in coordinate normalizzate ξ, η variabili tra -1 e 1) mediante il prodotto di due polinomi basati sullo stesso numero di punti (ai fini di ottenere l'invarianza geometrica):

$$N_i(\xi, \eta) = P_h^r(\xi) P_k^r(\eta) \quad (31)$$

ove h e k indicano, nella maglia di punti, rispettivamente il numero della colonna e la posizione del punto i nella colonna stessa. I primi tre elementi della famiglia di Lagrange (lineare, quadratico e cubico) sono rappresentati in Fig. 6. I termini dei polinomi dei primi due elementi sono indicati dalle rette inclinate tratteggiate in Fig. 5.

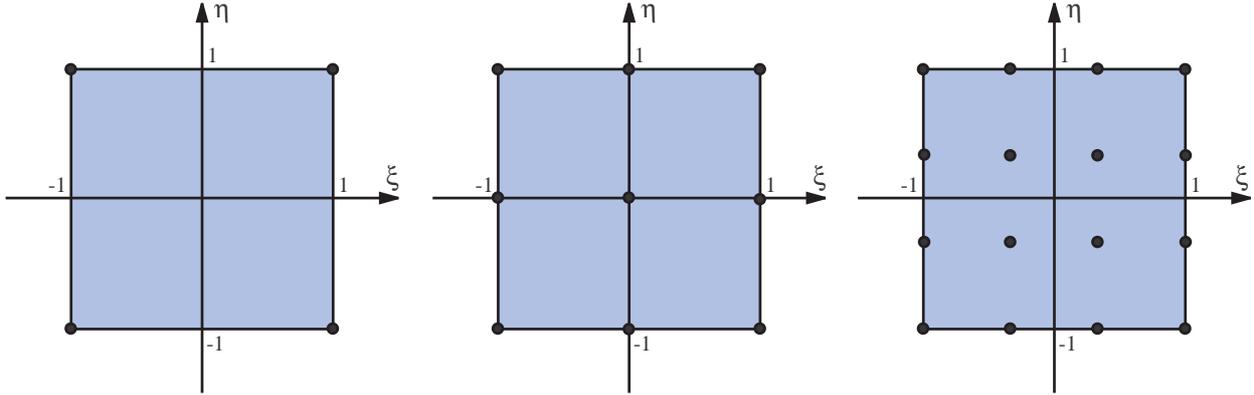


Figura 6: Elementi quadrilateri di Lagrange in coordinate normalizzate.

A titolo di esempio, si esplicitano di seguito le funzioni di forma dell'elemento di Lagrange lineare:

$$N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i) \quad (32)$$

ove ξ_i, η_i sono le coordinate del nodo i (che si rammenta assumono i valori ± 1).

La famiglia di Lagrange è facilmente generabile ma, come si nota dal triangolo di Pascal, non risulta particolarmente vantaggiosa in quanto il numero di termini di ordine elevato risulta alto mentre il grado massimo del polinomio completo rappresentato rimane comunque basso. Inoltre si arriva ad introdurre un numero anche notevole di nodi interni. Tali nodi interni non interagiscono con altri elementi finiti e quindi governano solo stati deformativi locali all'interno dell'elemento.

Sono stati quindi proposti gli elementi della cosiddetta *famiglia di Serendipity* (dal nome dei principi di Serendip, noti in letteratura per le loro "scoperte casuali") i quali ovviano a questi inconvenienti. La derivazione di questi elementi è più elaborata dei precedenti e non automatica, soprattutto all'aumentare del numero di termini considerati. Le funzioni di forma di tentativo si calcolano come prodotto delle equazioni delle rette passanti per tutti i nodi tranne quello in oggetto. Occorre poi verificare che i termini generati rispettino i criteri fissati in precedenza. Gli elementi Serendipity fino al cubico non presentano nodi interni e sono illustrati in Fig. 7.

Ancora a titolo di esempio si elencano qui di seguito le funzioni di forma dell'elemento quadrilatero di Serendipity a 8 nodi (quadratico):

$$\begin{aligned} \text{per i quattro nodi d'angolo :} \quad N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{4} (1 + \xi \xi_i)(1 + \eta \eta_i)(\xi \xi_i + \eta \eta_i - 1) \\ \text{per i quattro nodi intermedi :} \quad N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \xi^2)(1 + \eta \eta_i) \quad \text{ove } \xi_i = 0 \\ N_i(\xi, \eta) &= \frac{1}{2} (1 - \eta^2)(1 + \xi \xi_i) \quad \text{ove } \eta_i = 0, \end{aligned} \quad (33)$$

le quali contengono gli stessi termini del triangolo di Pascal dell'elemento di Lagrange a 9 nodi, escluso per il termine biquadratico $\xi^2 \eta^2$.

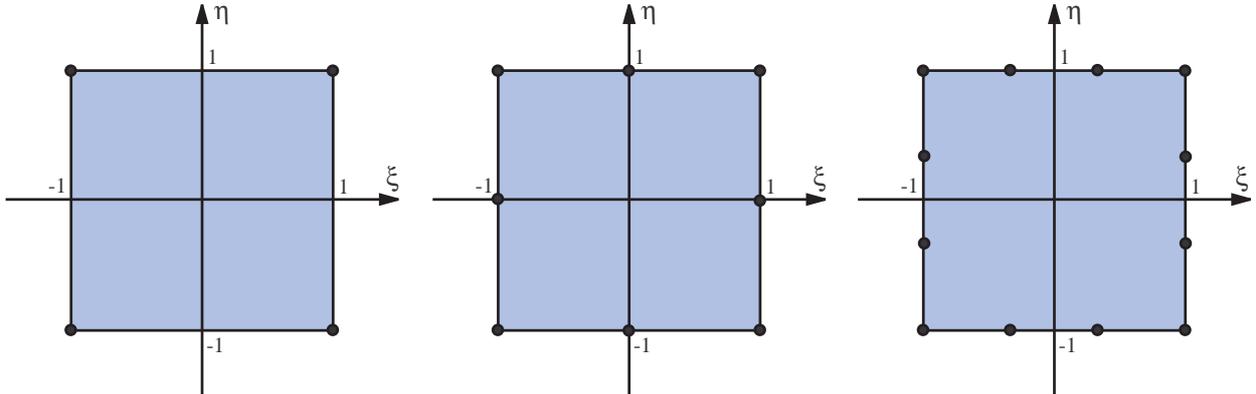


Figura 7: Elementi quadrilateri di Serendipity in coordinate normalizzate.

4.3. Elementi finiti isoparametrici

L'uso diretto di elementi quadrati in coordinate normalizzate è raramente possibile. Al fine di rappresentare geometrie più complesse, quali ad esempio quelle con elementi rettangolari non distorti o distorti e elementi quadrilateri con lati curvilinei (vedi ad es. Fig. 4), vengono utilizzate delle opportune trasformazioni di coordinate tra un elemento “genitore” (*master*) in coordinate normalizzate e il generico elemento in coordinate globali:

$$\begin{cases} x(\xi, \eta) = \sum_i \hat{N}_i(\xi, \eta) x_i \\ y(\xi, \eta) = \sum_i \hat{N}_i(\xi, \eta) y_i \end{cases} \quad (34)$$

ove x_i, y_i sono le coordinate di un numero definito di punti dell'elemento finito e \hat{N}_i sono le funzioni di *interpolazione geometrica*. Se si prendono quali punti per l'interpolazione geometrica gli stessi nodi dell'elemento finito utilizzati per l'interpolazione del campo di spostamenti e, corrispondentemente, se si assumono quali \hat{N}_i le stesse funzioni di forma N_i , gli elementi vengono definiti *isoparametrici* (nel senso che si introduce un eguale livello di raffinamento tra modellazione cinematica e geometrica). Con gli elementi master a quattro nodi e a otto nodi precedentemente considerati si possono generare elementi finiti distorti rispettivamente con lati rettilinei e parabolici.

La trasformazione di coordinate (34) deve essere *regolare* nel senso che deve esistere una corrispondenza biunivoca tra punto origine (ξ, η) e punto trasformato (x, y) (e viceversa). La condizione per l'invertibilità di tale corrispondenza è che il determinante jacobiano J della trasformazione rimanga sempre positivo in tutti i punti del dominio trasformato. Per determinante jacobiano si intende il determinante $J = \det \mathbf{J}$ della matrice jacobiana \mathbf{J} della trasformazione:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

Queste condizioni di regolarità si riflettono in specifiche restrizioni sulla distorsione massima consentita agli elementi.

Infine, l'integrazione degli elementi isoparametrici (calcolo della matrice di rigidezza e dei vettori delle forze nodali equivalenti) si esegue sull'elemento master e richiede l'utilizzo di J e \mathbf{J} per il passaggio di coordinate. L'integrazione si esegue in genere in maniera numerica, utilizzando le *formule di quadratura di Gauss*. L'integrale viene sostituito da una sommatoria discreta dei valori della funzione integranda $f(\xi, \eta)$ valutata nei cosiddetti *punti di Gauss*, moltiplicati per degli opportuni fattori peso w_h :

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{h,k} f(\xi_h, \eta_k) w_h w_k . \quad (36)$$

I pesi sono forniti in tabelle e variano a seconda del numero di punti considerati. Nel caso monodimensionale, usando n punti di Gauss la formula integra esattamente polinomi di grado fino a $(2n-1)$. Per l'elemento quadrilatero a quattro nodi si usano in genere $2 \times 2 = 4$ punti di Gauss mentre per l'elemento Serendipity ad otto nodi si usano in genere $3 \times 3 = 9$ punti di Gauss. Spesso si utilizzano anche elementi con *integrazione ridotta*. I punti di Gauss sono tipicamente anche quelli in cui vengono calcolati le deformazioni e gli sforzi.

5. Le fasi della modellazione per elementi finiti

Il procedimento risolutivo per elementi finiti si attua secondo una serie di fasi tipiche che vengono di seguito elencate in maniera sintetica:

- *idealizzazione* del problema ingegneristico di partenza (scelta del modello matematico a base del calcolo). È la fase necessaria alla schematizzazione di qualsiasi problema strutturale. Essa comprende: l'introduzione di opportune ipotesi sulla tipologia geometrica e di carico (semplificazione e regolarizzazione del contorno, eventuale introduzione di contorni fittizi, sfruttamento di eventuali condizioni di simmetria geometrica e di carico, assunzione sulle caratteristiche dei vincoli cinematici e sulla loro tipologia, e.g. perfetti o cedevoli, bilateri o unilateri, definizione della storia di carico), sul comportamento del materiale (ad es. elastico/anelastico, isotropo/anisotropo, indipendente/dipendente dal tempo), sul regime globale di risposta della struttura (ad es. statico/dinamico, in piccole/grandi deformazioni); l'adozione di specifiche assunzioni sul tipo di comportamento strutturale (ad es. monodimensionale vs. bidimensionale, piano o assialsimmetrico vs. spaziale, sforzo piano vs. deformazione piana), ecc. Le assunzioni fatte vanno debitamente tenute in conto nella valutazione critica dei risultati a valle del calcolo.
- *discretizzazione* (fase di pre-processione): suddivisione della struttura in elementi finiti mediante disegno del reticolo di elementi ("*mesh*"), scelta del tipo di elementi da utilizzare (ad es. triangolari e/o quadrilateri), ottimizzazione della topologia in relazione ai risultati attesi (ad es. infittimento della maglia in corrispondenza di zone ove sono attesi forti gradienti di sforzo, quali ad esempio zone con brusche variazioni del contorno, intagli, fessure, vincoli, carichi concentrati; cura dei rapporti di forma tra dimensione massima h_{\max} e minima h_{\min} di ciascun elemento finito, e tra dimensione massima e diametro massimo del cerchio inscritto nell'elemento (scelta ottimale con rapporti di forma $r_h = h_{\max}/h_{\min}$, $r_d = h_{\max}/d_{\max}$ non troppo elevati al fine di evitare elementi eccessivamente allungati e/o distorti, vedi Fig. 8); predisposizione per eventuali successivi raffinamenti o diradamenti della mesh ai fini del controllo della bontà dei risultati ("*approccio-h*": variazione del numero di elementi e di nodi a parità del grado dei polinomi interpolanti); collocazione

di nodi su interfacce naturali caratteristiche del problema strutturale quali ad es. frontiere tra materiali differenti, punti angolosi del contorno, punti di controllo ove si vuole monitorare l'entità degli spostamenti in maniera diretta, ecc. La fase di discretizzazione si avvale in genere di modellatori solidi predisposti all'interazione visuale con l'utente e in grado di interfacciarsi con i programmi di calcolo che gestiscono le fasi successive.

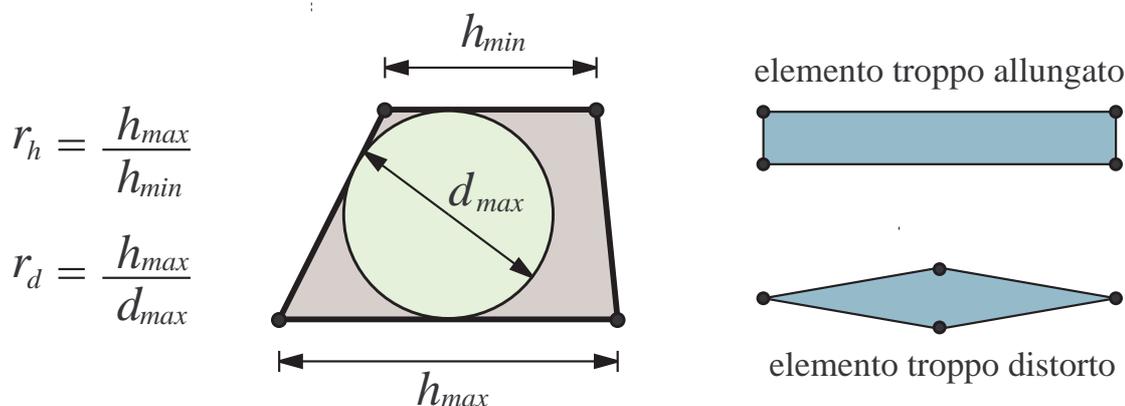


Figura 8: Rapporti di forma dell'elemento finito.

- *modellazione* del campo di spostamenti: definizione delle funzioni di forma e scelta dell'ordine d'interpolazione (eventuale predisposizione per "approccio-p": aumento del grado dei polinomi interpolanti a parità del numero di elementi finiti); calcolo delle quantità caratteristiche di ogni elemento finito: determinazione delle matrici di rigidezza e delle forze nodali equivalenti (solitamente mediante integrazione numerica approssimata), con eventuale passaggio richiesto tra sistemi di riferimento locali e globali, ecc. Questi procedimenti si prestano al calcolo automatico e vengono definiti all'interno di opportune "subroutines" chiamate ripetutamente all'interno del programma di calcolo.
- *assemblaggio* degli elementi finiti (Fig. 9) e del sistema risolvibile (formazione delle equazioni nei gradi di libertà di tutto il sistema): individuazione delle connessioni tra gradi di libertà locali e globali (tabelle delle incidenze), formazione della matrice di rigidezza dell'intera struttura e del vettore dei termini noti, imposizione delle condizioni cinematiche al contorno sui gradi di libertà vincolati. In tale fase vengono eliminate le righe in corrispondenza di tali gradi di libertà e portate a termine note le relative colonne (eliminate nel caso di vincoli non cedevoli); le equazioni eliminate vengono quindi utilizzate a valle della soluzione per determinare le reazioni vincolari associate ai gradi di libertà a spostamento assegnato. Nel caso di sistemi di forze autoequilibrati (cioè senza necessità di vincoli cinematici e a moti rigidi non impediti) occorre predisporre un vincolamento fittizio isostatico in modo da poter evitare la singolarità del sistema risolvibile (la risposta tenso-deformativa non è alterata dai vincoli fittizi). Frequentemente si esegue una condensazione statica di gruppi di gradi di libertà in favore di altri (ad es. di gradi di libertà interni al dominio rispetto a gradi di libertà relativi al contorno, vedi ad es. i procedimenti per sottostrutture).

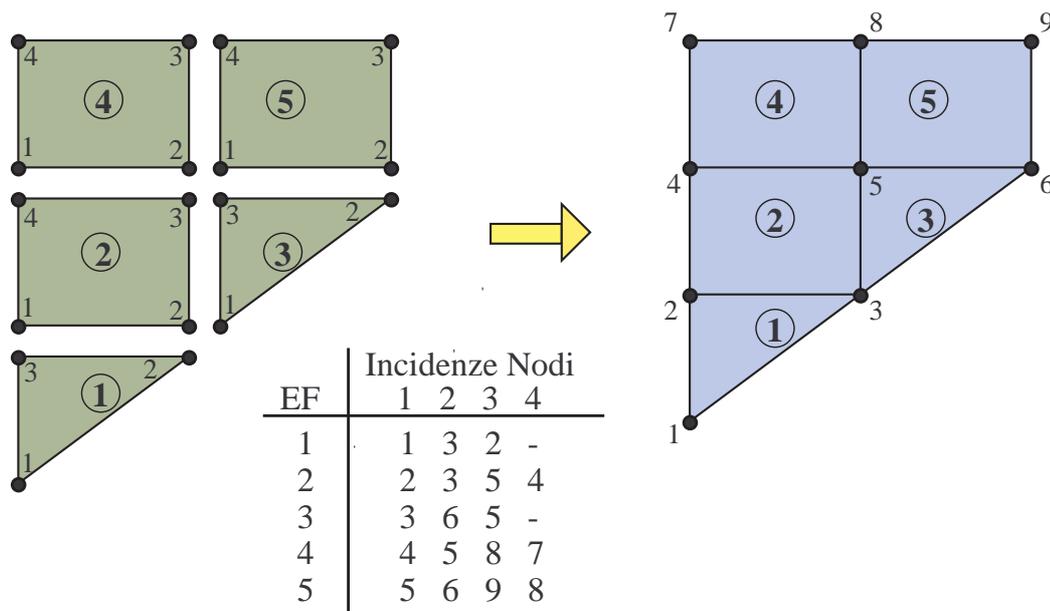


Figura 9: Assemblaggio degli elementi finiti e tabella delle incidenze.

- *soluzione*: risoluzione del sistema finale assemblato delle equazioni di equilibrio in forma discreta. In tale fase si utilizzano algoritmi noti di calcolo numerico per la soluzione di sistemi lineari. Tali algoritmi sfruttano le proprietà significative della matrice di rigidità assemblata, quali la simmetria e la sparsità (con struttura a banda). I solutori possono essere di tipo diretto o per eliminazione (metodo di Gauss e sue generalizzazioni), oppure di tipo indiretto o iterativo (es. metodo di Gauss-Seidel). I solutori attualmente disponibili consentono la soluzione di sistemi aventi un numero anche molto elevato di gradi di libertà in tempi rapidi e con notevole precisione di calcolo.
- *ricostruzione* dei campi incogniti mediante sostituzione a ritroso: determinazione degli spostamenti locali all'interno degli elementi finiti noti i valori degli spostamenti nodali in soluzione; calcolo delle deformazioni all'interno degli elementi; determinazione degli sforzi a partire dalle deformazioni per mezzo del legame costitutivo.
- *rappresentazione e visualizzazione dei risultati* ottenuti (fase di post-processione): redazione di tabulati, preparazione di diagrammi, grafici con mesh deformate, isovalori delle componenti di sforzo e deformazione, dell'energia elastica, ecc. Questa fase è cruciale per la *valutazione critica* dei risultati dal punto di vista ingegneristico e può preludere a una o più successive reiterazioni del metodo per ottenere ulteriori raffinamenti e validazioni degli esiti dell'analisi strutturale.

Bibliografia

- [1] K.J. Bathe (1996). *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [2] R.D. Cook et al. (2001). *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, IV Ed., John Wiley & Sons, New York.
- [3] L. Corradi Dell'Acqua (1992). *Meccanica delle Strutture – Le Teorie Strutturali e il Metodo degli Elementi Finiti*, Vol. 2, McGraw-Hill.

- [4] E. Hinton, D.R.J. Owen (1979). *An Introduction to Finite Element Computations*, Pineridge Press, Swansea, UK.
- [5] T.J.R. Hughes (2000). *The Finite Element Method – Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*, Dover Publications, New York.
- [6] G. Strang, G.J. Fix (1973). *An Analysis of the Finite Element Method*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.
- [7] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor (2000). *The Finite Element Method*, V Ed., Vol. 1–3, Butterworth-Heinemann, Oxford, UK.