

Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria

Corso di
MECCANICA COMPUTAZIONALE
DEI SOLIDI E DELLE STRUTTURE

A.A. 2012-2013

Prof. Giuseppe Cocchetti

Brevi note su alcuni argomenti del corso

Risolvibilità del sistema di equazioni

Per stabilire se il sistema di equazioni: $\underline{K} \cdot \underline{U} = \underline{F}$

è risolvibile è necessario analizzare la matrice di rigidità \underline{K} del sistema assemblato.

A tal fine si consideri l'energia di deformazione del sistema

elastico:

$$\mathcal{E}_D(\epsilon, \chi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} [\epsilon, \chi] \underbrace{\begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EJ \end{bmatrix}}_{\underline{D}} \begin{bmatrix} \epsilon \\ \chi \end{bmatrix} d\Gamma$$

$$\mathcal{E}_D(\epsilon, \chi) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} EA \epsilon^2 + EJ \chi^2 d\Gamma$$

Evidentemente risulta $\mathcal{E}_D = 0$ se e solo se si ha $\epsilon \equiv \chi \equiv 0$ nella struttura. In alternativa $\mathcal{E}_D > 0$.

Per i sistemi discretizzati si ha: $\begin{bmatrix} \hat{\epsilon} \\ \hat{\chi} \end{bmatrix}_n = \underline{\underline{B}}_n(s) \cdot \underline{\underline{u}}_n = \underline{\underline{B}}_n(s) \underline{\underline{C}}_n \cdot \underline{U}$

L'energia di deformazione risulta:

$$\mathcal{E}_D(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underbrace{\left[\sum_n \underline{\underline{C}}_n^T \left(\int_{\Gamma_n} \underline{\underline{B}}_n^T(s) \underline{\underline{D}}_n \underline{\underline{B}}_n(s) d\Gamma \right) \underline{\underline{C}}_n \right]}_{\underline{\underline{K}}} \underline{U}$$

cioè: $\mathcal{E}_D(\underline{U}) = \frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{\underline{K}} \underline{U}$ ed è $\mathcal{E}_D(\underline{U}) = 0$ sse $\hat{\epsilon} \equiv \hat{\chi} \equiv 0$.

Se la discretizzazione ed i vincoli della struttura sono tali che ad ogni $\underline{U} \neq 0$ corrispondano delle deformazioni $\begin{bmatrix} \hat{\epsilon} \\ \hat{\chi} \end{bmatrix} \neq 0$, si ha:

$$\frac{1}{2} \underline{U}^T \underline{K} \underline{U} > 0 \quad \forall \underline{U} \neq 0$$

\underline{K} è allora una matrice definita positiva, quindi non singolare.

Il sistema è quindi risolvibile ed esiste un'unica soluzione:

$$\underline{U} = \underline{K}^{-1} \underline{F}$$

0

Se, invece, si ha $\begin{bmatrix} \hat{\epsilon} \\ \hat{\chi} \end{bmatrix} = 0$ per qualche $\underline{\tilde{U}} \neq 0$, risulta:

$$\frac{1}{2} \underline{\tilde{U}}^T \underline{K} \underline{\tilde{U}} \geq 0 \quad \forall \underline{\tilde{U}} \neq 0$$

e \underline{K} è semi-definita positiva, cioè ha almeno un autovalore nullo ed è quindi singolare.

Il sistema ammette soluzione solo se per tutti i vettori $\underline{\tilde{U}}$

tali che $\frac{1}{2} \underline{\tilde{U}}^T \underline{K} \underline{\tilde{U}} = 0$ è anche $\underline{\tilde{U}}^T \underline{F} = 0$.

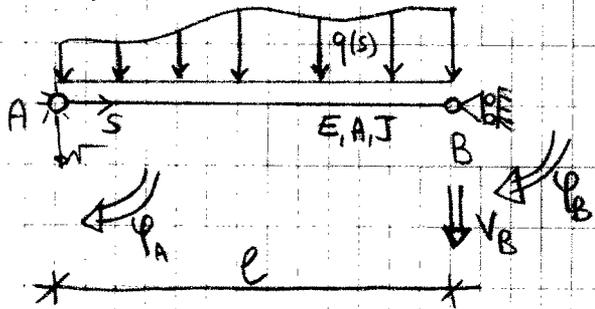
In questo caso si perde l'unicità della soluzione.

0

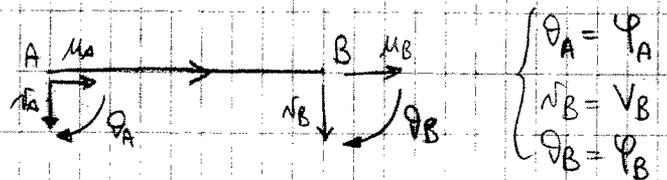
Per gli elementi finiti di trave tipo Eulero-Bernoulli, quest'ultimo caso corrisponde alla presenza di labilità nella struttura.

La soluzione è allora definita a meno di moti rigidi (anche infinitesimi) solo se i carichi sono equilibrati rispetto a tali moti rigidi (cioè se il loro lavoro è nullo: $\tilde{U}^T F = F^T \tilde{U} = 0$). Altrimenti il sistema non ammette soluzione, ovvero la struttura è incapace di garantire l'equilibrio per i carichi applicati.

Esempio



Utilizzando un elemento finito si ottiene:



$$\underline{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$V_A \quad V_B \quad \varphi_B$

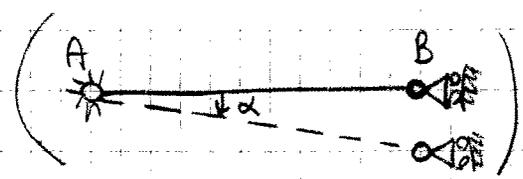
$$\underline{u} = \underline{C} \underline{U}$$

$$\underline{K} = \underline{C}^T \underline{k} \underline{C}$$

$$\underline{K} = \underline{C}^T \left[\int_0^l \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} ds \right] \underline{C} = \begin{bmatrix} \frac{4EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ \frac{2EJ}{l} & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{matrix} \rightarrow r_1 \\ \rightarrow r_2 \\ \rightarrow r_3 \end{matrix}$$

Essendo: $r_1 + r_2 l + r_3 = 0$ e $\det(\underline{K}) = 0 \rightarrow$ non esiste soluzione per un generico carico $q(s)$.

[NB: $\underline{K}\underline{\tilde{U}} = \underline{0} \Rightarrow \underline{\tilde{U}} = \text{autovettore associato all'autovalore nullo}$]

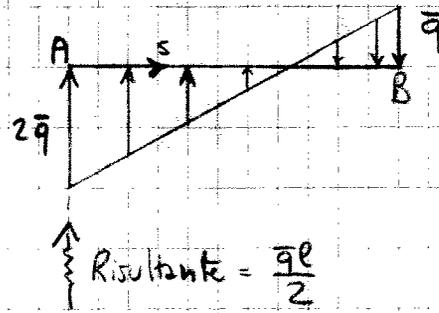
Alla configurazione $\underline{\tilde{U}} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1-l \\ 1 \end{bmatrix}$ 

corrisponde $\frac{1}{2} \underline{\tilde{U}}^T \underline{K} \underline{\tilde{U}} = 0$, cioè $\begin{bmatrix} \hat{E} \\ \hat{\alpha} \end{bmatrix} = \underline{0}$ (moto rigido o labilità).

Se il carico $q(s)$ è tale che $\underline{\tilde{U}}^T \underline{F} = 0$, esso è equilibrato nei confronti della labilità della struttura ed il

sistema ammette soluzione a meno della labilità:

ex: $q(s) = \bar{q} \left[-2 \left(1 - \frac{s}{l} \right) + \frac{s}{l} \right]$:



$$\underline{F}^T = \left[-\frac{\bar{q}l^2}{15} \quad \frac{\bar{q}l}{20} \quad \frac{\bar{q}l^2}{60} \right]$$

$$\underline{\tilde{U}}^T \underline{F} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 1-l & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 3/l \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\bar{q}l^2}{60} = 0$$

Risulta allora, eliminando ad esempio la seconda equazione:

$$\frac{EJ}{l} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{6EJ}{l^2} V_B = \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{\bar{q}l^2}{60}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi_A \\ \varphi_B \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{V_B}{l}}_{\text{moto rigido}} + \underbrace{\begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix} \frac{\bar{q}l^3}{120EJ}}_{\text{Deformazione}}$$



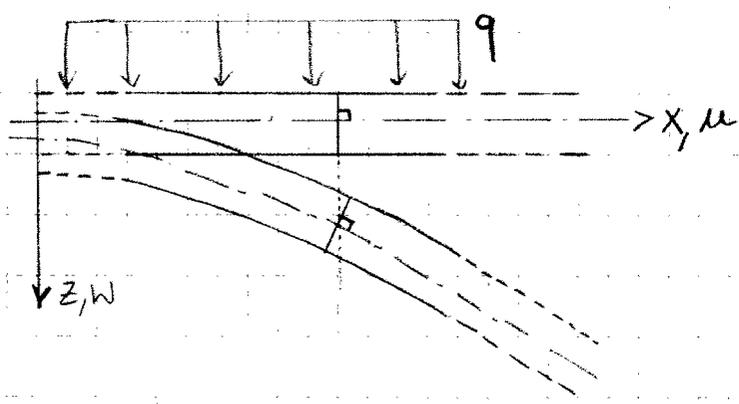
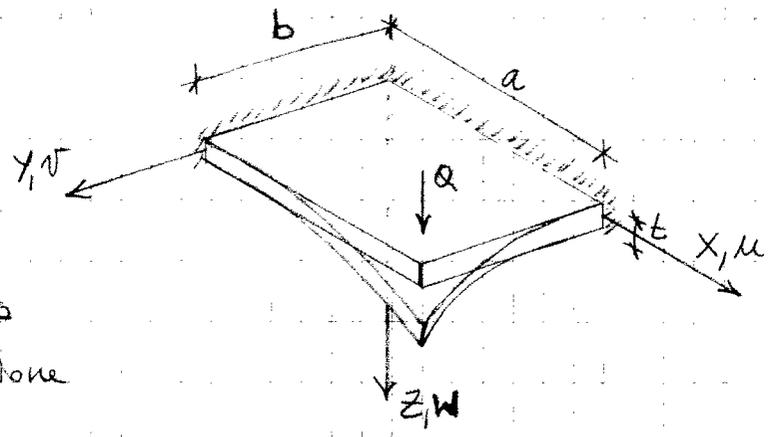
[NB: Nell'analisi strutturale non è in generale accettabile avere delle strutture labili.

Formulazione ad Elementi Finiti per

la piastra di Kirchhoff.

Ipotesi cinematiche

- a) Segmenti ortogonali al piano medio in configurazione indeformata rimangono tali anche a deformazione avvenuta.

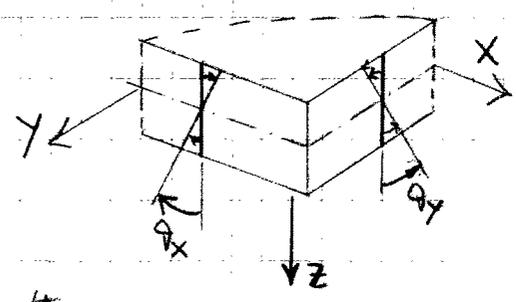


- b) Spostamenti trasversali "W" costanti nella spessore

Il campo di spostamenti è:

$$\begin{cases} u = -\partial_x(x,y) \cdot z + u_0(x,y) \\ v = -\partial_y(x,y) \cdot z + v_0(x,y) \\ w = w_0(x,y) \end{cases}$$

dove u_0, v_0, w_0 sono gli spostamenti del piano medio.



Nel seguito si considera l'elemento di piastra soggetto solo a carico trasversale q . La sollecitazione che ne consegue, nell'ambito dell'ipotesi di piccoli spostamenti rispetto allo spessore "t" della piastra, è di tipo flessionale con spostamenti $u_0 \equiv v_0 \equiv 0$.

Le deformazioni che ne conseguono sono le seguenti:

$$\left. \begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \rho_x}{\partial x} \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \rho_y}{\partial y} \\
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left(\frac{\partial \rho_x}{\partial y} + \frac{\partial \rho_y}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \rho_x \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \rho_y \\
 \epsilon_z &\equiv 0
 \end{aligned} \right\} \underline{\underline{\epsilon}} = \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = -z \begin{bmatrix} \rho_x & 0 \\ 0 & \rho_y \\ \rho_y & \rho_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -z \cdot \underline{\underline{\rho}}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = z \cdot \underline{\underline{\chi}} = z \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\chi}} = -\underline{\underline{\rho}} = \begin{bmatrix} -\rho_{xx} \\ -\rho_{yy} \\ -\rho_{xy} - \rho_{yx} \end{bmatrix} \text{ curvature}$$

La piastra di Kirchhoff è caratterizzata dall'aver spessore t piccolo rispetto alle dimensioni a, b , cioè tale che sia lecito trascurare gli scorrimenti tangenziali γ_{xz} e γ_{yz} rispetto alle deformazioni nel piano xy .

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_{xz} &= 0 \\
 \gamma_{yz} &= 0
 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial w / \partial x \\ \partial w / \partial y \end{bmatrix} \rightarrow \underline{\underline{\rho}} = \underline{\underline{\nabla}} w = \underbrace{\begin{bmatrix} \rho_x \\ \rho_y \end{bmatrix}}_{\text{gradiente}} \cdot w$$

In definitiva si ha:

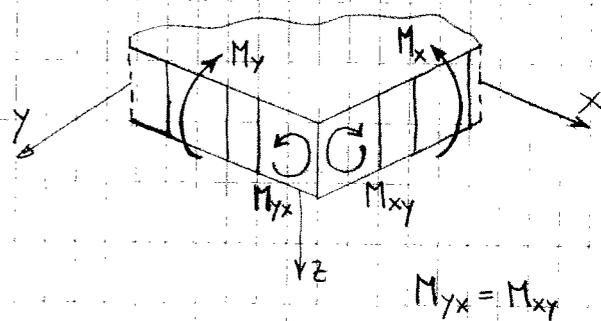
$$\underline{\underline{\epsilon}} = z \underline{\underline{\chi}} \quad \text{con} \quad \underline{\underline{\chi}} = -\underline{\underline{\nabla}} w = \begin{bmatrix} -w_{xx} \\ -w_{yy} \\ -2w_{xy} \end{bmatrix}$$

$\underline{\underline{\chi}}$ = curvature = deformazioni generalizzate.

Quantità statiche

Alle deformazioni generalizzate $\underline{\chi}$ si associano i seguenti "sforzi generalizzati":

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} z \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} dz$$



M_x, M_y = momenti flettenti; M_{xy} = momento torcente.

Si noti che l'energia di deformazione per unità di superficie, se il materiale è elastico-lineare, è esprimibile come:

$$\frac{d\epsilon}{ds} = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} dz = \frac{1}{2} \int_{-t/2}^{t/2} \underline{\epsilon}^T \underline{\sigma} dz = \frac{1}{2} \underline{\chi}^T \underbrace{\int_{-t/2}^{t/2} z \underline{\sigma} dz}_{\underline{M}} = \frac{1}{2} \underline{\chi}^T \underline{M}$$

Legame costitutivo (elastico-lineare)

Il legame costitutivo che lega le deformazioni generalizzate $\underline{\chi}$ e i momenti \underline{M} viene derivato da quello locale per stati piani di sforzo:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \underline{\epsilon}$$

$$\underline{M} = \int_{-t/2}^{t/2} z \underline{\sigma} dz = \int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz \underline{\underline{D}} \underline{\chi} = \underbrace{\frac{t^3}{12} \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{D}}} \underline{\chi}; \quad \boxed{\underline{M} = \underline{\underline{D}} \underline{\chi}}$$

Energia potenziale totale

In base a quanto ricavato finora, l'energia potenziale totale del sistema è:

$$\begin{cases} \mathcal{E} = \mathcal{E}_D - \mathcal{L}_q = \frac{1}{2} \int_S \underline{x}^T \underline{D} \underline{x} \, dS - \int_S q \cdot W \, dS \\ \underline{x} = -\underline{L} \nabla W \end{cases}$$

Cioè:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_S (-\underline{L} \nabla W)^T \underline{D} (-\underline{L} \nabla W) \, dS - \int_S q \cdot W \, dS$$

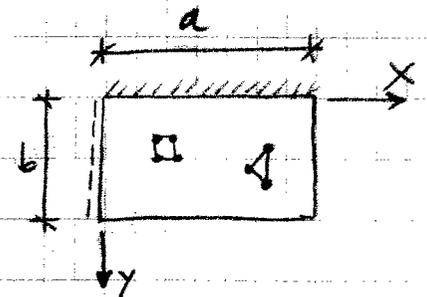
Questa può essere utilizzata per formulare un metodo agli elementi finiti per piastre inflesse.

Il campo di spostamenti trasversali " $W(x,y)$ " viene approssimato mediante funzioni di forma $N_i(x,y)$ associate a quantità cinematiche nodali (ad esempio, spostamenti e rotazioni).

Con riferimento ad un generico elemento

finito si ha:

$$\hat{W}_n(x,y) = \underline{N}_{(n)}^T \hat{W}^{(n)}$$



$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_1^{N_e} \int_{S_n} (-\underline{L} \nabla \underline{N}_{(n)}^T \hat{W}^{(n)})^T \underline{D} (-\underline{L} \nabla \underline{N}_{(n)}^T \hat{W}^{(n)}) \, dS - \sum_1^{N_e} \int_{S_n} q(x,y) \underline{N}_{(n)}^T \hat{W}^{(n)} \, dS$$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \sum_1^{Ne} \hat{\underline{W}}^{(n)T} \left[\int_{S_n} (\underline{L} \nabla \underline{N}^{(n)})^T \underline{D} (\underline{L} \nabla \underline{N}^{(n)}) dS_n \right] \hat{\underline{W}}^{(n)} - \sum_1^{Ne} \hat{\underline{W}}^{(n)T} \left[\int_{S_n} \underline{N}^{(n)} q(x,y) dS \right] \underline{f}_n$$

$\underline{B}(x,y)$

Introducendo le matrici di connettività $\underline{C}_n = \hat{\underline{W}}^{(n)} = \underline{C}_n \cdot \hat{\underline{W}}$

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \hat{\underline{W}}^T \left[\sum_1^{Ne} \underline{C}_n^T \underline{k}_n \underline{C}_n \right] \hat{\underline{W}} - \hat{\underline{W}}^T \left[\sum_1^{Ne} \underline{f}_n \right] = \frac{1}{2} \hat{\underline{W}}^T \underline{K} \hat{\underline{W}} - \hat{\underline{W}}^T \underline{F}$$

$\underline{K} =$ matrice di rigidità

$\underline{F} =$ vettore dei carichi nodali equivalenti

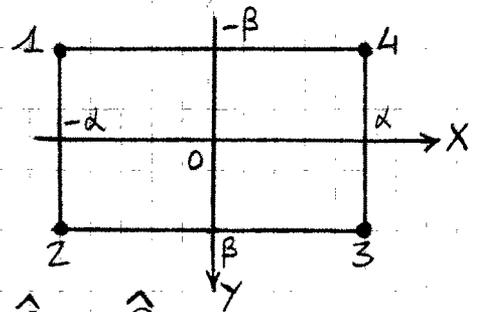
Il sistema risolvibile deriva dalla stazionarietà dell'EPT (equilibrio generalizzato ai nodi):

$$\frac{d\mathcal{E}}{d\hat{\underline{W}}} = \underline{K} \hat{\underline{W}} - \underline{F} = \underline{0}$$

$$\underline{K} \hat{\underline{W}} = \underline{F}$$

Elemento finito rettangolare a 4 nodi (12 parametri nodali)

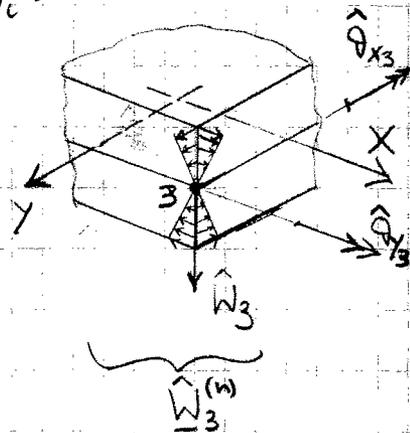
Può essere visto come estensione bidimensionale dell'elemento monodimensionale di trave di Eulero - Bernoulli.



Come parametri nodali si scelgono lo spostamento trasversale \hat{W}_i e le rotazioni $\hat{\varphi}_{xi}$ e $\hat{\varphi}_{yi}$:

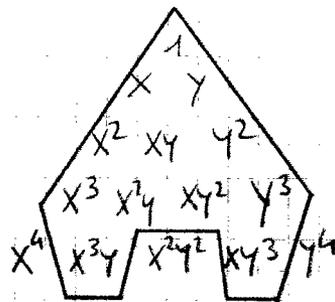
$$\hat{W}_L^{(n)} = \begin{bmatrix} \hat{W}_L \\ \hat{\varphi}_{xL} \\ \hat{\varphi}_{yL} \end{bmatrix}_n ; \quad L = 1, 2, 3, 4$$

$$\hat{W}^{(n)}_{12 \times 1} = \begin{bmatrix} \hat{W}_1^{(n)} \\ \hat{W}_2^{(n)} \\ \hat{W}_3^{(n)} \\ \hat{W}_4^{(n)} \end{bmatrix}$$



Lo spostamento trasversale $\hat{W}(x,y)$ è approssimato mediante un polinomio. Essendo 12 i parametri nodali, saranno 12 i coefficienti.

Per garantire l'isotropia geometrica nel piano xy si scelgono i seguenti termini:



$$\hat{W}(x,y) = [1, x, y, x^2, \dots, xy^3] \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ \vdots \\ c_{12} \end{bmatrix}$$

$$\hat{W}(x,y) = \underline{P}_x^T \underline{c}$$

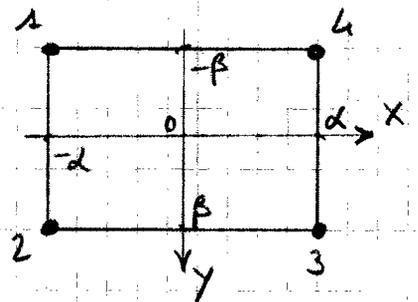
Inoltre, per $x = \bar{x}$ si ottiene un polinomio di 3° grado in y (e viceversa: per $y = \bar{y}$ si ottiene un polinomio di 3° grado in x) e ciò permette di riottenere la formulazione di E-B come caso particolare della formulazione per piastra di Kirchhoff.

Determinazione funzioni di forma

$$\hat{W}(x,y) = N_1(x,y) \cdot \hat{W}_1 + N_2(x,y) \cdot \hat{\vartheta}_{x_1} + N_3(x,y) \cdot \hat{\vartheta}_{y_1} + \\ + N_4(x,y) \cdot \hat{W}_2 + N_5(x,y) \cdot \hat{\vartheta}_{x_2} + \dots \\ + N_m(x,y) \cdot \hat{\vartheta}_{x_m} + N_{m+1}(x,y) \cdot \hat{\vartheta}_{y_m} = \underline{N}^T(x,y) \cdot \underline{\hat{W}}$$

Per definizione di parametri nodali $\underline{\hat{W}}$, ed essendosi definito $\hat{W}(x,y) = \underline{P}_x^T \cdot \underline{\epsilon}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{W}_1 = \underline{P}_x^T(-\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \\ \hat{\vartheta}_{x_1} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial x}(-\alpha, -\beta) = \frac{\partial \underline{P}_x^T}{\partial x}(-\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \\ \hat{\vartheta}_{y_1} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial y}(-\alpha, -\beta) = \frac{\partial \underline{P}_x^T}{\partial y}(-\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \\ \vdots \\ \hat{W}_4 = \underline{P}_x^T(+\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \\ \hat{\vartheta}_{x_4} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial x}(+\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} = \frac{\partial \underline{P}_x^T}{\partial x}(+\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \\ \hat{\vartheta}_{y_4} = \frac{\partial \hat{W}}{\partial y}(+\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} = \frac{\partial \underline{P}_x^T}{\partial y}(+\alpha, -\beta) \cdot \underline{\epsilon} \end{array} \right.$$



In forma matriciale: $\underline{\hat{W}} = \underline{I} \cdot \underline{\epsilon}$

con

$$\underline{I} = \begin{array}{c|cccc|cccc} 1 & -\alpha & -\beta & \alpha^2 & & & & & \alpha\beta^3 \\ 0 & +1 & 0 & -2\alpha & & & & & -\beta^3 \\ 0 & 0 & +1 & 0 & & & & & -3\alpha\beta^2 \\ 1 & -\alpha & +\beta & \alpha^2 & & & & & -\alpha\beta^3 \\ 0 & +1 & 0 & -2\alpha & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & +\alpha & +\beta & \alpha^2 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha & & & & & \\ 0 & 0 & 1 & 0 & & & & & \\ 1 & \alpha & -\beta & \alpha^2 & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & 2\alpha & & & & & \\ 0 & 0 & +1 & 0 & & & & & \end{array}$$

Dunque, risulta: $\underline{N}(x,y) = \left(\underline{I}^{-1}\right)^T \cdot \underline{P}_x(x,y)$

$$N_1(x, y) = \frac{1}{8} (1-\xi) (1-\eta) (2-\xi-\xi^2-\eta-\eta^2)$$

$$\xi = \frac{x}{L} ; \eta = \frac{y}{\beta}$$

$$N_2(x, y) = \frac{\alpha}{8} (1-\xi)^2 (1-\eta) (1+\xi)$$

$$N_3(x, y) = \frac{\beta}{8} (1-\eta)^2 (1-\xi) (1+\eta)$$

$$N_4(x, y) = \frac{1}{8} (1-\xi) (1+\eta) (2-\xi-\xi^2+\eta-\eta^2)$$

$$N_5(x, y) = \frac{\alpha}{8} (1-\xi)^2 (1+\eta) (1+\xi)$$

$$N_6(x, y) = -\frac{\beta}{8} (1+\eta)^2 (1-\xi) (1-\eta)$$

$$N_7(x, y) = \frac{1}{8} (1+\xi) (1+\eta) (2+\xi-\xi^2+\eta-\eta^2)$$

$$N_8(x, y) = -\frac{\alpha}{8} (1+\xi)^2 (1+\eta) (1-\xi)$$

$$N_9(x, y) = -\frac{\beta}{8} (1+\eta)^2 (1+\xi) (1-\eta)$$

$$N_{10}(x, y) = \frac{1}{8} (1+\xi) (1-\eta) (2+\xi-\xi^2-\eta-\eta^2)$$

$$N_{11}(x, y) = -\frac{\alpha}{8} (1+\xi)^2 (1-\eta) (1-\xi)$$

$$N_{12}(x, y) = \frac{\beta}{8} (1-\eta)^2 (1+\xi) (1+\eta)$$

$$\underline{\underline{B}} = -\underline{\underline{L}} \underline{\underline{\nabla}} \underline{\underline{N}}^T = \begin{bmatrix} -N_{1,xx} & -N_{2,xx} & \dots & -N_{12,xx} \\ -N_{1,yy} & -N_{2,yy} & \dots & -N_{12,yy} \\ -2N_{1,xy} & -2N_{2,xy} & \dots & -2N_{12,xy} \end{bmatrix}$$

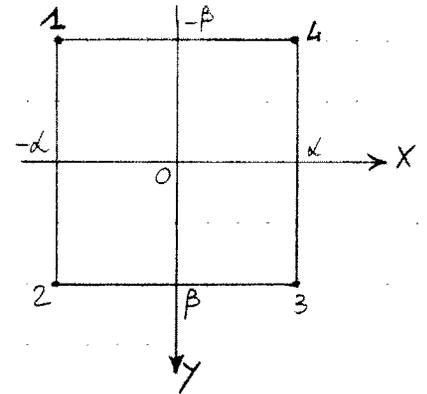
- Esempi con elementi finiti di piastra (Kirchhoff)

- Integrazione numerica

1) Matrice di rigidezza per l'elemento di piastra (Kirchhoff)

Si scelgono, ordinatamente, i seguenti gradi di libert :

$$\underline{\hat{W}}^T = [\hat{W}_1, \hat{Q}_{x_1}, \hat{Q}_{y_1}, \hat{W}_2, \hat{Q}_{x_2}, \hat{Q}_{y_2}, \dots, \hat{W}_4, \hat{Q}_{x_4}, \hat{Q}_{y_4}]$$



Si ha:
$$\underline{k} = \int_{-b}^b \int_{-a}^a \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dx dy$$

$$\underline{k}_0 = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 6 & -6 & 0 & 6 & -3 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 8 & -6 & 0 & 4 & -3 & 0 & 2 & 3 & 0 & 4 \\ -6 & 0 & -6 & 6 & 0 & -6 & 3 & 0 & -3 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 4 & -6 & 0 & 8 & -3 & 0 & 4 & 3 & 0 & 2 \\ -3 & 0 & -3 & 3 & 0 & -3 & 6 & 0 & -6 & -6 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -3 & 0 & 4 & -6 & 0 & 8 & 6 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 3 & -6 & 0 & 6 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 0 & 2 & -6 & 0 & 4 & 6 & 0 & 8 \end{bmatrix} \cdot \frac{D}{6\gamma^3 a^2}$$

$$\gamma = \frac{b}{a}$$

$$D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)} \quad t = \text{spessore}$$

$$\nu = 0,3$$

$$\underline{k}_A = \begin{bmatrix} 192 & 66 & 66 & -192 & -66 & 21 & 192 & -21 & -21 & -192 & 21 & -66 \\ 66 & 56 & 90 & -66 & -56 & 0 & 21 & 14 & 0 & -21 & -14 & 0 \\ 66 & 90 & 56 & -21 & 0 & -14 & 21 & 0 & 14 & -66 & 0 & -56 \\ -192 & -66 & -21 & 192 & 66 & -66 & -192 & 21 & 66 & 192 & -21 & 21 \\ -66 & -56 & 0 & 66 & 56 & -90 & -21 & -14 & 0 & 21 & 14 & 0 \\ 21 & 0 & -14 & -66 & -90 & 56 & 66 & 0 & -56 & -21 & 0 & 14 \\ 192 & 21 & 21 & -192 & -21 & 66 & 192 & -66 & -66 & -192 & 66 & -21 \\ -21 & 14 & 0 & 21 & -14 & 0 & -66 & 56 & 90 & 66 & -56 & 0 \\ -21 & 0 & 14 & 66 & 0 & -56 & -66 & 90 & 56 & 21 & 0 & -14 \\ -192 & -21 & -66 & 192 & 21 & -21 & -192 & 66 & 21 & 192 & -66 & 66 \\ 21 & -14 & 0 & -21 & 14 & 0 & 66 & -56 & 0 & -66 & 56 & -90 \\ -66 & 0 & -56 & 21 & 0 & 14 & -21 & 0 & -14 & 66 & -90 & 56 \end{bmatrix} \cdot \frac{D}{300\gamma a^2}$$

$$\underline{\underline{k}}_2 = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 0 & 3 & 3 & 0 & -3 & 3 & 0 & -6 & 6 & 0 \\ 6 & 8 & 0 & 3 & 4 & 0 & -3 & 2 & 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 6 & 6 & 0 & -6 & 6 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 6 & 8 & 0 & -6 & 4 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 0 & -6 & -6 & 0 & 6 & -6 & 0 & 3 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 6 & 4 & 0 & -6 & 8 & 0 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & 0 & -3 & -3 & 0 & 3 & -3 & 0 & 6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 & 3 & 2 & 0 & -3 & 4 & 0 & -6 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{D \cdot \gamma}{6 \cdot d^2}$$

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{Q}} (\underline{\underline{k}}_0 + \underline{\underline{k}}_1 + \underline{\underline{k}}_2) \underline{\underline{Q}}$$

$$\underline{\underline{Q}} = \text{diag}(1, \alpha, \beta, 1, \alpha, \beta, 1, \alpha, \beta, 1, \alpha, \beta)$$

Se $\alpha = \beta$ (cioè $\gamma = 1$) si ha:

$$\underline{\underline{k}} = \underline{\underline{Q}} \begin{bmatrix} 264 & 122 & 122 & -114 & 28 & 107 & -36 & 43 & 43 & -114 & 107 & 28 \\ 122 & 152 & 30 & 28 & 48 & 0 & -43 & 38 & 0 & -107 & 62 & 0 \\ 122 & 30 & 152 & -107 & 0 & 62 & -43 & 0 & 38 & 28 & 0 & 48 \\ -114 & 28 & -107 & 264 & 122 & -122 & -114 & 107 & -28 & -36 & 43 & -43 \\ 28 & 48 & 0 & 122 & 152 & -30 & -107 & 62 & 0 & -43 & 38 & 0 \\ 107 & 0 & 62 & -122 & -30 & 152 & -28 & 0 & 48 & 43 & 0 & 38 \\ -36 & -43 & -43 & -114 & -107 & -28 & 264 & -122 & -122 & -114 & -28 & -107 \\ 43 & 38 & 0 & 107 & 62 & 0 & -122 & 152 & 30 & -28 & 48 & 0 \\ 43 & 0 & 38 & -28 & 0 & 48 & -122 & 30 & 152 & 107 & 0 & 62 \\ -114 & -107 & 28 & -36 & -43 & 43 & -114 & -28 & 107 & 264 & -122 & 122 \\ 107 & 62 & 0 & 43 & 38 & 0 & -28 & 48 & 0 & -122 & 152 & -30 \\ 28 & 0 & 48 & -43 & 0 & 38 & -107 & 0 & 62 & 122 & -30 & 152 \end{bmatrix}$$

$$\frac{D}{100 d^2} \underline{\underline{Q}}$$

2) Vetture termini noti

$$\underline{f} = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} q(x,y) \underline{N}(x,y) dx dy$$

Se $q(x,y) = q_0 + q_{0x} \frac{x}{\alpha} + q_{0y} \frac{y}{\beta}$ si ottiene:

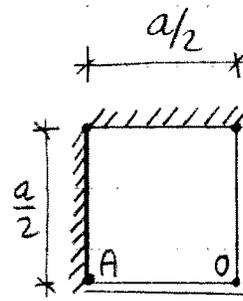
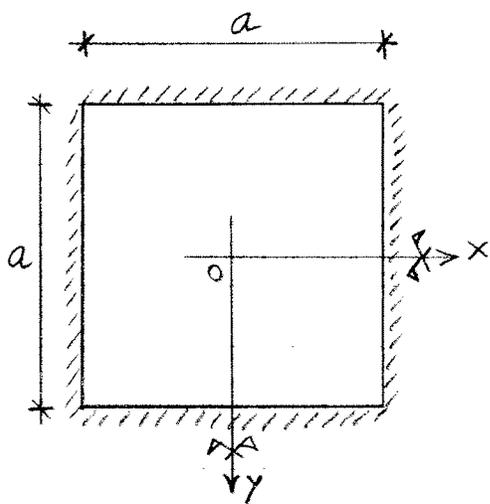
$$\underline{f}_0 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 & 3 & 1 & -1 & 3 & -1 & -1 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T \cdot \frac{\alpha\beta}{3} \cdot q_0$$

$$\underline{f}_x = \begin{bmatrix} -18 & -3 & -5 & -18 & -3 & 5 & 18 & -3 & -5 & 18 & -3 & 5 \end{bmatrix}^T \frac{\alpha\beta}{45} q_{0x}$$

$$\underline{f}_y = \begin{bmatrix} -18 & -5 & -3 & 18 & 5 & -3 & 18 & -5 & -3 & -18 & 5 & -3 \end{bmatrix}^T \frac{\alpha\beta}{45} q_{0y}$$

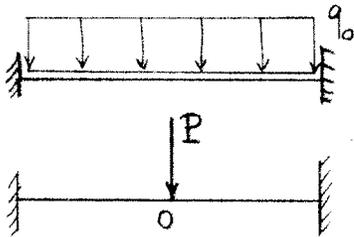
$$\underline{f} = \underline{Q} \cdot (\underline{f}_0 + \underline{f}_x + \underline{f}_y)$$

3) Piastre quadrata con lati incastriati



per simmetria
 \Rightarrow

$$\nu = 0,3$$

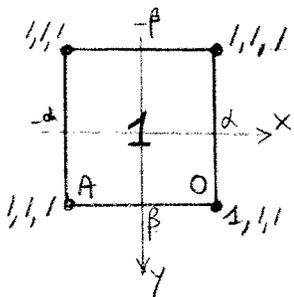


$$q(x, y) \equiv q_0$$

$P = \text{forza in } O$

Si analizza solo un quarto di piastra:

a) 1 elemento finito



$$\alpha = \beta = \frac{a}{4}$$

EF	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	/	/	/	/	/	/	1	/	/	/	/	/

$$\rightarrow K = k_{77} = \frac{264}{100} \frac{D}{a^2} = 42,24 \frac{D}{a^2}$$

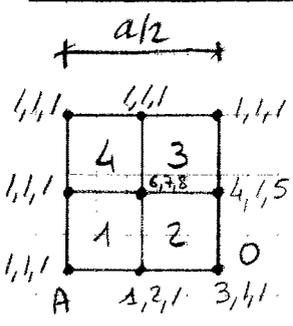
$$F_q = f_7 = q \cdot a^2 = \frac{q \cdot a^2}{16}$$

$$F_P = P/4$$

$$\Rightarrow \hat{W}_q = 1,480 \frac{q a^4}{1000 D} ; (\hat{m}_x)_q|_O = (\hat{m}_y)_q|_O = 4,616 \frac{q a^2}{100} ; (\hat{m}_x)_q|_A = -3,551 \frac{q a^2}{100}$$

$$\hat{W}_P = 5,919 \frac{P a^2}{1000 D} ; (\hat{m}_x)_P|_O = (\hat{m}_y)_P|_O = 18,47 \frac{P}{100} ; (\hat{m}_x)_P|_A = -14,20 \frac{P}{100}$$

b) 4 elementi finiti



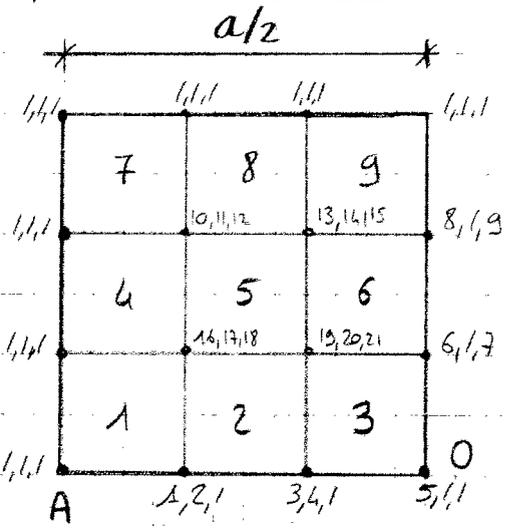
$$\alpha = \frac{a}{8}$$

gde EF	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	/	/	/	/	/	/	12	/	678			
2		678		12	/	3	/	/	4	5		
3			/	/	/	678	4	5	/	/	/	
4				/	/	/	678	/	/	/		

$$\Rightarrow (\hat{W}_3)_q = 1,403 \frac{qa^4}{1000D}; (\hat{M}_x)_q \Big|_0 = 2,78 \frac{qa^2}{100}; (\hat{M}_x)_q \Big|_A = -4,76 \frac{qa^2}{100}$$

$$(\hat{W}_3)_P = 6,134 \frac{Pa^2}{1000D}; (\hat{M}_x)_q \Big|_0 = 24,39 \frac{P}{100}; (\hat{M}_x)_q \Big|_A = -11,78 \frac{P}{100}$$

c) 9 elementi finiti



$$\alpha = \frac{a}{12}$$

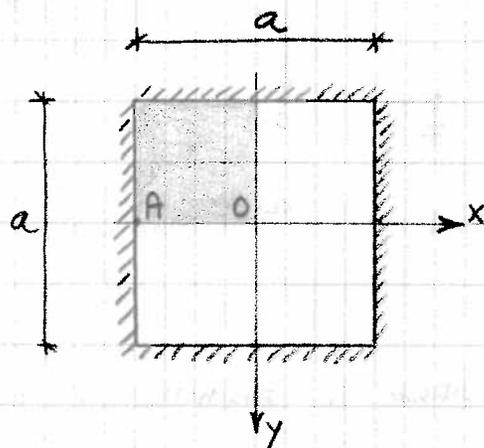
gde EF	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
1	/	/	/	/	/	/	12	/	16	17	18		
2		16	17	18	1	2	/	3	4	/	19	20	21
3			19	20	21	3	4	/	5	/	6	7	
4				/	/	/	16	17	18	10	11	12	
5		10	11	12	16	17	18	19	20	21	13	14	15
6		13	14	15	19	20	21	6	7	8	9		
7			/	/	/	/	10	11	12	/	/	/	
8		/	/	/	10	11	12	13	14	15	/	/	
9		/	/	/	13	14	15	8	9	/	/	/	

$$\Rightarrow (\hat{W}_5)_q = 1,332 \frac{qa^4}{1000D}; (\hat{M}_x)_q \Big|_0 = 2,50 \frac{qa^2}{100}; (\hat{M}_x)_q \Big|_A = -4,96 \frac{qa^2}{100}$$

$$(\hat{W}_5)_P = 5,910 \frac{Pa^2}{1000D}; (\hat{M}_x)_q \Big|_0 = 28,40 \frac{P}{100}; (\hat{M}_x)_q \Big|_A = -12,14 \frac{P}{100}$$

In sintesi:

n° EF	Carico uniformemente distribuito q			Carico concentrato P		
	$\hat{W}_0 \cdot \frac{1000 D}{9 a^4}$	$(\hat{M}_x)_0 \cdot \frac{100}{9 a^2}$	$(\hat{M}_x)_A \cdot \frac{100}{9 a^2}$	$\hat{W}_0 \cdot \frac{1000 D}{P a^2}$	$(\hat{M}_x)_0 \cdot \frac{100}{P}$	$(\hat{M}_x)_A \cdot \frac{100}{P}$
1	1,480	4,616	-3,551	5,919	18,47	-14,20
4	1,403	2,78	-4,76	6,134	24,39	-11,78
9	1,332	2,50	-4,96	5,910	28,40	-12,14
esatto	1,26			5,60		



Osservazione

L'equazione indefinita per le piastre, secondo il modello di Kirchhoff, è la seguente:

$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{D}$$

Se si trascura il contributo dei momenti torcenti, per la simmetria della piastra analizzata, si ha:

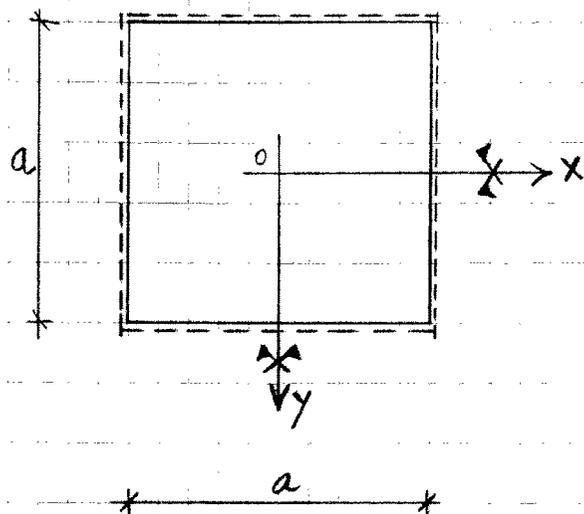
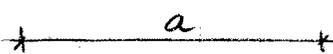
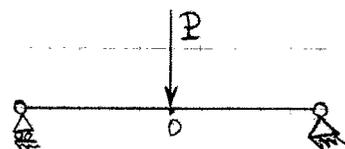
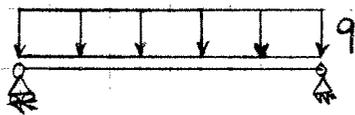
$$\frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} = \frac{q}{2D}$$

La piastra è così modellata tramite due insiemi di strisce ortogonali e non interagenti, ciascuna caricata con carico $q/2$.

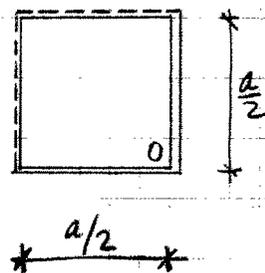


$$W_{max} = \frac{1}{384} \frac{\frac{q}{2} a^4}{\frac{E E^3}{12(1-\nu^2)}} \cong 0,001302 \frac{q a^4}{D} = W_{esatto} \cdot (1 + 3,3\%)$$

4) Piastre quadrate appoggiate



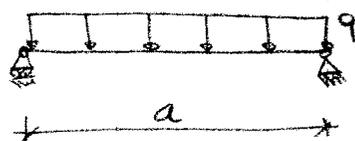
Sfruttando la simmetria si discretizza un quarto di piastra:



n° EF	Carico uniformemente distribuito q		Carico concentrato P in O	
	$\hat{W}_0 \frac{1000 D}{9 a^4}$	$(\hat{M}_x)_0 \frac{100}{9 a^2}$	$\hat{W}_0 \frac{1000 D}{2 a^2}$	$(\hat{M}_x)_0 \frac{100}{P}$
1	5,063	6,602	13,784	22,82
4	4,328	5,217	12,327	29,55
9	4,181	4,973	11,972	33,68
Esatto	4,062		11,60	

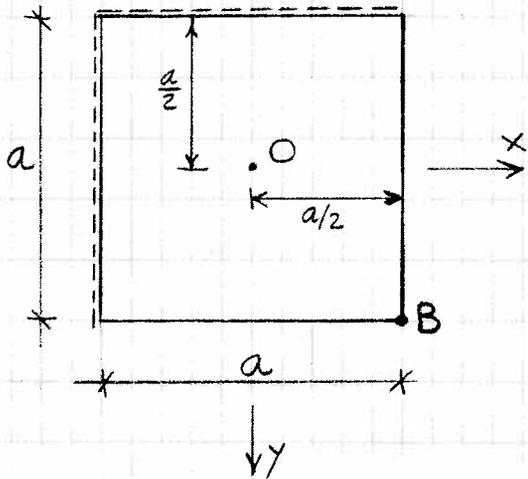
NB: In questo caso il contributo dei momenti torcenti non può essere trascurato.

Infatti:



$$W_{max} = \frac{5}{384} \frac{q a^4}{2D} \approx 0,006510 \cdot \frac{q a^4}{D} = W_{esatto} (1 + 60,3\%)$$

5) Piastro appoggiata su due lati



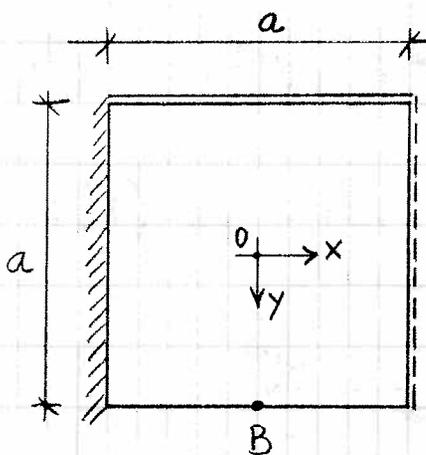
-) Carico uniformemente distribuito q
-) Carico concentrato P applicato in B.

$\nu = 0,3$

Si discretizza tutta la piastra.

n° EF	Carico unif. distr. q		Carico concentrato P	
	$\hat{W}_B \frac{1000}{9a^4}$	$(\hat{M}_x)_O \frac{100}{9a^2}$	$\hat{W}_B \frac{1000}{Pa^2}$	$(\hat{M}_x)_O \frac{100}{P}$
1	178,6	5,207	714,3	0
4	178,6	9,229	178,6	0

6) Piastro con vincoli misti



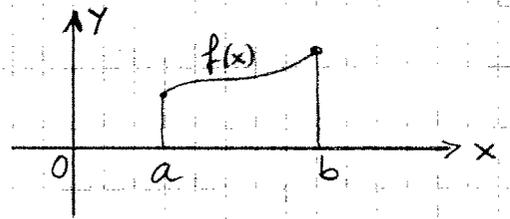
-) Carico uniformemente distribuito q
-) Carico concentrato P applicato in B.

n° EF	Carico Unif. distribuito q		Carico concentrato P	
	$\hat{W}_B \frac{1000}{9a^4}$	$(\hat{M}_x)_B \frac{100}{9a^2}$	$\hat{W}_B \frac{1000}{Pa^2}$	$(\hat{M}_x)_B \frac{100}{P}$
4	4,908	8,08	30,35	54,78

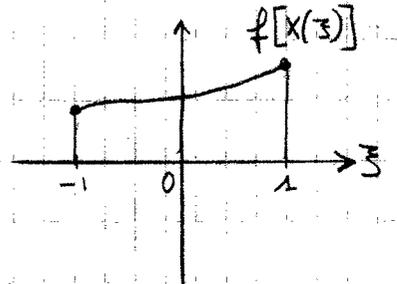
7) Integrazione numerica

Si debba valutare il seguente integrale:

$$\int_a^b f(x) dx$$



Ci si riconduce al dominio di riferimento mediante un cambiamento di variabile:



$$x = x(z) = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} z$$

$$\int_{-1}^1 f[x(z)] \frac{b-a}{2} dz = \frac{b-a}{2} \underbrace{\int_{-1}^1 f[x(z)] dz}_I = \frac{b-a}{2} \cdot I$$

I può essere approssimato mediante una combinazione lineare, con opportuni coefficienti, di valori della funzione:

$$I \cong I_N = \sum_{k=1}^N \gamma_k^{(N)} f[x(z_k^{(N)})] = \gamma_1^{(N)} f[x(z_1^{(N)})] + \dots + \gamma_N^{(N)} f[x(z_N^{(N)})]$$

I punti in cui valutare la funzione ($z_k^{(N)}$) ed i relativi pesi ($\gamma_k^{(N)}$) dipendono dal numero degli stessi (N).

N	$\gamma_1^{(N)}; \gamma_2^{(N)}; \dots; \gamma_N^{(N)}$	$z_1^{(N)}; z_2^{(N)}; \dots; z_N^{(N)}$
1	2	0
2	1; 1	$-1/\sqrt{3}; 1/\sqrt{3}$
3	$5/9; 8/9; 5/9$	$-\sqrt{3/5}; 0; \sqrt{3/5}$
4	$\gamma_1^{(4)}; \gamma_2^{(4)}; \gamma_2^{(4)}; \gamma_4^{(4)}$	$-z_1^{(4)}; -z_2^{(4)}; z_2^{(4)}; z_1^{(4)}$

$$\gamma_1^{(4)} = 0,347854845137454$$

$$z_1^{(4)} = 0,861136311594953$$

$$\gamma_2^{(4)} = 0,652145154862546$$

$$z_2^{(4)} = 0,339981043584856$$

NB: Con N punti di Gauss si integra esattamente un polinomio di grado $2N-1$

Ad. es. $f(\xi) = a + b\xi + c \cdot \xi^2$; $I = \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = 2a + \frac{2}{3}c$

$$I_1 = W_1^{(1)} \cdot f(\xi_1^{(1)}) = 2 \cdot f(0) = 2a$$

$$I_2 = W_1^{(2)} f(\xi_1^{(2)}) + W_2^{(2)} f(\xi_2^{(2)}) = 1 \cdot f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 1 \cdot f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= a - \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{c}{3} + a + \frac{b}{\sqrt{3}} + \frac{c}{3} = 2a + \frac{2}{3}c \equiv I$$

Con 2 punti si integra esattamente un polinomio di $(2 \cdot 2 - 1) = 3^\circ$ grado.

— 0 —

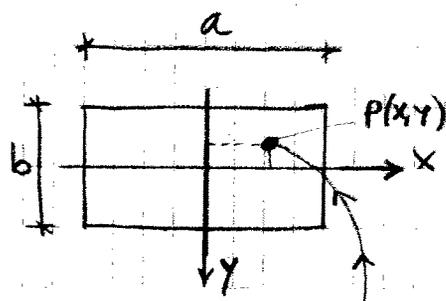
NB: Nel caso bidimensionale si ha:

$$\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega$$

$$\int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} f(x,y) dy dx$$

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \det$$

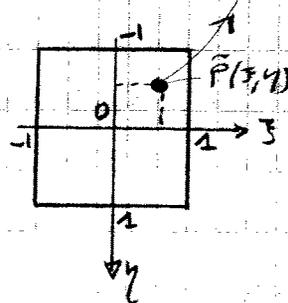
$$I = \int_{\Omega} f(x,y) d\Omega = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f[x(\xi,\eta); y(\xi,\eta)] \cdot J \cdot d\xi \cdot d\eta$$



$$\Downarrow$$

$$x = x(\xi, \eta)$$

$$y = y(\xi, \eta)$$



L'integrale è approssimato da una doppia sommatoria:

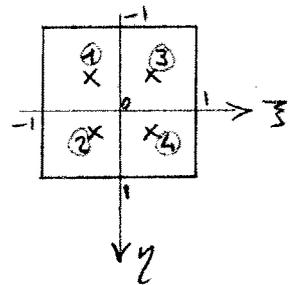
$$I \cong I_N = \sum_{r=1}^N \sum_{s=1}^N \gamma_{rs}^{(N)} f[X(\xi_r^{(N)}; \eta_s^{(N)}); Y(\xi_r^{(N)}; \eta_s^{(N)})]$$

in cui
$$\begin{cases} \gamma_{rs}^{(N)} = \gamma_r^{(N)} \cdot \gamma_s^{(N)} \\ \eta_s^{(N)} = \xi_s^{(N)} \end{cases}$$

Dalla tabella precedente.

Ad esempio, con $N=2$ (cioè $2 \times 2 = 4$ punti di Gauss):

$$\begin{aligned} I_2 = & \gamma_{11}^{(2)} f[X(\xi_1^{(2)}; \eta_1^{(2)}); Y(\xi_1^{(2)}; \eta_1^{(2)})] + \\ & + \gamma_{12}^{(2)} f[X(\xi_1^{(2)}; \eta_2^{(2)}); Y(\xi_1^{(2)}; \eta_2^{(2)})] + \\ & + \gamma_{21}^{(2)} f[X(\xi_2^{(2)}; \eta_1^{(2)}); Y(\xi_2^{(2)}; \eta_1^{(2)})] + \\ & + \gamma_{22}^{(2)} f[X(\xi_2^{(2)}; \eta_2^{(2)}); Y(\xi_2^{(2)}; \eta_2^{(2)})] \end{aligned}$$



con $\gamma_{11}^{(2)} = \gamma_1^{(2)} \cdot \gamma_1^{(2)} = 1 \cdot 1 = 1$

$\gamma_{12}^{(2)} = \gamma_1^{(2)} \cdot \gamma_2^{(2)} = 1 \cdot 1 = 1$

$\gamma_{21}^{(2)} = \gamma_2^{(2)} \cdot \gamma_1^{(2)} = 1 \cdot 1 = 1$

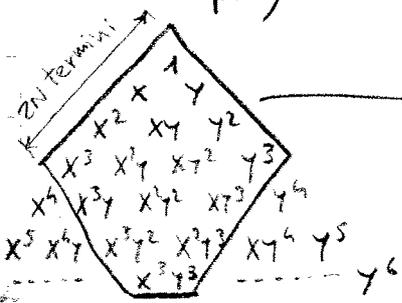
$\gamma_{22}^{(2)} = \gamma_2^{(2)} \cdot \gamma_2^{(2)} = 1 \cdot 1 = 1$

$\xi_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_1^{(2)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\xi_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \eta_2^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Con N punti di Gauss (in ogni direzione: $N=2 \rightarrow 2 \times 2 = 4$ punti di Gauss) si integra esattamente un polinomio con termini di grado $2N-1$ in ogni direzione.

Ad esempio, con 2×2 punti si integra esattamente:

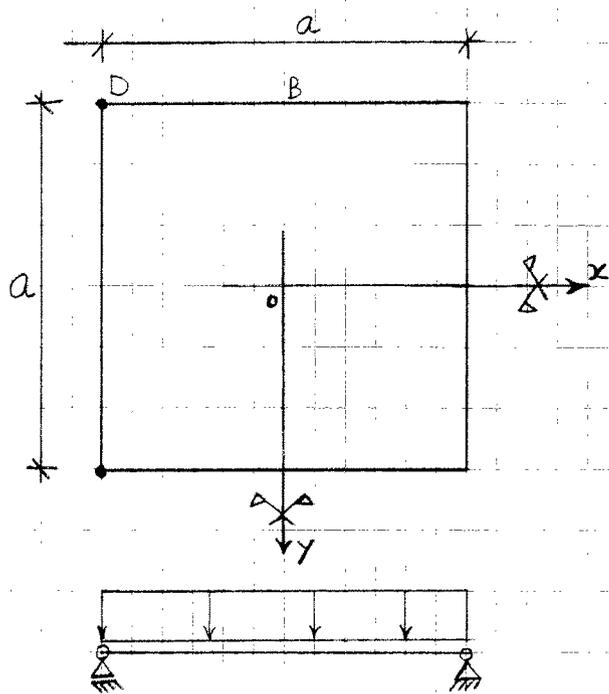


$$\begin{aligned} f(x) = & a + bx + cy + dx^2 + exy + fy^2 + \\ & + gx^3 + hx^2y + mx^2y^2 + ny^3 + \\ & + px^4y + qx^3y^2 + rx^2y^3 + s \cdot x^3y^2 + t \cdot x^2y^3 + u \cdot x^3y^3 \end{aligned}$$

- Altri esempi con elementi finiti di piastra (Kirchhoff)

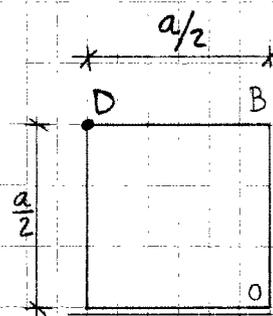
- Osservazioni sulla non-conformità dell'EF di piastra a 4 nodi

1) Piastre appoggiate negli angoli



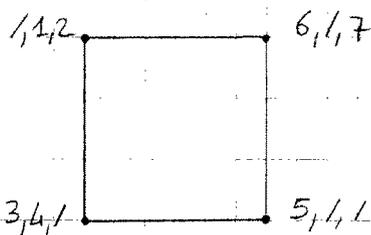
$$\nu = 0,3$$

Simmetria
 \Rightarrow



Si analizza solo un quarto di piastra.

$$D = \frac{E t^3}{12(1-\nu^2)}$$



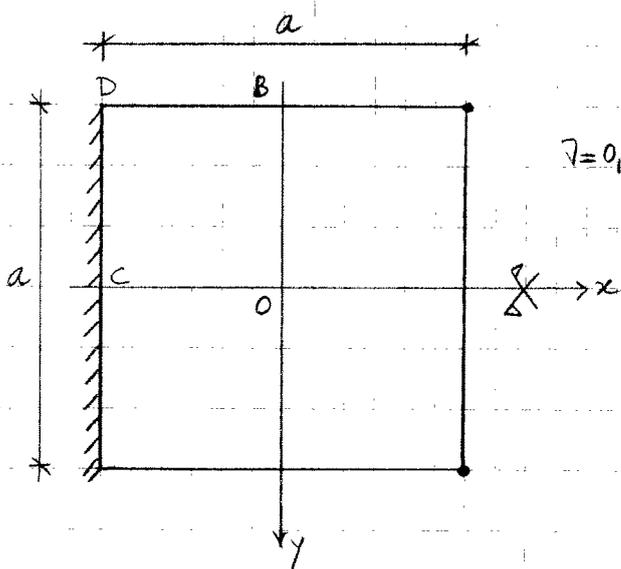
gli	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	1	2	3	4	1	5	1	1	6	1	7

$$(\hat{Q}_x)_D = 0,04317 \frac{q a^3}{D} = (\hat{Q}_y)_D$$

$$\hat{W}_O = 24,79 \frac{q a^4}{1000 D} ; (\hat{M}_x)_O = 11,75 \frac{q a^2}{100}$$

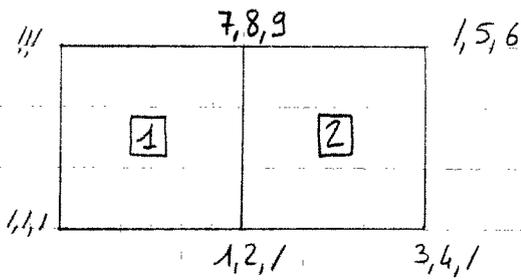
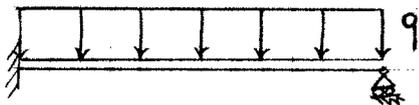
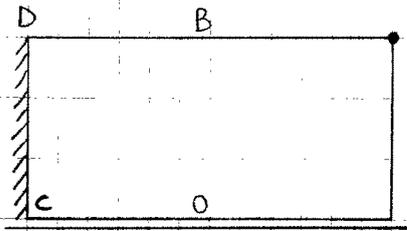
$$\hat{W}_B = 14,53 \frac{q a^4}{1000 D} ; (\hat{M}_x)_B = 17,41 \frac{q a^2}{100}$$

2) Piastrina con appoggi negli angoli e l'isto incastrato



$$\gamma = 0,3$$

Simmetria



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	/	/	/	/	/	/	1	2	/	7	8	9
2	7	8	9	1	2	/	3	4	/	/	5	6

$$\hat{W}_0 = 7,99 \frac{qa^4}{1000D}$$

$$(\hat{m}_x)_0 = 7,46 \frac{qa^2}{100}$$

$$(\hat{m}_y)_0 = 5,03 \frac{qa^2}{100}$$

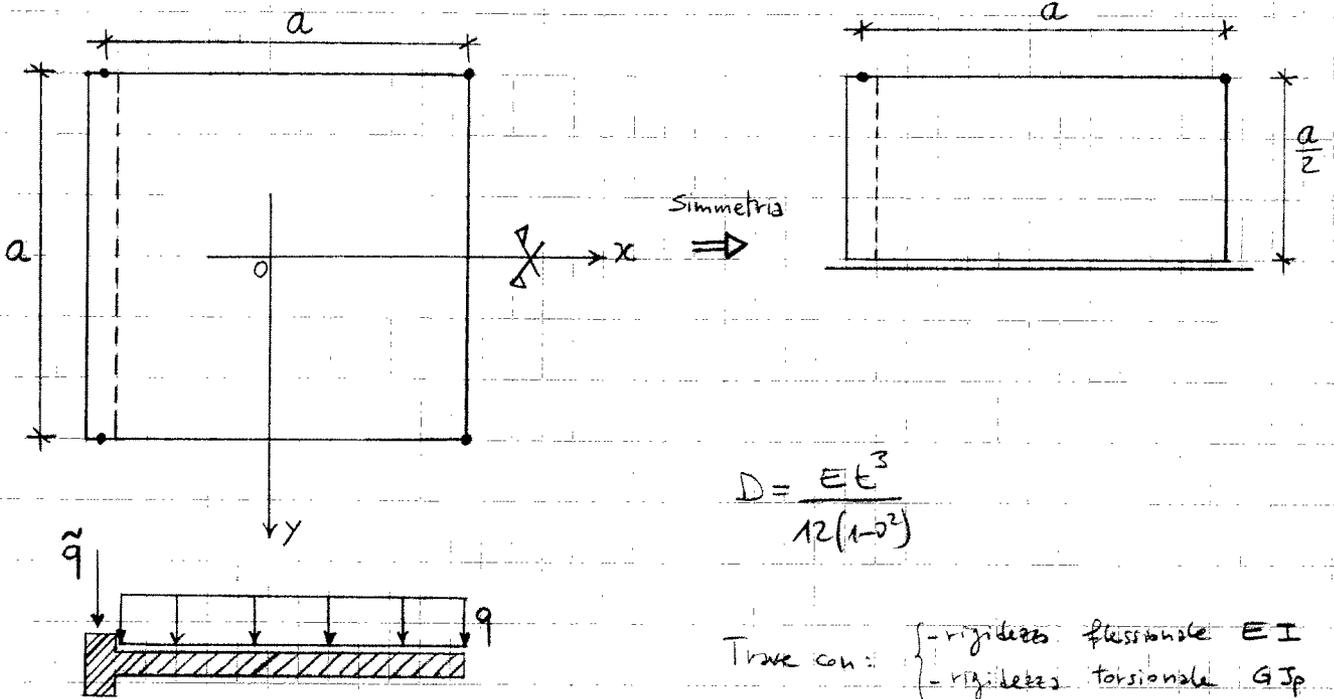
$$\hat{W}_B = 4,78 \frac{qa^4}{1000D}$$

$$(\hat{m}_x)_B = 8,36 \frac{qa^2}{100}$$

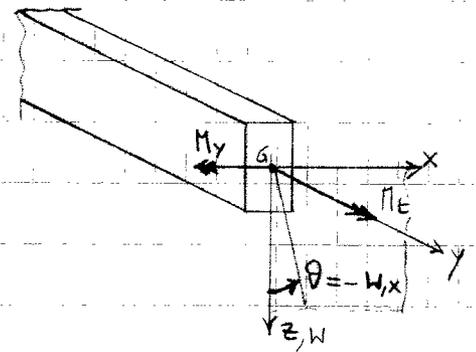
$$\text{NB: } (\hat{m})_{0,B} = \frac{(\hat{m})_{0,B}^{[1]} + (\hat{m})_{0,B}^{[2]}}{2}$$

$$(\hat{m}_x)_C = -12,92 \frac{qa^2}{100}$$

3) Piastra con appoggi negli angoli e trave di rinforzo



$$\begin{cases} \Pi_y = EI \tilde{\chi} \\ \Pi_t = GJ_p \vartheta_{yy} \end{cases} \quad e \quad \tilde{\chi} = \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \vartheta_{yy} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} W_{yy}(-\frac{a}{2}, y) \\ W_{xy}(-\frac{a}{2}, y) \end{bmatrix}$$



L'energia di deformazione del sistema è la seguente:

$$\mathcal{E}_D = \frac{1}{2} \int_S [m_x \quad m_y \quad m_{xy}] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \end{bmatrix} dS + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} [M_y \quad \Pi_t] \begin{bmatrix} \tilde{\chi} \\ \vartheta_{yy} \end{bmatrix} dy = \frac{1}{2} \int_S \underline{m}^T \underline{\chi} dS + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \underline{\Pi}^T \tilde{\chi} dy$$

$$\text{con } \underline{m} = \underline{D} \underline{\chi}; \quad \underline{\Pi} = \begin{bmatrix} EI & 0 \\ 0 & GJ_p \end{bmatrix} \tilde{\chi} = \underline{\tilde{D}} \tilde{\chi}; \quad \underline{\chi} = - \begin{bmatrix} W_{xx} \\ W_{yy} \\ 2W_{xy} \end{bmatrix}; \quad \tilde{\chi} = - \begin{bmatrix} W_{yy}(-\frac{a}{2}, y) \\ W_{xy}(-\frac{a}{2}, y) \end{bmatrix}$$

NB: La connessione tra gli elementi è realizzata mediante l'utilizzo della stress funzione $W(x, y)$ per lo spostamento trasversale \rightarrow stress cinematica.

$$\mathcal{E} = EPT = \frac{1}{2} \int_S \underline{X}^T(\underline{w}) \underline{D} \underline{X}(\underline{w}) dS + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tilde{\underline{X}}^T[W(-\frac{a}{2}, y)] \underline{D} \tilde{\underline{X}}[W(-\frac{a}{2}, y)] dy - \int_S q(x, y) \cdot w dS - \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \tilde{q}(y) \cdot W(-\frac{a}{2}, y) dy$$

Con la discretizzazione usuale: $\hat{W}(x, y) = \underline{N}^T(x, y) \cdot \hat{\underline{w}}$

si ottiene, per l'n-esimo elemento finito:

$$\underline{k}_n = \int_{S_n} \underline{B}_n^T \underline{D} \underline{B}_n dS \quad \text{e} \quad \tilde{\underline{k}}_n = \int_{\Gamma_n} \tilde{\underline{B}}_n^T \underline{D} \tilde{\underline{B}}_n d\Gamma \quad \Gamma_n = \text{lato dell'EF sulla trave}$$

con: $\underline{B}_n = \begin{bmatrix} \dots & -N_{i,x} & \dots \\ \dots & -N_{i,y} & \dots \\ \dots & -2N_{i,xy} & \dots \end{bmatrix}; \quad \tilde{\underline{B}}_n = \begin{bmatrix} \dots & -N_{i,y} & \dots \\ \dots & -N_{i,xy} & \dots \end{bmatrix}$

$i = 1 \dots 12$

$$\underline{f}_n = \int_{S_n} \underline{N}(x, y) q(x, y) dS; \quad \tilde{\underline{f}}_n = \int_{\Gamma_n} \underline{N}|_{\Gamma_n} \tilde{q} d\Gamma$$

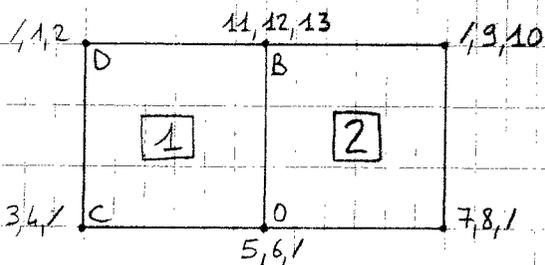
L'assemblaggio è effettuato con la stessa tabella delle incidenze.

Per esempio si sceglie: $q(x, y) = q$ (uniforme) e $\tilde{q}(y) = 0$

$$I = 0,16$$

$$EI = 2 \cdot D \cdot a \quad ; \quad n = 2 \text{ (x2) elementi finiti}$$

$$GJ_p = 1 \cdot D \cdot a$$



	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	/	1	2	3	4	/	5	6	/	11	12	13
2	11	12	13	5	6	/	7	8	/	/	9	10

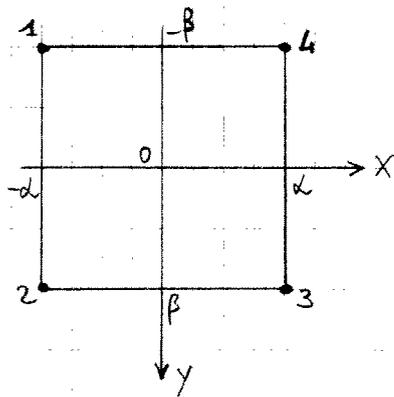
	$\hat{W} \cdot \frac{1000 \cdot D}{9a^4}$	$\hat{Q}_x \cdot \frac{1000 \cdot D}{9a^3}$	$\hat{Q}_y \cdot \frac{1000 \cdot D}{9a^3}$	$\hat{M}_x \cdot \frac{100}{9a^2}$	$\hat{M}_y \cdot \frac{100}{9a^2}$
0	20,29	6,54	0	12,29	8,73
B	14,08	-0,01	19,9	16,88	3,70
C	6,74	40,70	0	3,93	8,36
D	0	42,56	20,62	0,24	0,34

$$\underline{NB}: (\hat{m}_x)_B = \frac{(\hat{m}_x)_B^{[1]} + (\hat{m}_x)_B^{[2]}}{2}$$

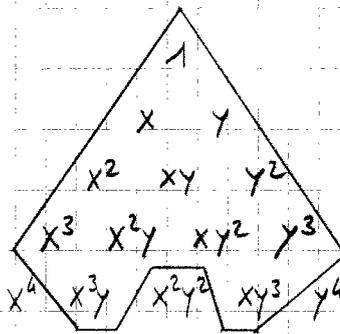
etc...

$$\underline{NB}: I = 0,16$$

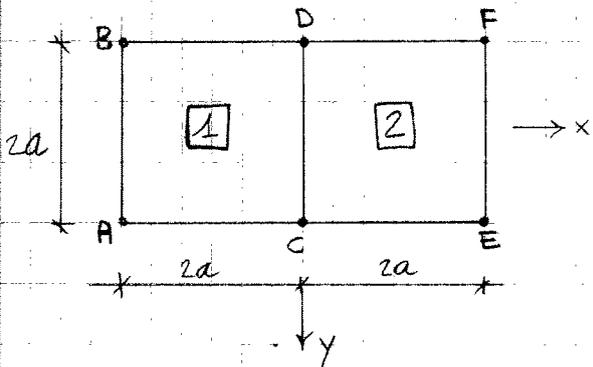
Osservazioni sulla non-conformita' dell'EF a 4 nodi (Kirchhoff).



Il polinomio interpolante per gli spostamenti trasversali W contiene i seguenti termini:



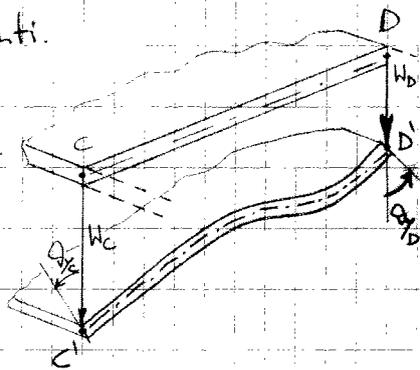
Se si considerano due elementi finiti adiacenti, si ha:



$W_{CD}^{(1)}(y) = P_3(W_C, \vartheta_{yC}, W_D, \vartheta_{yD}) = \text{Polinomio di 3° grado} \rightarrow$
 \rightarrow dipende da 4 parametri nodali ($W_C, \vartheta_{yC}, W_D, \vartheta_{yD}$).

e $W_{CD}^{(2)}(y) \equiv W_{CD}^{(1)}(y)$ dato che le interpolazioni lungo il lato CD dipendono solamente dai parametri nodali comuni ai due elementi.

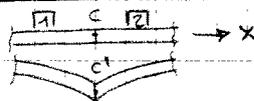
Inoltre, si ha: $\left[\frac{\partial W}{\partial y}(y) \right]_{CD}^{(1)} \equiv \left[\frac{\partial W}{\partial y}(y) \right]_{CD}^{(2)}$ poiché $\vartheta_y = \frac{\partial W}{\partial y}$



Anche $\left[\frac{\partial W}{\partial x}(y) \right]_{CD}^{(1)} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{CD}^{(1)}$ è un polinomio di 3° grado in y e anch'esso dipende da 4 parametri nodali: $\vartheta_{xC}, \vartheta_{xD}$ e altri due parametri ottenuti da una combinazione di: $W_A^{(1)}, W_B^{(1)}, W_C^{(1)}, W_D^{(1)}, \vartheta_{yA}^{(1)}, \vartheta_{yB}^{(1)}, \vartheta_{yC}^{(1)}, \vartheta_{yD}^{(1)}$.

Analogamente si avrà: $\left[\frac{\partial W}{\partial x}(y) \right]_{CD}^{(2)} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{CD}^{(2)}$ = polinomio di 3° grado in y dipendente da: $\vartheta_{xC}, \vartheta_{xD}$ e da combinazioni di: $W_D^{(2)}, W_E^{(2)}, W_F^{(2)}, \vartheta_{yD}^{(2)}, \vartheta_{yE}^{(2)}, \vartheta_{yF}^{(2)}$.

In definitiva si ha: $\left[\frac{\partial W}{\partial x}(y) \right]_{CD}^{(1)} \neq \left[\frac{\partial W}{\partial x}(y) \right]_{CD}^{(2)}$ con $\frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{CD}^{(1)} = \frac{\partial W}{\partial x} \Big|_{CD}^{(2)}$ solo nei nodi (ad es: $\vartheta_{xC}^{(1)} = \vartheta_{xC}^{(2)} = \vartheta_{xC}^{(2)}$)



L'insieme degli elementi è quindi più deformabile e non sono rispettate appieno le condizioni di congruenza richieste dall'applicazione del teorema di stazionarietà dell'EPT. Nonostante ciò, l'elemento permette di ottenere una buona convergenza.

Instabilità di Casse

$-L_e$

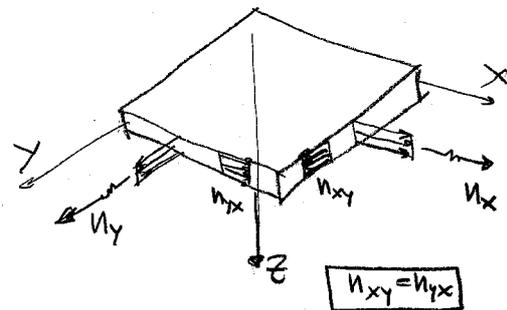
$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A (-L \nabla w)^T \underline{D} (-L \nabla w) dA + \int_V \left[\sigma_x \cdot \frac{1}{2} w_x^2 + \sigma_y \cdot \frac{1}{2} w_y^2 + \tau_{xy} w_x w_y \right] dV$$

$$\int_V \sigma_x \cdot \frac{1}{2} w_x^2 dV = \frac{1}{2} \int_A w_x^2 \left[\int_{-t/2}^{t/2} \sigma_x dz \right] dA = \frac{1}{2} \int_A n_x \cdot w_x^2 dA$$

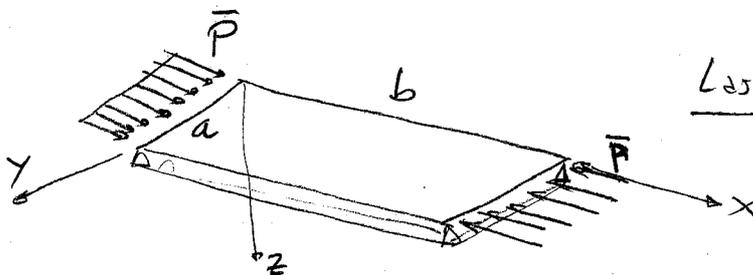
$$\int_V \sigma_y \cdot \frac{1}{2} w_y^2 dV = \dots = \frac{1}{2} \int_A n_y \cdot w_y^2 dA$$

$$\int_V \tau_{xy} \cdot w_x w_y dV = \int_A w_x w_y \left[\int_{-t/2}^{t/2} \tau_{xy} dz \right] dA = \int_A n_{xy} \cdot w_x w_y dA$$

$$= \frac{1}{2} \int_A n_{xy} (w_x w_y + w_y w_x) dA$$



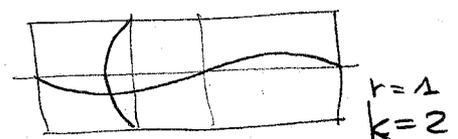
Esempio



Lasta appoggiata sui 4 lati

$$\Rightarrow \begin{cases} n_x = -\bar{p} \\ n_y = n_{xy} = 0 \end{cases}$$

Si assume = $w(x,y) = C \cdot \sin\left(\frac{y}{a} + \pi\right) \cdot \sin\left(\frac{x}{b} \cdot k \cdot \pi\right)$



Sostituendo nell'EPT si ottiene $\left(D = \frac{E \cdot t^3}{12(1-\nu^2)}\right)$:

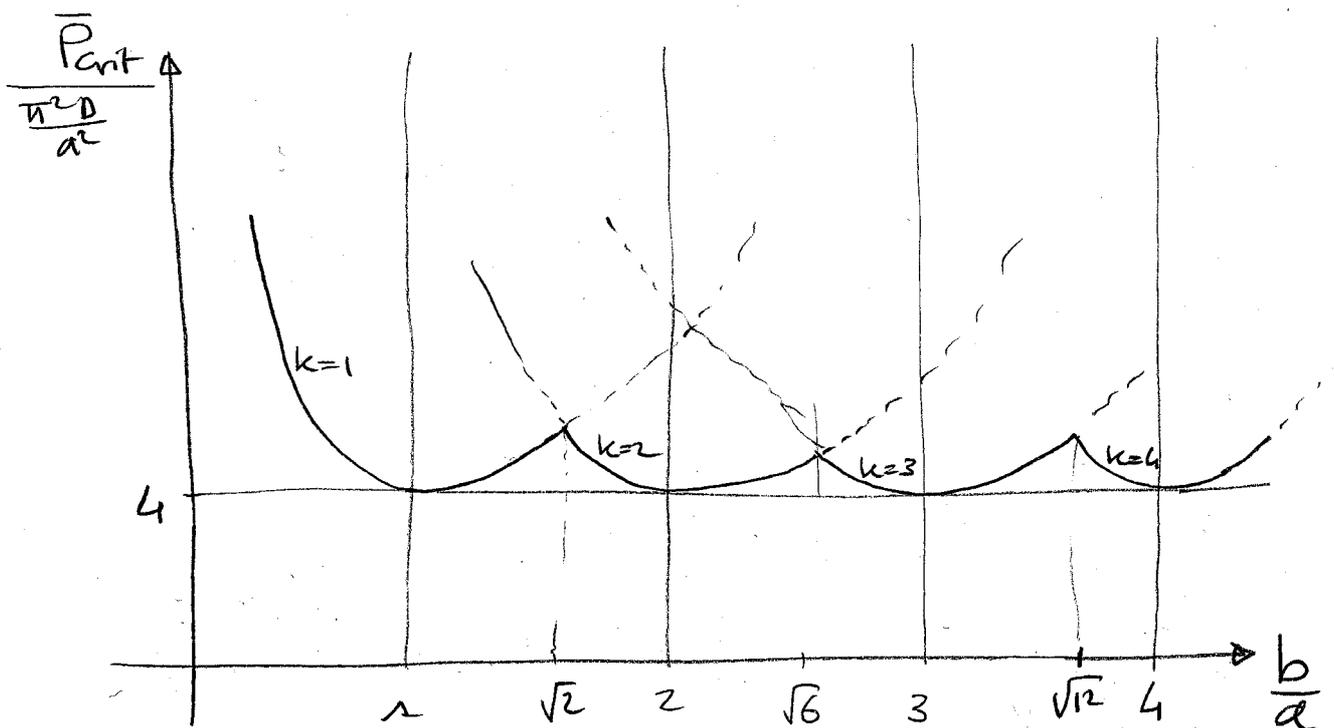
$$\frac{d\pi}{dC} = C \cdot \left[\frac{\pi^4 \cdot D}{4a^3 b^3 \cdot l} (a^2 k^2 + b^2 r^2)^2 - \bar{p} \cdot \frac{\pi^2 a k^2}{4b} \right] = 0$$

In generale $e^{-C} = 0$, ma se si annulla ciò che è tra parentesi si ha una biforcazione della soluzione $\rightarrow [] = 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \bar{p}_{kr} = \pi^2 \cdot b^2 \left(\frac{k}{b^2} + \frac{r^2}{a^2 k} \right)^2 \cdot D$$

Il più piccolo \bar{p}_{kr} si ottiene per $r=1$; dunque:

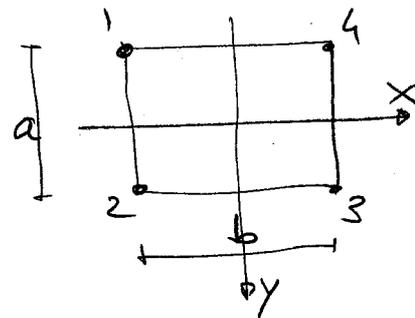
$$\begin{aligned} \bar{p}_{crit} &= \pi^2 b^2 \cdot D \cdot \min_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{k}{b^2} + \frac{1}{a^2 k} \right)^2 = \\ &= \frac{\pi^2 D}{a^2} \cdot \min_{k \in \mathbb{N}} \left(\frac{a}{b} k + \frac{b}{a} \frac{1}{k} \right)^2 \end{aligned}$$



Matrixe geometries (on $N_x = \text{const.}$; $N_y = \text{const.}$; $N_{xy} = \text{const.}$)

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \hat{W}^T (\underline{K}_E - \underline{K}_a) \cdot \hat{W}$$

$$\underline{K}_a = \underline{Q} \cdot \left[\underline{K}_x^a (-N_x) + \underline{K}_y^a (-N_y) + \underline{K}_{xy}^a (-N_{xy}) \right] \cdot \underline{Q}$$



$$\underline{Q} = \text{diag} \left(1, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{a}{2}, 1, \frac{b}{2}, \frac{a}{2} \right)$$

$$\underline{K}_x^a =$$

276	42	66	102	21	-39	-102	21	39	-276	42	-66
	112	0	21	56	0	-21	-14	0	-42	-28	0
		24	39	0	-18	-39	0	18	-66	0	-24
			276	42	-66	-276	42	66	-102	21	-39
				112	0	-42	-28	0	-21	-14	0
					24	66	0	-24	39	0	18
						276	-42	-66	102	-21	39
							112	0	-21	56	0
								24	-39	0	-18
									276	-42	66
										112	0
											24

Symm.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{630} = \left(\underline{K}_x^a \right)^T$$

$$\underline{K}_y^a =$$

276	66	42	-276	-66	42	-102	39	21	102	-39	21
	24	0	-66	-24	0	-39	18	0	39	-18	0
		112	-42	0	-28	-21	0	-14	21	0	56
			276	66	-42	102	-39	-21	-102	39	-21
				24	0	39	-18	0	-39	18	0
					112	-21	0	56	21	0	-14
						276	-66	-42	-276	66	-42
							24	0	66	-24	0
								112	42	0	-28
									276	-66	42
										24	0
											112

Symm.

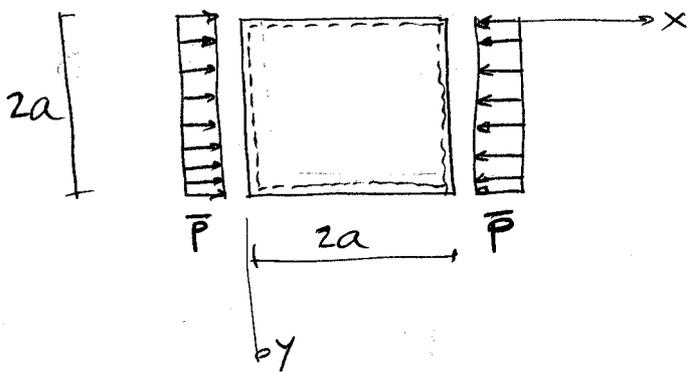
$$\frac{b}{a} \cdot \frac{1}{630} = \left(\underline{K}_y^a \right)^T$$

$$\underline{K}_{xy}^g = \begin{bmatrix}
 90 & 0 & 0 & 0 & -36 & 0 & -90 & 36 & 36 & 0 & 0 & -36 \\
 & 0 & 10 & 36 & 0 & -10 & -36 & 12 & 10 & 0 & 0 & -10 \\
 & & 0 & 0 & -10 & 0 & -36 & 10 & 12 & 36 & -10 & 0 \\
 & & & -90 & 0 & 0 & 0 & 0 & -36 & 90 & -36 & 36 \\
 & & & & 0 & 10 & 0 & 0 & -10 & 36 & -12 & 10 \\
 & & & & & 0 & 36 & -10 & 0 & -36 & 10 & -12 \\
 & & \text{Symm.} & & & & 90 & 0 & 0 & 0 & 36 & 0 \\
 & & & & & & & 0 & 10 & -36 & 0 & -10 \\
 & & & & & & & & 0 & 0 & -10 & 0 \\
 & & & & & & & & & -90 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 10 \\
 & & & & & & & & & & & 0
 \end{bmatrix} \frac{1}{180} = (\underline{K}_{xy}^g)^T$$



Esempio

Per il caso analizzato in precedenza assumiamo $a=b$, $\begin{cases} u_x = -\bar{P} \\ u_y = u_{xy} = 0 \end{cases}$

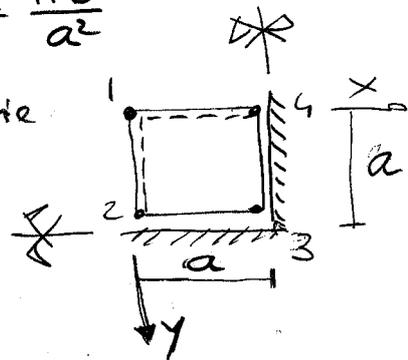


Sapendo che la deformata critica

$$w_c = C \cdot \sin\left(\frac{x}{2a}\pi\right) \cdot \sin\left(\frac{y}{2a}\pi\right)$$

$$e \quad \bar{P}_{cr} = \frac{\pi^2 D}{(2a)^2} \cdot 4 = \frac{\pi^2 D}{a^2}$$

sfruttiamo la simmetria e utilizziamo un EF:



Gli unici gdl sono: $\hat{\varphi}_x^2, \hat{w}_3, \hat{\varphi}_y^4$
(5) (7) (12)

$$\Rightarrow \det \left[\underline{K}_E(\{5,7,12\}; \{5,7,12\}) - \bar{P} \underline{K}_X^g(\{5,7,12\}; \{5,7,12\}) \right] \underline{Q}^* = 0 \rightarrow$$

$$\underline{Q}^* = \underline{Q}(\{5,7,12\}; \{5,7,12\})$$

$$\rightarrow \bar{P}_{cr}^{(1)} = 8,16 \frac{D}{a^2} \cong 0,827 \frac{\pi^2 D}{a^2} \quad (\text{per } \nu = 0,3)$$

- Formulazione per elementi finiti piani

- Elemento finito triangolare a tre nodi ("CST")

- Formulazione EF per problemi piani

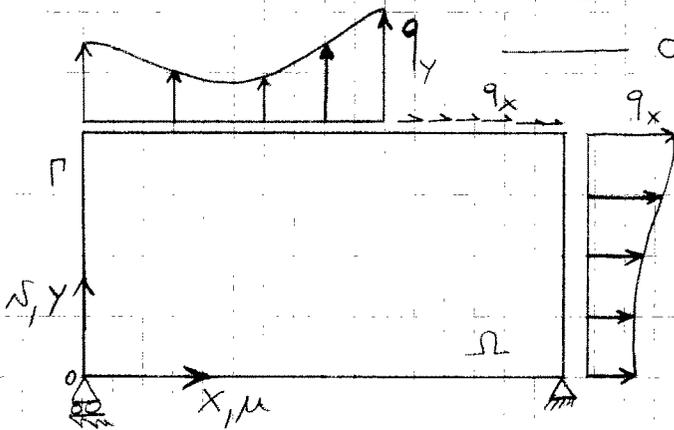
La formulazione per problemi piani è utilizzabile in problemi piani sia negli sforzi sia nelle deformazioni.

Dal punto di vista operativo, l'unica differenza riguarda la parte di legame costitutivo relativa alle variabili del piano:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \cdot \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \underline{\underline{D}} \cdot \underline{\underline{\epsilon}}$$

con $\underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$

Stato piano di	
sforzo	deform.
ν	$\nu \leftarrow \frac{\nu}{1-\nu}$
E	$E \leftarrow \frac{E}{1-\nu^2}$



Spessore = t ; $q = [FL^{-1}]$

Il rispetto della congruenza

impone:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} ; & \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

e l'energia potenziale totale per il solido tri-dimensionale è:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_V \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} dV - \int_{\mathcal{S}} [q_x, q_y] \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} d\rho ; \text{ se, come assunto per ipotesi,}$$

le deformazioni non variano nello spessore, si ha:

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} t \cdot \underline{\underline{\epsilon}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\epsilon}} d\Omega - \int_{\rho} \underline{\underline{q}}^T \underline{\underline{u}} d\rho \quad \text{con} \quad \underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{C}} \cdot \underline{\underline{\pi}} = \begin{bmatrix} \mu_{yx} \\ \nu_{iy} \\ \mu_{iy} + \nu_{ix} \end{bmatrix}$$

Introducendo una discretizzazione mediante elementi finiti si ottiene:

$$\hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \sum_1^{Ne} \int_{\Omega_n} t [\underline{B} \hat{\underline{u}}_n]^T \underline{D} [\underline{B} \hat{\underline{u}}_n] d\Omega - \sum_1^{Ne} \int_{\Gamma_n} \underline{q}^T \underline{N} \hat{\underline{u}}_n d\Gamma$$

Per l'assemblaggio: $\hat{\underline{u}}_n = \underline{C}_n \hat{\underline{U}}$

$\hat{\underline{u}} =$ variabili nodali di spostamento

$$\Rightarrow \hat{\mathcal{E}} = \frac{1}{2} \hat{\underline{U}}^T \underline{K} \hat{\underline{U}} - \hat{\underline{U}}^T \underline{F}$$

$$\text{con } \left\{ \begin{aligned} \underline{K} &= \sum_1^{Ne} \underline{C}_n^T \underline{k}_n \underline{C}_n \\ \underline{k}_n &= \int_{\Omega_n} t \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} d\Omega \end{aligned} \right.$$

$$\frac{d\hat{\mathcal{E}}}{d\hat{\underline{u}}} = 0 \rightarrow$$

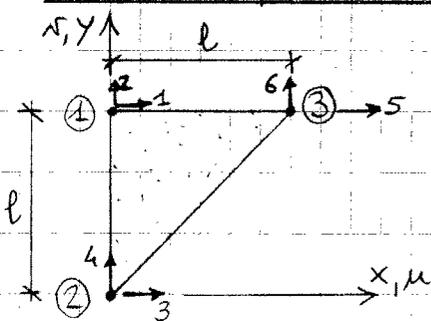
$$\underline{K} \hat{\underline{U}} = \underline{F}$$

Equazioni di equilibrio ai nodi.

$$\text{e } \left\{ \begin{aligned} \underline{F} &= \sum_1^{Ne} \underline{C}_n^T \underline{f}_n \\ \underline{f}_n &= \int_{\Gamma_n} \underline{N}^T \underline{q} d\Gamma \end{aligned} \right.$$

○

Elemento finito triangolare con deformazioni costanti (Constant Strain Triangle)



$$\begin{bmatrix} u(x,y) \\ v(x,y) \end{bmatrix} = \text{funzioni lineari} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix}}_{\underline{N}(x,y)} \begin{bmatrix} \hat{u}_1 \\ \hat{u}_2 \\ \hat{u}_3 \\ \hat{v}_1 \\ \hat{v}_2 \\ \hat{v}_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{con } N_1 = \frac{y-x}{l}; \quad N_2 = 1 - \frac{y}{l}; \quad N_3 = \frac{x}{l}$$

$$\Rightarrow \underline{B} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 \\ 0 & N_{i,y} \\ N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix}$$

Se $t = \text{uniforme}$, risulta:

$$\underline{k}_n = t \int_{\Omega_n} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega = \frac{t \ell^2}{2} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$$

Nel caso di stato piano di sforzo si ha:

$$\underline{k}_n = \frac{E \cdot t}{4(1-\nu^2)} \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline 3-\nu & -1-\nu & -1+\nu & 2\nu & -2 & 1-\nu \\ \hline & 3-\nu & 1-\nu & -2 & 2\nu & -1+\nu \\ \hline & & 1-\nu & 0 & 0 & -1+\nu \\ \hline & & & 2 & -2\nu & 0 \\ \hline \text{Simm.} & & & & 2 & 0 \\ \hline & & & & & 1-\nu \\ \hline \end{array}$$

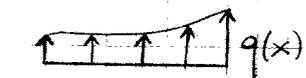
Per ottenere la matrice di rigidezza per l'elemento in stato piano

di deformazione basta sostituire $\frac{\nu}{1-\nu}$ al posto di ν e

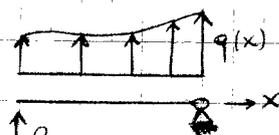
$\frac{E}{1-\nu^2}$ al posto di E nella precedente espressione di \underline{k}_n .

Forze nodali equivalenti

Si noti, ad esempio, che:



$$f_1 = \int_0^{\ell} N_1(x, \ell) \cdot q(x) \, dx = \int_0^{\ell} \frac{\ell-x}{\ell} q(x) \, dx$$

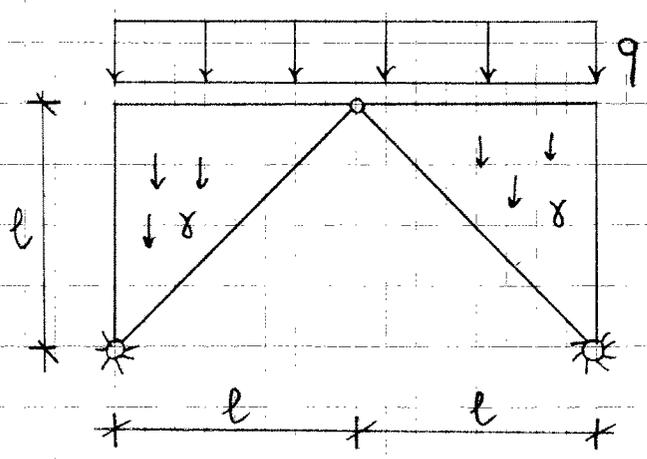


$$R_1 \ell + \int_0^{\ell} q(x) (\ell-x) \, dx = 0$$

$$R_1 = - \int_0^{\ell} \frac{\ell-x}{\ell} q(x) \, dx = -f_1 \Rightarrow$$

$\Rightarrow f_i = -R_i$ per carichi applicati sul contorno.

1) Esempio

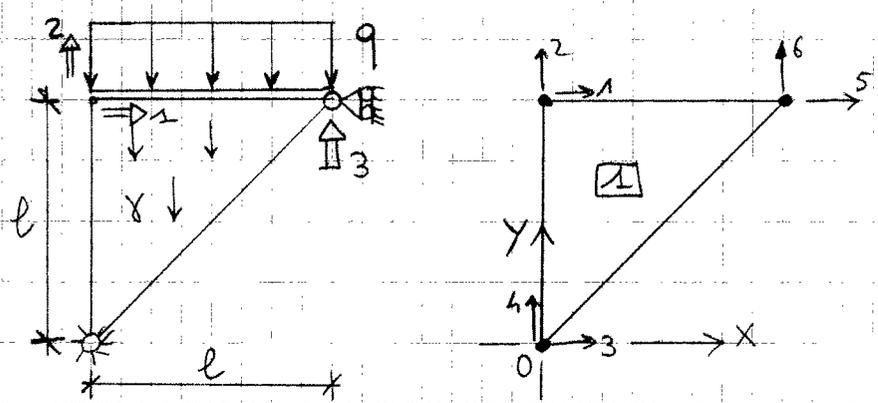


Stato piano di sforzo
Spessore t uniforme
E, ν

$$D = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\delta = [F \cdot L^2]; \quad q = [F \cdot L^{-1}]$$

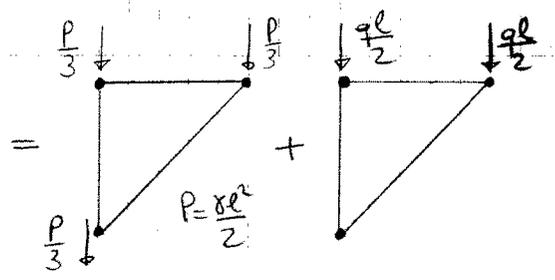
Sfruttando la simmetria si analizza:



	1	2	3	4	5	6
1	1	2	/	/	/	3

$$\Rightarrow K = \frac{E \cdot t}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{26} \\ k_{62} & k_{62} & k_{66} \end{bmatrix} = \frac{E \cdot t}{4(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 3-\nu & -1-\nu & 1-\nu \\ -1-\nu & 3-\nu & -1+\nu \\ 1-\nu & -1+\nu & 1-\nu \end{bmatrix}$$

$$f = \int_{\Omega} N^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\delta \end{bmatrix} d\Omega + \int_0^l N^T(x, l) \begin{bmatrix} 0 \\ -q \end{bmatrix} dx = - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{q l^2}{6} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \frac{q l}{2}$$



⇒ Utilizzando la tabella delle incidenze: $F = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{\gamma l^2}{6} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \frac{q l}{2}$

$$\underline{K} \underline{\hat{U}} = \underline{F} \Rightarrow \underline{\hat{U}} = \begin{bmatrix} 1-2\nu \\ -2+\nu \\ -5+\nu \end{bmatrix} \frac{(\gamma l + 3q) l}{3 E t}$$

Si noti che: $\underline{\hat{V}} = \underline{D} \underline{\hat{E}} = \underline{D} \underline{B} \underline{\hat{U}} = \text{uniforme}$

I campi degli sforzi e delle deformazioni approssimati

sono meno accurati di quanto lo sono gli spostamenti.

In generale il valore degli sforzi in corrispondenza dei punti di Gauss risulta più accurato che in altri punti.

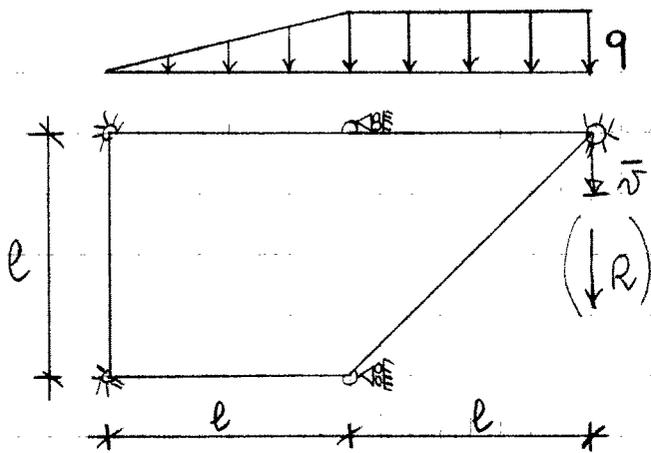
Nel caso dell'elemento CST, ad esempio, se si utilizza un punto di Gauss questo coincide col baricentro G.

Dunque:

$$\underline{\hat{V}} = \underline{\hat{V}}|_G \cong \underline{V}|_G \quad \text{con un'accuratezza maggiore che in altri punti di } \Omega.$$

Esempio

Determinare gli spostamenti e la reazione vincolare R nel caso seguente:

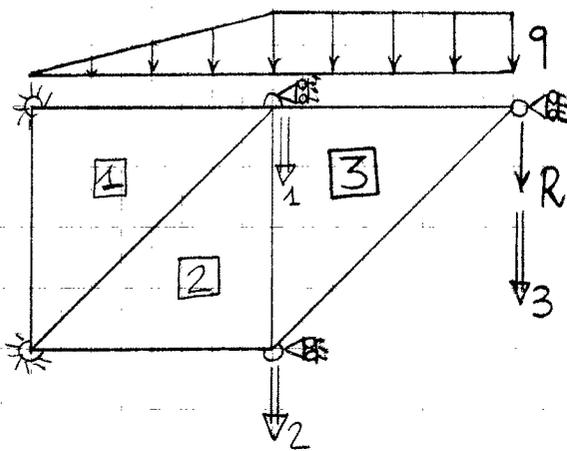


$E = \text{uniforme}$

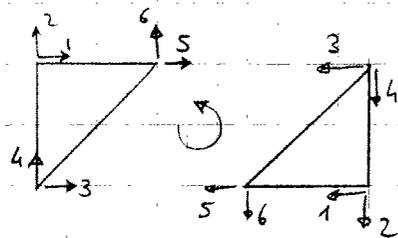
$E, \nu = 0$, stato piano di sforzo

$$\underline{D} = \text{diag} \left(1, 1, \frac{1}{2} \right) \cdot E$$

La struttura viene discretizzata nel seguente modo:

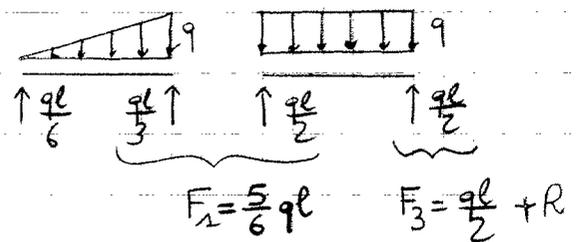


EF	1	2	3	4	5	6
1	/	/	/	/	/	-1
2	/	2	/	1	/	/
3	/	-1	/	-2	/	-3



$$\underline{\underline{K}}_{3 \times 3} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & -4 & -1 & & & \\ -4 & 5 & 0 & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ \hline & & & E & & \\ & & & & 4 & \end{array} \right]$$

$$\underline{\underline{K}} \cdot \underline{\hat{U}} = \underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} ql \\ 0 \\ \frac{1}{2} ql + R \end{bmatrix}$$



$$\frac{E}{4} \begin{bmatrix} 6 & -4 & -1 \\ -4 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \bar{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} ql \\ 0 \\ \frac{ql}{2} + R \end{bmatrix}$$

La terza equazione è utilizzata per ricavare la reazione vincolare R :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{E}{4} \begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{5}{6} ql + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{E}{4} \bar{v} \\ R = \frac{E}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \bar{v} \end{bmatrix} - \frac{ql}{2} \end{array} \right.$$

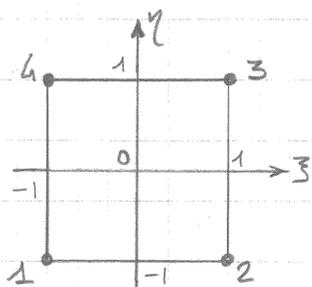
$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{5}{21} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \frac{ql}{E} + \frac{\bar{v}}{14} \begin{bmatrix} 5 \\ 4 \end{bmatrix} \\ R = -\frac{67}{84} ql + \frac{9E}{56} \bar{v} \end{array} \right.$$

- Elemento finito piano a 4 nodi ("bilineare")

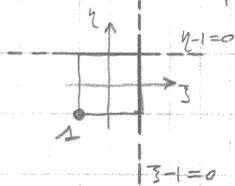
- Condizioni sufficienti per la convergenza

- Elementi finiti isoparametrici

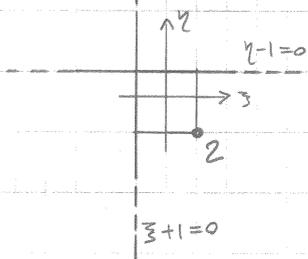
-EF a 4 nodi



Costruzione funzioni di forma:



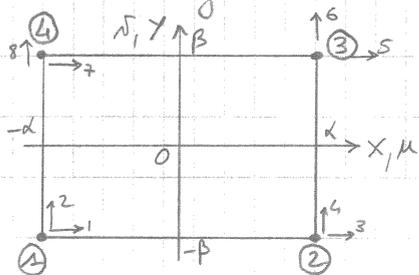
$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4} = N_1(\xi, \eta)$$



$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4} = N_2(\xi, \eta)$$

etc... $N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$; $N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$

Per EF rettangolari si ha:



$$\tilde{N}_i(x, y) = N_i\left(\xi = \frac{x}{\alpha}; \eta = \frac{y}{\beta}\right)$$

Ad es: $\tilde{N}_1(x, y) = \frac{(1 - \frac{x}{\alpha})(1 - \frac{y}{\beta})}{4} = \frac{(\alpha - x)(\beta - y)}{4\alpha\beta}$

$$\hat{\underline{\underline{U}}} = \underline{\underline{D}} \hat{\underline{\underline{E}}} \quad \text{con} \quad \underline{\underline{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{stato piano di sforzo})$$

(Per stato piano di deformazione si

sostituisce: $\left\{ \begin{array}{l} \nu \text{ con } \frac{\nu}{1-\nu} \\ E \text{ con } \frac{E}{1-\nu^2} \end{array} \right.$)

$$\hat{\underline{\underline{E}}} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{\underline{E}}}_x \\ \hat{\underline{\underline{E}}}_y \\ \hat{\underline{\underline{\gamma}}}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{1,x} \\ N_{1,y} \\ M_{1,y} + N_{1,x} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{N}_{1,x} & 0 & \tilde{N}_{2,x} & 0 & \tilde{N}_{3,x} & 0 & \tilde{N}_{4,x} & 0 \\ 0 & \tilde{N}_{1,y} & 0 & \tilde{N}_{2,y} & 0 & \tilde{N}_{3,y} & 0 & \tilde{N}_{4,y} \\ \tilde{N}_{1,y} & \tilde{N}_{1,x} & \tilde{N}_{2,y} & \tilde{N}_{2,x} & \tilde{N}_{3,y} & \tilde{N}_{3,x} & \tilde{N}_{4,y} & \tilde{N}_{4,x} \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{B}}(x,y)} \begin{bmatrix} M_1 \\ N_1 \\ M_2 \\ N_2 \\ M_3 \\ N_3 \\ M_4 \\ N_4 \end{bmatrix} = \underline{\underline{B}} \cdot \hat{\underline{\underline{U}}}$$

Si noti che $\underline{B}(x,y)$ contiene funzioni lineari e tali sono le deformazioni e gli sforzi approssimati ($\hat{\underline{E}}, \hat{\underline{\sigma}}$).

$$\underline{k} = \int_{\Omega} \underline{t} \cdot \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega = \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} \underline{t} \cdot \underline{B}(x,y) \underline{D} \underline{B}(x,y) \, dx \, dy$$

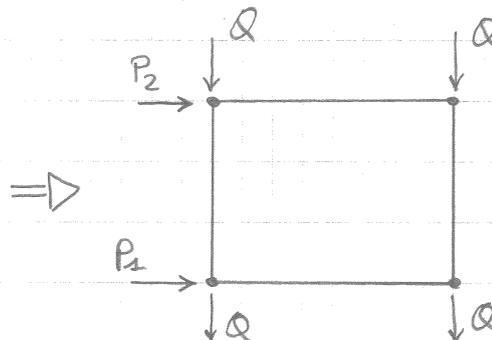
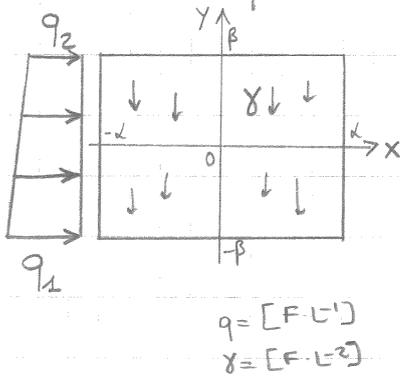
Nel caso di stato piano di sforzo e t costante si ha:

$$\underline{k} = \frac{E \cdot t}{24\gamma(1-\nu^2)}$$

$\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$	$4(1+2\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$	$2(1-4\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(-1+3\nu)$	$2(-1-2\gamma^2+\nu)$	$-3\gamma(1+\nu)$	$4(-1+\gamma^2+\nu)$	$3\gamma(1-3\nu)$
	$4[2+\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(1-3\nu)$	$4[1-\gamma^2(1-\nu)]$	$-3\gamma(1+\nu)$	$2[-2-\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(-1+3\nu)$	$2[-4+\gamma^2(1-\nu)]$	$2[-4+\gamma^2(1-\nu)]$
	$4(1+2\gamma^2-\nu)$	$-3\gamma(1+\nu)$	$4(-1+\gamma^2+\nu)$	$3\gamma(-1+3\nu)$	$2(-1-2\gamma^2+\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$	$2(1-4\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$
	$4[2+\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(1-3\nu)$	$2[-4+\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(1+\nu)$	$2[-2-\gamma^2(1-\nu)]$	$2[-2-\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(1+\nu)$	$2[-2-\gamma^2(1-\nu)]$
	$4(1+2\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$	$2(1-4\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(-1+3\nu)$	$2(1-4\gamma^2-\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$	$3\gamma(1+\nu)$	$3\gamma(-1+3\nu)$
	$4[2+\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(1-3\nu)$	$4[1-\gamma^2(1-\nu)]$	$-3\gamma(1+\nu)$	$2[-2-\gamma^2(1-\nu)]$	$3\gamma(-1+3\nu)$	$2[-4+\gamma^2(1-\nu)]$	$2[-4+\gamma^2(1-\nu)]$

Simm.

- Carichi nodali equivalenti



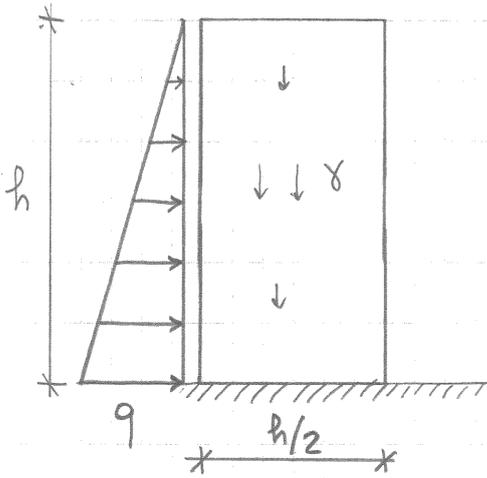
$$P_2 = \frac{2\beta}{6} (q_1 + 2q_2)$$

$$P_1 = \frac{2\beta}{6} (2q_1 + q_2)$$

$$Q = \frac{\gamma \cdot (2\alpha) \cdot (2\beta)}{4} = \gamma \alpha \beta$$

$$\underline{f} = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \underline{b} \, d\Omega + \int_{\Gamma} \underline{\tilde{N}}^T \underline{q} \, d\Gamma = \int_{\Omega} \underline{\tilde{N}}^T \begin{bmatrix} 0 \\ -\gamma \end{bmatrix} \, d\Omega + \int_{-\beta}^{\beta} \int_{-\alpha}^{\alpha} \underline{\tilde{N}}^T(-\alpha, y) \cdot \begin{bmatrix} q(y) \\ 0 \end{bmatrix} \, dy = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \gamma \alpha \beta + \begin{bmatrix} 2q_1 + q_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ q_1 + 2q_2 \\ 0 \end{bmatrix} \frac{\beta}{3}$$

I - Esempio



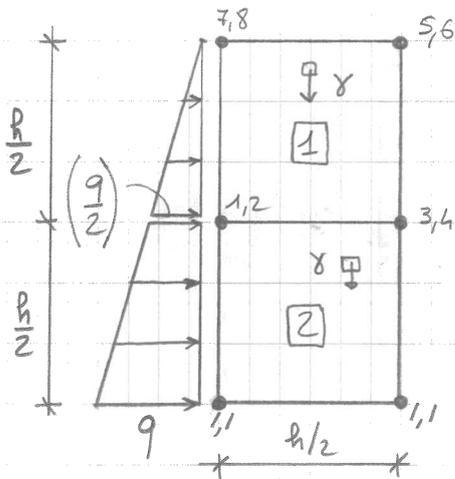
$$q = \gamma_{\text{fluid}} \cdot h$$

$$\gamma_{\text{fluid}} = \frac{\gamma}{2,5}$$

$$\gamma = \frac{5}{2} \cdot \frac{q}{h}$$

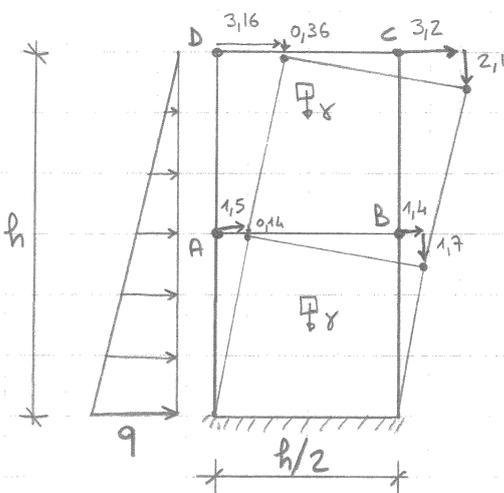
$$\nu = 0,16$$

$$\text{spessore} = t$$



$\frac{q h}{E t}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{q h}{E t}$	1	2	3	4	5	6	7	8
$\frac{q h}{E t}$	/	/	/	/	3	4	1	2

$$\underline{F} = \left[24, -30, 0, -30, 0, -15, 4, -15 \right]^T \cdot \frac{q h}{96}$$

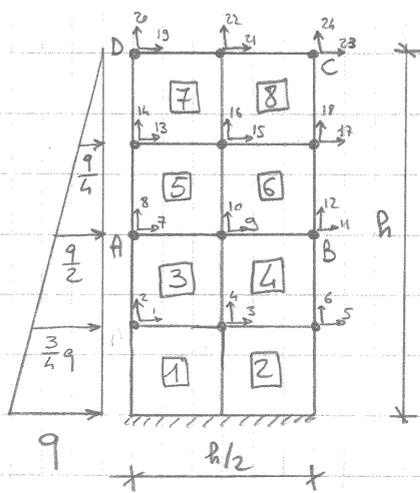


$$\leftrightarrow \mu \cdot \frac{E \cdot t}{q h}$$

$$\downarrow \nu \cdot \frac{E t}{q h}$$

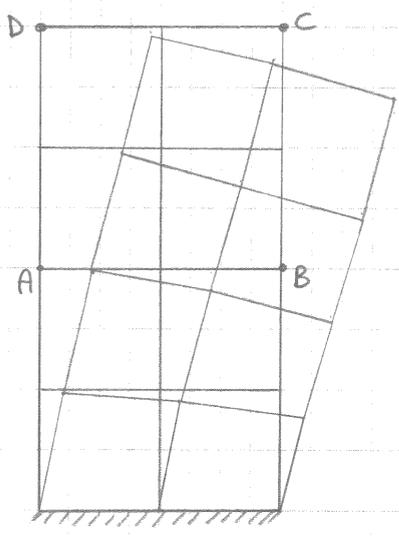
nod	$\mu \cdot \frac{E t}{q h}$	$\nu \cdot \frac{E t}{q h}$
A	1,5	-0,14
B	1,4	-1,7
C	3,2	-2,1
D	3,16	-0,36

Con una suddivisione maggiore:



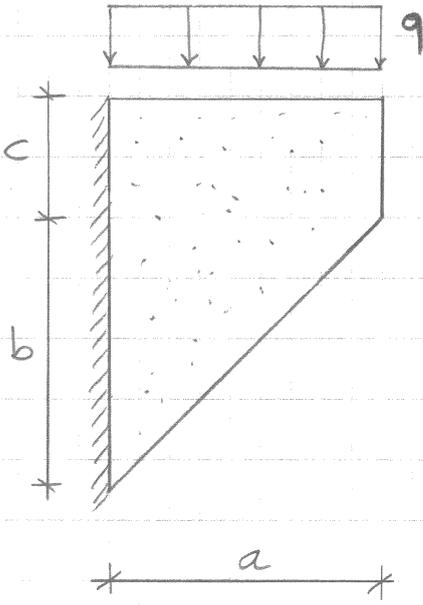
$$\gamma = \frac{5}{2} \frac{g}{h}$$

$\frac{g}{h}$ n	1	2	3	4	5	6	7	8
1	/	/	/	/	3	4	1	2
2	/	/	/	/	5	6	3	4
3	1	2	3	4	9	10	7	8
4	3	4	5	6	11	12	9	10
5	7	8	9	10	15	16	13	14
6	9	10	11	12	17	18	15	16
7	13	14	15	16	21	22	19	20
8	15	16	17	18	23	24	21	22

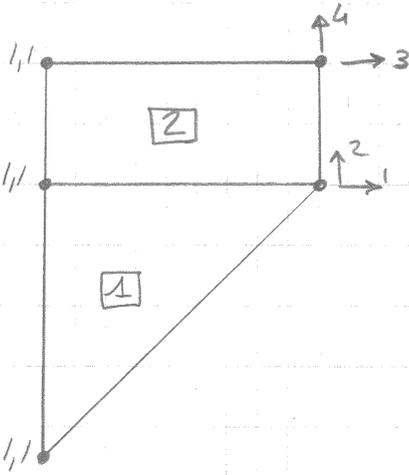


node	$\mu \frac{Eg}{gh}$	$\nu \frac{Eg}{gh}$
A	1,79	-0,02
B	1,77	-1,81
C	3,76	-2,19
D	3,75	-0,24

II - Esempio



Spessore t
 stato piano di sforzo



	1	2	3	4	5	6	7	8
1	/	/	/	/	1	2	///	///
2	/	/	1	2	3	4	/	/

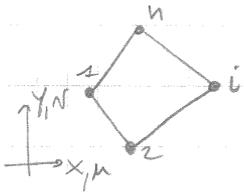
$$\underline{\underline{K}} = \begin{bmatrix}
 k_{55}^{(1)} + k_{33}^{(2)} & k_{56}^{(1)} + k_{34}^{(2)} & k_{35}^{(2)} & k_{36}^{(2)} \\
 k_{66}^{(1)} + k_{44}^{(2)} & k_{65}^{(2)} & k_{46}^{(2)} & k_{45}^{(2)} \\
 \text{Simm.} & k_{55}^{(2)} & k_{56}^{(2)} & k_{66}^{(2)}
 \end{bmatrix}$$

$$\underline{F} = [0, 0, 0, -1] \cdot \frac{qa}{2}$$

Requisiti delle funzioni di forma per la convergenza del metodo

Le seguenti condizioni sono sufficienti ma non necessarie: il loro rispetto garantisce la convergenza alla soluzione del problema nel continuo al ridursi delle dimensioni degli elementi finiti ("approccio h ") o all'arricchirsi dei polinomi approssimanti nelle funzioni di forma ("approccio p ").

a) Deformazioni nulle nel caso di moti rigidi (per poter rappresentare esattamente i moti rigidi)
Per il generico elemento finito deve risultare:



$$\begin{cases} u(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \cdot \hat{U}_i \\ v(x,y) = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \cdot \hat{V}_i \end{cases}$$

Nota rigido: $\begin{cases} u(x,y) \equiv \bar{u} \\ v(x,y) \equiv \bar{v} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{u} \equiv \left(\sum_{i=1}^n N_i(x,y) \right) \bar{u} \\ \bar{v} \equiv \left(\sum_{i=1}^n N_i(x,y) \right) \bar{v} \end{cases} \quad \forall \bar{u}, \bar{v}$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^n N_i(x,y) \equiv 1}$$

* Cio' garantisce che per moti rigidi si abbiano deformazioni nulle.

* Inoltre, per garantire le rotazioni rigide:

$$v = \varphi \cdot x \equiv \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \hat{V}_i = \sum_{i=1}^n N_i(x,y) \cdot \varphi \cdot X_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \equiv \sum_{i=1}^n X_i \cdot N_i(x,y) \quad \text{e analogamente: } y \equiv \sum_{i=1}^n Y_i \cdot N_i(x,y)$$

Queste ultime sono verificate se si utilizzano EF isoparametrici: $N_i(x,y) = \Psi_i[\xi(x)]$

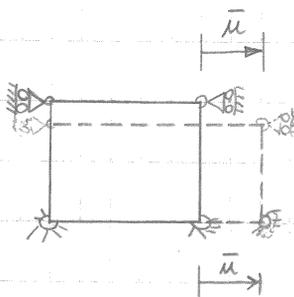
$$\text{per cui } x(\xi) = \sum_{i=1}^n X_i \Psi_i(\xi) \Leftrightarrow x = \sum_{i=1}^n X_i \Psi_i[\xi(x)] = \sum_{i=1}^n X_i N_i(x,y)$$

b) Rappresentabilità dei modi a deformazione costante

Questo requisito è richiesto poiché al ridursi delle dimensioni dell'elemento ($h \rightarrow 0$) diviene prevalente il termine costante nelle deformazioni:

$$\underline{\epsilon} \approx \text{cost} \quad h \rightarrow 0$$

Ad esempio, deve risultare:



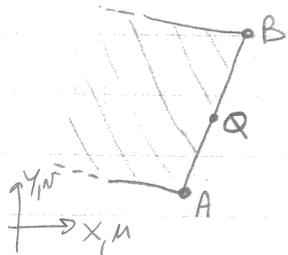
$$\underline{\epsilon} \equiv \text{cost}$$

Si noti che (b) contiene (a) come caso particolare nel caso di deformazioni costanti e non nulle.

c) Conformità, ovvero rispetto della congruenza lungo il contorno dell'elemento

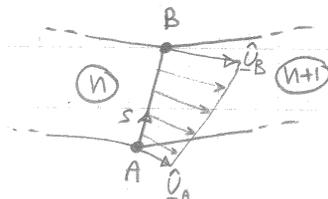
In generale questa è garantita imponendo la dipendenza delle variabili cinematiche (ad es. spostamenti e rotazioni) lungo il generico lato dai parametri nodali relativi ai soli nodi del lato:

↑ EF 2D e Piastre ↑ Piastre



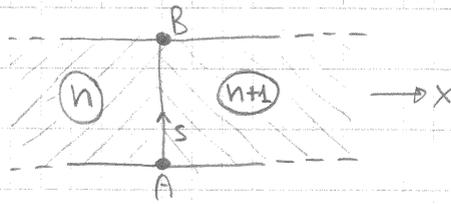
$$\underline{u}(Q) = \underline{f}(\hat{u}_A, \hat{u}_B)$$

In questo modo si evitano discontinuità tra EF adiacenti:



$$\underline{u}_{AB}^{(n)}(s) \equiv \underline{u}_{AB}^{(n+1)}(s)$$

NB: La condizione è solo sufficiente e non è necessaria. Ad esempio, per gli EF di piastra (Kirchhoff) si ha:



$$Q_x^{(n)}|_{AB}(s) \neq Q_x^{(n+1)}|_{AB}(s)$$

poiché Q_x dipende anche dagli spostamenti nodali degli altri nodi dell'elemento (diversi da A e B).

d) Completezza delle funzioni approssimanti

Le funzioni di forma devono essere espresse tramite una base completa di funzioni.

Nel caso dei polinomi devono essere presenti tutti i termini fino all'ordine massimo; ad es.:

$$N_1(x, y) = \frac{1 - x - y + xy}{4} \rightarrow \text{OK!!}$$

Se fosse $N_1(x, y) = \frac{1 - y + xy}{4}$ il termine mancante " x^2 "

non permetterebbe, a meno di casi particolari di scarso interesse pratico, di approssimare correttamente la soluzione del problema continuo.

e) Isotropia geometrica

Le funzioni di forma non devono privilegiare una particolare variabile (ad es. " x ") nei confronti dell'altra (" y ").

Ad esempio, non è consigliabile utilizzare:

$$N(x, y) = 1 + x + y + y^2$$

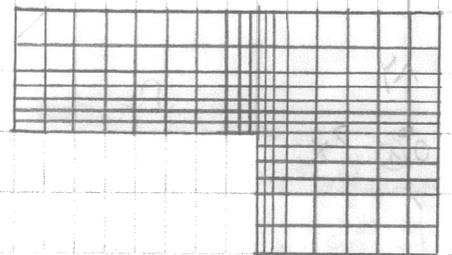
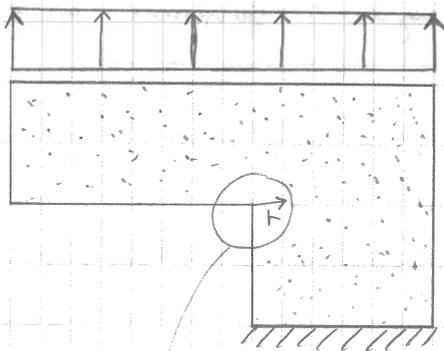
a meno di motivazioni particolari (elementi speciali etc...)

- Osservazioni sulla convergenza

Nel metodo EF la convergenza è garantita solo in media (\rightarrow integrale).

È ad esempio possibile dimostrare la convergenza dell'energia ma nulla si può garantire per quantità locali quali spostamenti e sforzi.

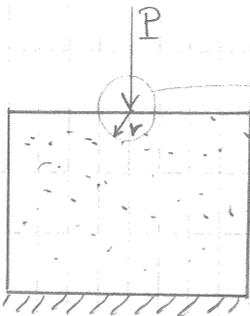
Ad esempio:



$$\sigma \sim \frac{1}{r^2}$$

\rightarrow Infiltrando la mesh di EF, nell'intorno considerato gli sforzi divengono sempre più elevati \rightarrow mancata convergenza negli sforzi ma convergono, anche localmente, gli spostamenti.

Oppure:



$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma \sim 1/r \\ u \sim \ln(r) \end{array} \right.$$

\Rightarrow localmente non si ha convergenza né per gli sforzi né per gli spostamenti \Rightarrow lavoro di $P \rightarrow \infty \Rightarrow$ \Rightarrow energia illimitata.

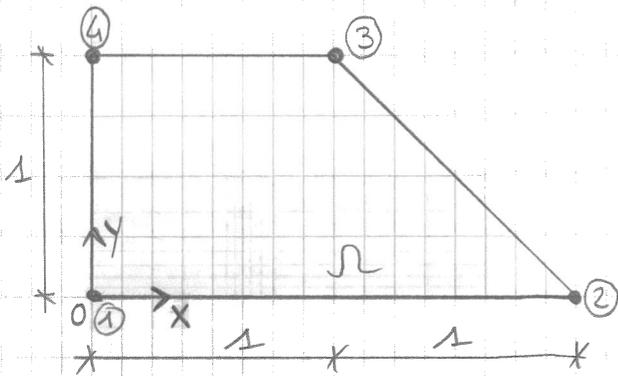
Se però si esclude un intorno del punto di applicazione si ha sempre convergenza.

In genere l'errore viene stimato mediante integrali, ad es.:

$$e^2 = \int_{\Omega} |u - u_h|^2 dx, \text{ oppure } e^2 = \int_{\Omega} \sigma^T \sigma dx \text{ etc...}$$

- Elementi finiti isoparametrici

Finora si sono visti elementi finiti di geometria regolare ma le applicazioni richiedono molto spesso di descrivere geometrie non regolari.
Un esempio semplice è il seguente:



Una possibilità è quella di utilizzare le seguenti funzioni di forma:

$$N_1 = (1-y) \left(1 - \frac{x}{2}\right); \quad N_2 = \frac{x}{2} (1-y)$$

$$N_3 = xy; \quad N_4 = y(1-x)$$

In questo modo si ha: $N_i(x_j) = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$ e $\sum_{i=1}^4 N_i(x,y) \equiv 1$

Tali funzioni permettono di descrivere correttamente i moti rigidi ma non rispettano la conformità lungo il lato ②-③.

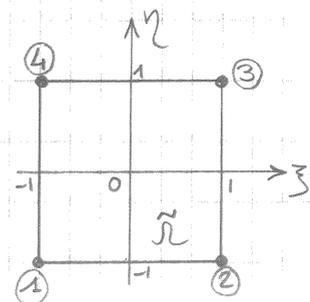
Un'altra possibilità è quella di definire le funzioni di forma come prodotto delle equazioni dei lati opposti al nodo:

$$N_1 = \frac{(1-y)(2-x-y)}{2}; \quad N_2 = \frac{x}{2}(1-y); \quad N_3 = xy; \quad N_4 = y(2-x-y)$$

In questo modo si rispetta la conformità ma: $\sum_{i=1}^4 N_i(x,y) \equiv 1 + \frac{y}{2}(1-y) \neq 1$
cioè non si descrivono correttamente i moti rigidi.

Per risolvere il problema ci si riferisce all'elemento "master" e si definisce una trasformazione $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X(\xi, \eta) \\ Y(\xi, \eta) \end{bmatrix}$ cioè $\underline{X} = \underline{X}(\underline{\xi})$

detta "MAPPING".



$$N_1 = \frac{(1-\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_2 = \frac{(1+\xi)(1-\eta)}{4}$$

$$N_3 = \frac{(1+\xi)(1+\eta)}{4}$$

$$N_4 = \frac{(1-\xi)(1+\eta)}{4}$$

Generalmente si adotta la seguente trasformazione (invertibile):

$$\underline{X}(\underline{\xi}) = \sum_{i=1}^4 \underline{X}_i \cdot N_i(\underline{\xi}) = \underline{X}_1 \cdot N_1(\underline{\xi}) + \underline{X}_2 \cdot N_2(\underline{\xi}) + \dots + \underline{X}_4 \cdot N_4(\underline{\xi})$$

$$\Rightarrow \underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{X})$$

Le funzioni di forma $N_i(x, y)$ sono allora definite come:

$$N_i(\underline{X}) = N_i[\underline{\xi}(\underline{X})]$$

si utilizzano le stesse funzioni di forma $N_i(\underline{\xi})$ sia per la trasformazione geometrica $\underline{X} = \underline{X}(\underline{\xi})$ sia per la definizione delle $N_i(\underline{X})$, da cui il nome di EF ISO parametrici.

Si ha: $\sum_i N_i(\underline{X}) \equiv \sum_i N_i[\underline{\xi}(\underline{X})] \equiv 1 \quad \forall \underline{X}$ ed anche la conformit  e rispettata.

Inoltre, in generale non   necessario determinare le funzioni $N_i(\underline{X})$ esplicitamente (spesso impossibile) e si valutano le derivate come:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \underline{X}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow \underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 1 \end{bmatrix} = \tilde{\underline{B}}(\underline{\xi}, \eta)$$

$$\underline{k} = \int_{\Omega} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \, d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{\underline{B}}^T \underline{D} \tilde{\underline{B}} \cdot |\underline{J}| \, d\tilde{\Omega} \quad \text{con} \quad d\Omega = \underbrace{|\underline{J}|}_{\det(\underline{J})} \, d\tilde{\Omega}$$

$$\underline{f} = \int_{\Omega} \underline{N}^T(\underline{X}) \underline{\chi} \, d\Omega = \int_{\tilde{\Omega}} \underline{N}^T(\underline{\xi}) \underline{\chi} \cdot |\underline{J}| \, d\tilde{\Omega}$$

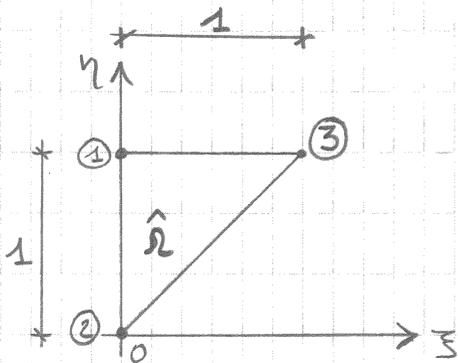
L'assemblaggio   effettuato in modo classico.

* NB: $\underline{\xi} \equiv \underline{\xi}(\underline{X}(\underline{\xi}))$ (identit )

da cui $\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial \underline{X}^T} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial x^T} \frac{\partial x}{\partial \xi^T}$

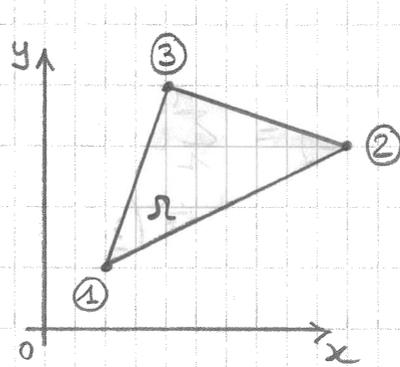
$$\equiv \begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{,1} & x_{,2} \\ y_{,1} & y_{,2} \end{bmatrix} \underline{J}$$

Esempio di EF isoparametrico: l'elemento piano a 3 nodi ("CST")



Elemento "master"

$$\begin{aligned} n_1(\xi) &= 1-\xi \\ n_2(\xi) &= 1-\eta \\ n_3(\xi) &= \xi \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \end{aligned}$$

Si assume che i tre nodi NON siano allineati, cioè:

$$2 \cdot A_{123} = 2 \cdot A_{\Omega} = \Delta = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

NB: I nodi vengono numerati procedendo in senso antiorario sia per l'elemento master ($\hat{\Omega}$) sia per quello distorto (Ω). In questo modo risulta $\Delta > 0$.

a) Rappresentazione della geometria di Ω

Per definizione di EF ISO-parametrico, si adottano le funzioni di forma $n_i(\xi)$ per descrivere la geometria di Ω (in forma parametrica):

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{x}(\xi) = \underline{x}_1 \cdot n_1(\xi) + \underline{x}_2 \cdot n_2(\xi) + \underline{x}_3 \cdot n_3(\xi)$$

$$\Rightarrow \underline{x}(\xi) = \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} + \xi \begin{bmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (\text{"mapping"})$$

NB: Questa trasformazione è "regolare" [e quindi esiste $\xi(x)$] sse $\Delta \neq 0$.

La matrice Jacobiana di questa trasformazione è:

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} x_{1,\xi} & x_{1,\eta} \\ y_{1,\xi} & y_{1,\eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - x_1 & x_1 - x_2 \\ y_3 - y_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}; \quad \det(\underline{J}) = \Delta = 2 \cdot A_{123} = (x_3 - x_1)(y_1 - y_2) - (x_1 - x_2)(y_3 - y_1)$$

Le funzioni necessarie nelle integrazioni successive sono le seguenti derivate

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix}$$

della relazione inversa $\xi = \xi(x)$. Questa esiste sempre, per l'ipotesi di regolarità della trasformazione $X(\xi)$, ma in generale non è esprimibile mediante funzioni elementari.

Tali derivate possono essere espresse in funzione delle derivate della relazione $X = X(\xi)$.

Infatti, la seguente espressione è un'identità:

$$\xi \equiv \xi [X(\xi)]$$

$$\left(\text{ad es. } \begin{cases} x = \ln \xi = X(\xi) \\ \xi = e^x = \xi(x) \end{cases} \right) \rightarrow \xi \equiv \xi [X(\xi)] \equiv e^{\ln \xi}$$

ovvero:

$$\begin{cases} \xi \equiv \xi [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \\ \eta \equiv \eta [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)] \end{cases}$$

Ne consegue:

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \xi [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \equiv 1 \\ \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial \xi [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial \xi}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial \xi}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \equiv 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \eta [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]}{\partial \xi} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \xi} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \xi} \equiv 0 \\ \frac{\partial \eta}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial \eta [X(\xi, \eta), Y(\xi, \eta)]}{\partial \eta} \equiv \frac{\partial \eta}{\partial X} \frac{\partial X}{\partial \eta} + \frac{\partial \eta}{\partial Y} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \equiv 1 \end{cases}$$

Queste identità possono essere espresse in forma matriciale come:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial X} & \frac{\partial \xi}{\partial Y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial X} & \frac{\partial \eta}{\partial Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial X}{\partial \xi} & \frac{\partial X}{\partial \eta} \\ \frac{\partial Y}{\partial \xi} & \frac{\partial Y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

da cui si ricavano le derivate cercate:

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_{,3} & X_{,2} \\ Y_{,3} & Y_{,2} \end{bmatrix}^{-1} \equiv \underline{\underline{J^{-1}(\xi)}} \quad \text{essendo} \quad \underline{X(\xi)} = \sum_{i=1}^N X_i \cdot N_i(\xi)$$

Nel caso dell'elemento CST si ha:

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} \equiv \underline{\underline{J^{-1}}} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_2 & X_2 - X_1 \\ \gamma_1 - \gamma_3 & X_3 - X_1 \end{bmatrix} \quad (\otimes)$$

DIGRESSIONE

Nell'esempio trattato (EF CST) la relazione $\underline{X} = \underline{X}(\xi)$ è lineare e quindi è possibile ottenere esplicitamente la relazione inversa $\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{X})$ che risulta:

$$\underline{\xi} = \underline{\xi}(\underline{X}) = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} X_1 \gamma_2 - X_2 \gamma_1 \\ X_1 \gamma_2 - X_2 \gamma_1 + \\ + X_2 \gamma_3 - X_3 \gamma_2 \end{bmatrix} + \frac{x}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_2 \\ \gamma_1 - \gamma_3 \end{bmatrix} + \frac{y}{\Delta} \begin{bmatrix} X_2 - X_1 \\ X_3 - X_1 \end{bmatrix}$$

da cui si possono ricavare le derivate:

$$\begin{bmatrix} \xi_{,x} & \xi_{,y} \\ \eta_{,x} & \eta_{,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \gamma_1 - \gamma_2 & X_2 - X_1 \\ \gamma_1 - \gamma_3 & X_3 - X_1 \end{bmatrix} \quad \text{che effettivamente} \\ \text{coincidono con } (\otimes).$$

b) Definizione delle funzioni di forma $\underline{N}(x)$ e calcolo derivate

Si sono definite le funzioni di forma $\underline{N}(x)$ mediante le funzioni $\underline{n}(\xi)$ dell'elemento master:

$$N_i(x) \stackrel{\text{def}}{=} n_i[\xi(x)]$$

ovvero: $N_i[x(\xi)] = n_i(\xi)$

Per il calcolo degli elementi della matrice $\underline{B}(x)$ occorre determinare le derivate di $\underline{N}(x)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i(x)}{\partial x} = \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(x)}{\partial y} = \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{cases}$$

In forma matriciale: $\frac{\partial N_i(x)}{\partial x} = \begin{bmatrix} \xi_x & \eta_x \\ \xi_y & \eta_y \end{bmatrix} \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi} = \underline{J}^T \cdot \frac{\partial n_i(\xi)}{\partial \xi}$

Nel caso dell'elemento CST si ha:

$$\frac{\partial N_i}{\partial x} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & x_2 - x_1 \\ y_1 - y_3 & x_3 - x_1 \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial n_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial n_i}{\partial \eta} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_2}{\partial x} \\ \frac{\partial N_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial N_3}{\partial x} \\ \frac{\partial N_3}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

e quindi:
$$\underline{B}(x) = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix}$$

(7/4)

DIGRESSIONE

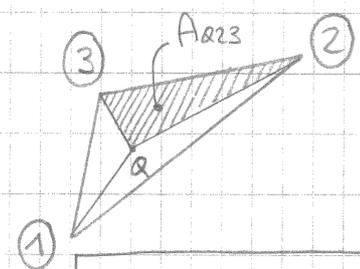
Sempre in virtù del fatto che per gli elementi CST la trasformazione $\underline{x} = X(\xi)$ è lineare, si possono ottenere esplicitamente le funzioni $\underline{N}(x)$ e determinare le derivate da tali espressioni. Risultato:

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{x_2 y_3 - x_3 y_2}{\Delta} + x \cdot \frac{y_2 - y_3}{\Delta} + y \frac{x_3 - x_2}{\Delta} \\ N_2(x) = \frac{x_3 y_1 - x_1 y_3}{\Delta} + x \cdot \frac{y_3 - y_1}{\Delta} + y \frac{x_1 - x_3}{\Delta} \\ N_3(x) = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{\Delta} + x \cdot \frac{y_1 - y_2}{\Delta} + y \frac{x_2 - x_1}{\Delta} \end{cases}$$

Da queste si ricavano le derivate $N_{i,x}$ e la matrice $\underline{B}(x)$ che, è immediato verificare, coincide con (7/4).

Si noti che è possibile fornire una rappresentazione geometrica per le funzioni $N_i(x)$. È in fatti:

$$N_1(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{2 \cdot A_{\alpha 23}}{2 \cdot A_{\alpha 23}} = \frac{A_{\alpha 23}}{A_{\alpha 23}}$$



$$N_2(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} = \frac{A_{1 \alpha 3}}{A_{\alpha 23}}$$

$$N_3(x) = \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{2 \cdot A_{\alpha 23}} = \frac{A_{12 \alpha}}{A_{\alpha 23}}$$

Se ne deduce immediatamente che:
$$\begin{cases} N_i(x_j) = \delta_{ij} \\ \sum_{i=1}^3 N_i(x) \equiv 1 \end{cases}$$

$\frac{A_{\alpha 23}}{A_{\alpha 23}}$; $\frac{A_{\alpha \alpha 3}}{A_{\alpha 23}}$; $\frac{A_{\alpha 2 \alpha}}{A_{\alpha 23}}$ sono dette "coordinate di area" o "coordinate areolari".

c) Integrazione

Per definizione si ha:
$$\underline{\underline{f}}_k^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{t}(x) \cdot \underline{B}^T(x) \underline{D} \underline{B}(x) d\Omega$$

Mediante il cambio di variabili $\underline{x} = \underline{x}(\underline{\xi})$ si riporta l'integrale
 su sull'elemento master:

$$\underline{\underline{f}}_k^{(n)} = \int_{\hat{\Omega}} \underline{t}(\underline{\xi}) \underline{B}^T(\underline{\xi}) \underline{D} \underline{B}(\underline{\xi}) \cdot |\underline{J}| \cdot d\hat{\Omega}$$

Nel caso dell'elemento CST (con \underline{t} e \underline{D} costanti sull'elemento)
 si ha:

$$\underline{\underline{f}}_k^{(n)} = \underline{t} \cdot \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \cdot \Delta \cdot \underbrace{\int_{\hat{\Omega}} d\hat{\Omega}}_{1/2} = \boxed{\frac{1}{2} \underline{t} \Delta \cdot \underline{B}^T \underline{D} \underline{B}}$$

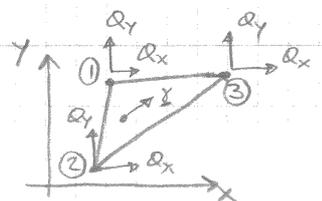
Per i carichi applicati risulta:
$$\underline{\underline{f}}_k^{(n)} = \int_{\Omega} \underline{N}^T(x) \cdot \underline{\gamma} d\Omega + \int_{\Gamma_t} \underline{N}^T(x) \cdot \underline{t} dP$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{f}}_k^{(n)} = \int_{\hat{\Omega}} \underline{N}^T(\underline{\xi}) \cdot \underline{\gamma}(\underline{\xi}) \cdot |\underline{J}(\underline{\xi})| \cdot d\hat{\Omega} + \int_{\hat{\Gamma}_t} \underline{N}^T(\underline{\xi}) \cdot \underline{t}(\underline{\xi}) \cdot \underbrace{g(\underline{\xi})}_{dP} \cdot d\hat{P}$$

Per l'elemento CST si ottiene:
$$\int_{\hat{\Omega}} \underline{N}^T(\underline{\xi}) \cdot \underline{\gamma} \cdot \Delta \cdot d\hat{\Omega} = \left[\int_{\hat{\Omega}} \underline{N}^T(\underline{\xi}) \cdot d\hat{\Omega} \right] \cdot \underline{\gamma} \cdot \Delta =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \cdot \frac{\Delta}{6} = \begin{bmatrix} Q_x/3 \\ Q_y/3 \\ Q_x/3 \\ Q_y/3 \\ Q_x/3 \\ Q_y/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{con: } \begin{cases} Q_x = \gamma_x \cdot A_{123} \\ Q_y = \gamma_y \cdot A_{123} \end{cases}$$

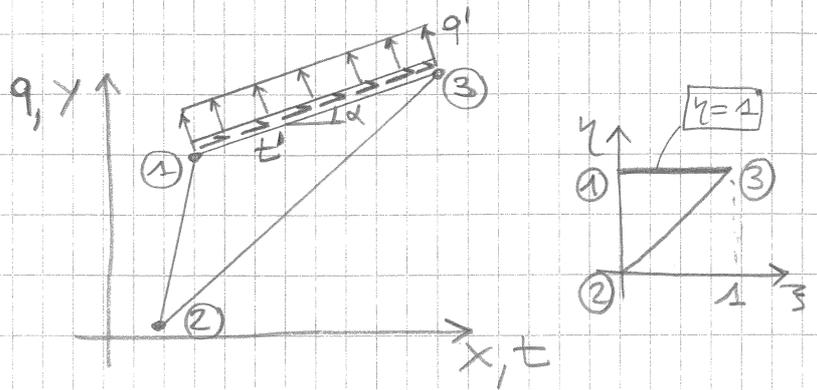


Per i carichi applicati sul contorno si consideri, ad esempio, il caso seguente:

$$T = t \cdot l_{13} = t' \cdot l_{13} \cdot \cos \alpha - q' \cdot l_{13} \cdot \sin \alpha$$

$$Q = q \cdot l_{13} = t' \cdot l_{13} \cdot \sin \alpha + q' \cdot l_{13} \cdot \cos \alpha$$

$$\Rightarrow \underline{t} = \begin{bmatrix} t \\ q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} t' \\ q' \end{bmatrix}$$

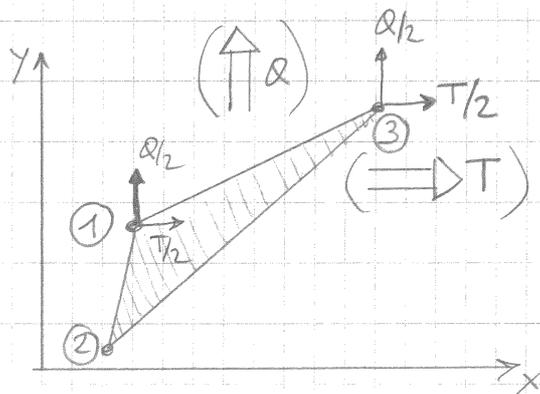


$$\int_{\Gamma_t} \underline{N}^T(x) \cdot \underline{t} \, d\Gamma = \int_{\hat{\Gamma}} \underline{N}^T(\xi) \cdot \begin{bmatrix} t \\ q \end{bmatrix} \cdot g(\xi) \cdot d\hat{\Gamma}$$

$$d\Gamma = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{\left[\frac{d}{d\xi} x(\xi, 1)\right]^2 + \left[\frac{d}{d\xi} y(\xi, 1)\right]^2} d\xi = \underbrace{\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2}}_{l_{13}} \cdot d\xi$$

$$d\Gamma = g(\xi) \cdot d\xi \equiv \underbrace{l_{13}} \cdot d\xi$$

$$\int_{\hat{\Gamma}} \underline{N}^T(x) \cdot \underline{t} \, d\Gamma = \int_0^1 \underline{N}^T(\xi, 1) d\xi \cdot \begin{bmatrix} t \\ q \end{bmatrix} \cdot l_{13} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ q \end{bmatrix} \frac{l_{13}}{2} = \begin{bmatrix} T/2 \\ Q/2 \\ 0 \\ 0 \\ T/2 \\ Q/2 \end{bmatrix}$$



T, Q = risultanti secondo gli assi x e y .