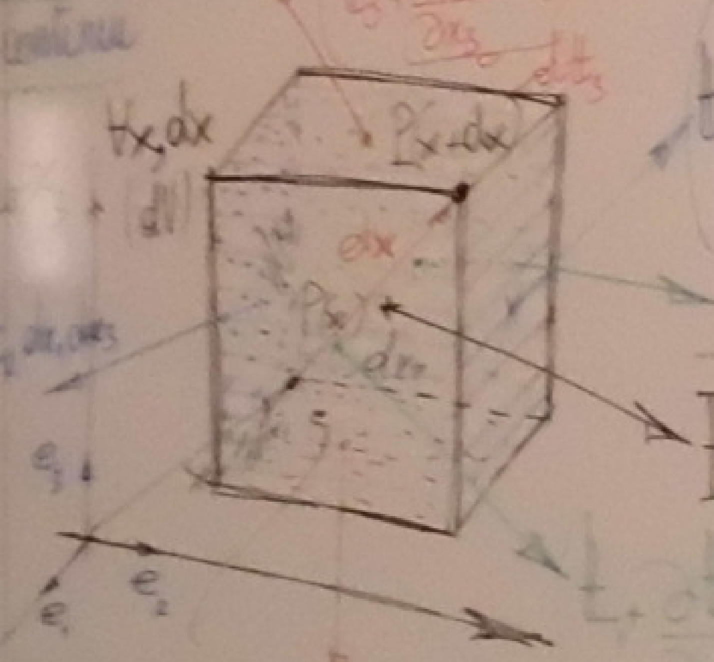

Equazioni indefinite di equilibrio dei continui
- Intuitivamente, la variazione spaziale dello stato di sforzo σ = σ(x), dovrà risultare legata alla presenza di forze di volume F(x)
- In effetti, nell'ambito della Meccanica delle Strutture (travi) abbiamo ricavato:
N'(x) = -p(x), T'(x) = -q(x), M'(x) = -m(x) + T(x);
- A tale scopo, consideriamo l'equil. alla traslazione di un parallelepipedo infinitesimo ritagliato nello intorno di P(x)
notazione: ∂()/∂x_i = (),_i deriv. parziali
∀x, dx
(dV)
P(x+dx)
P(x)
dx
x_1
x_2
x_3
e_1
e_2
e_3
dV = dx_1 dx_2 dx_3
Equil. alla traslaz.:
(t_i + ∂t_i/∂x_i dx_i) dx_j dx_k − t_i dx_j dx_k + F dx_1 dx_2 dx_3 = 0
t_{i,i} + F = 0 ⇒ t_{ij,i} + F_j = 0 ⇔ div σ + F = 0
t_n = n · σ = σ · n
σ_ij = t_ij
div = ∇·
Tensioni principali e direzioni principali
τ_n = t_n − σ_n = σ·n − σ_n I·n = (σ − σ_n I)·n

Equazioni indefinite di equilibrio dei continui
- Intuitivamente, la variazione spaziale dello stato di sforzo σ = σ(x), dovrà risultare legata alla presenza di forze di volume F(x)
- In effetti, nell'ambito della Meccanica delle Strutture, (travi) abbiamo ricavato
- A tale scopo, consideriamo l'equil. alla traslazione di un parallelepipedo infinitesimo estratto nell'intorno di P(x)
∀x, dx (dV)
dV = dx1 dx2 dx3
F dV
Equil. alla trasl.
notazioni: deriv. parziali
div σ + F = 0
gradiente
Tensioni principali e direzioni principali (di sforzo)
comp. tagliente
- Esistono direzioni particolari (principali) tali per cui t_n // n
(cioè t_n = σ_n e τ_n = 0)
pb. agli autovalori per σ

$t_1 + \frac{\partial t_1}{\partial x_1} dx_1$ $dx_2 dx_3$ $- t_1 dx_2 dx_3$ $+ \mathbb{F} dx_1 dx_2 dx_3 = 0$



$\sigma_{ij} = t_{ij}$

$\mathbb{t}_n = \mathbb{n} \cdot \sigma = \sigma^{(T)} \cdot \mathbb{n}$

$\mathbb{F} dV$

$t_1 = e_1 \cdot \sigma = \sigma^{T} \cdot e_1$

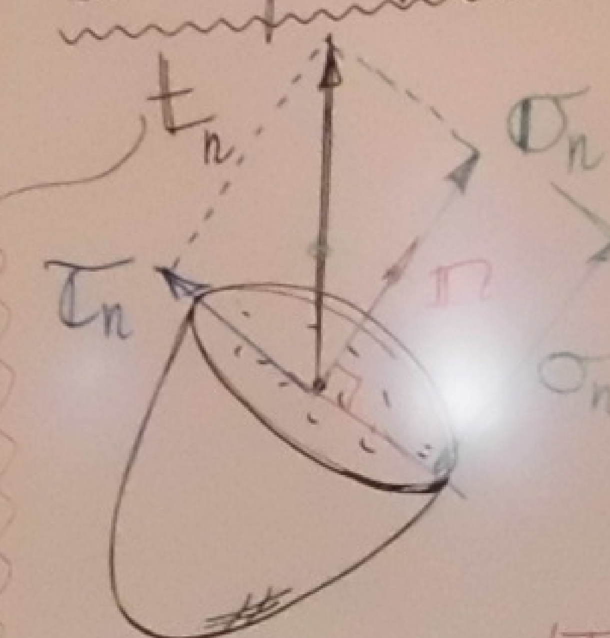
$t_{ij,i} + F = 0 \Rightarrow t_{ij,i} + F_j = 0 \Leftrightarrow$ $\boxed{\mathrm{div}\,\sigma + \mathbb{F} = 0}$ in V

$\mathrm{div} = \nabla \cdot$

gradiente $\frac{\partial}{\partial x}$

$\mathrm{div}\,\sigma = -\mathbb{F}$

Tensioni principali e direzioni principali (di sforzo)



$$\mathbb{t}_n = \sigma_n + \tau_n$$

comp normale $= \sigma_n \mathbb{n} + \tau_n$

$$\sigma_n = \mathbb{t}_n \cdot \mathbb{n} = \mathbb{n} \cdot \sigma \cdot \mathbb{n}$$

$$\tau_n = \mathbb{t}_n - \sigma_n = \sigma^{(T)} \cdot \mathbb{n} - \sigma_n \mathbb{I} \cdot \mathbb{n} = (\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot \mathbb{n}$$

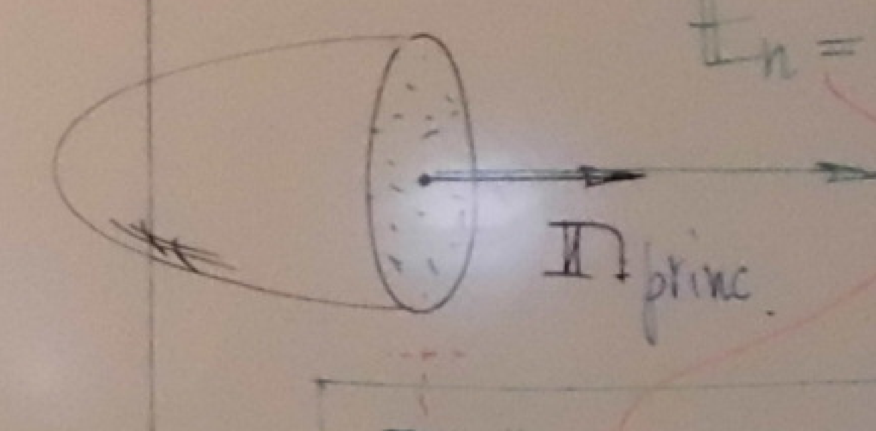
comp. tagliente

$\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ordine

$I_{ij} = \delta_{ij}$ $\begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$

delta di Kronecker

– Esistono direzioni particolari (principali) tali per cui $\mathbb{t}_n \parallel \mathbb{n}$? (cioè $\mathbb{t}_n = \sigma_n$ e $\tau_n = 0$)



$\mathbb{n}_{princ.}$

$\mathbb{t}_n = \sigma_n$ $(\tau_n = 0)$

$$\boxed{(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot \mathbb{n} = 0}$$

$$\boxed{\sigma \cdot \mathbb{n} = \sigma_n \mathbb{n}}$$

$A x = \lambda x$

λ: autovalori di A

x: autovettori di A

pb. agli autovalori per σ

σ_n tensioni princ.: autovalori

$\mathbb{n}$ direz. princ.: autovettori

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice identità 3×3

CNS il sist. lineare omogeneo ammette soluz. non banali ($\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$):

$$-\det(\sigma - \sigma_n I) = -\det \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix}$$

× simmetria $\sigma^T = \sigma$

polinomio caratteristico (3° grado)

$$= \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

equazione caratteristica di σ

Invarianti di sforzo: I_i (al variare del sist. di riferimento σ_{ij})

- primo $\sim \sigma^1$: $I_1 = \mathrm{tr}\,\sigma$ (operatore traccia) $= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
- secondo $\sim \sigma^2$: $I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\sigma^2) - (\mathrm{tr}^2\sigma)\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right) = -\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$
- terzo $\sim \sigma^3$: $I_3 = \det \sigma = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\sigma^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\sigma\left(\mathrm{tr}\,\sigma^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\sigma\right) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$

A radici distinte corrisp. autovett. mutuam. $\perp$

Infatti, sia $\sigma_I \neq \sigma_{II}$:

$$\mathbf{n}_{II} \cdot (\sigma \cdot \mathbf{n}_I = \sigma_I \mathbf{n}_I) \; -$$
$$\mathbf{n}_I \cdot (\sigma \cdot \mathbf{n}_{II} = \sigma_{II} \mathbf{n}_{II})$$

$$0 = \mathbf{n}_I \cdot \sigma^{(T)} \cdot \mathbf{n}_{II} - \mathbf{n}_I \cdot \sigma \cdot \mathbf{n}_{II} = \underbrace{(\sigma_I - \sigma_{II})}_{\neq 0} \underbrace{\mathbf{n}_I \cdot \mathbf{n}_{II}}_{=0}$$

$\mathbf{n}_I \perp \mathbf{n}_{II}$

σ_n: radici dell'eq.ne caratt. $\Rightarrow$ autovalori

- $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tensioni principali $\leftrightarrow$ numeri reali
- $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ direz. principali (di sforzo)

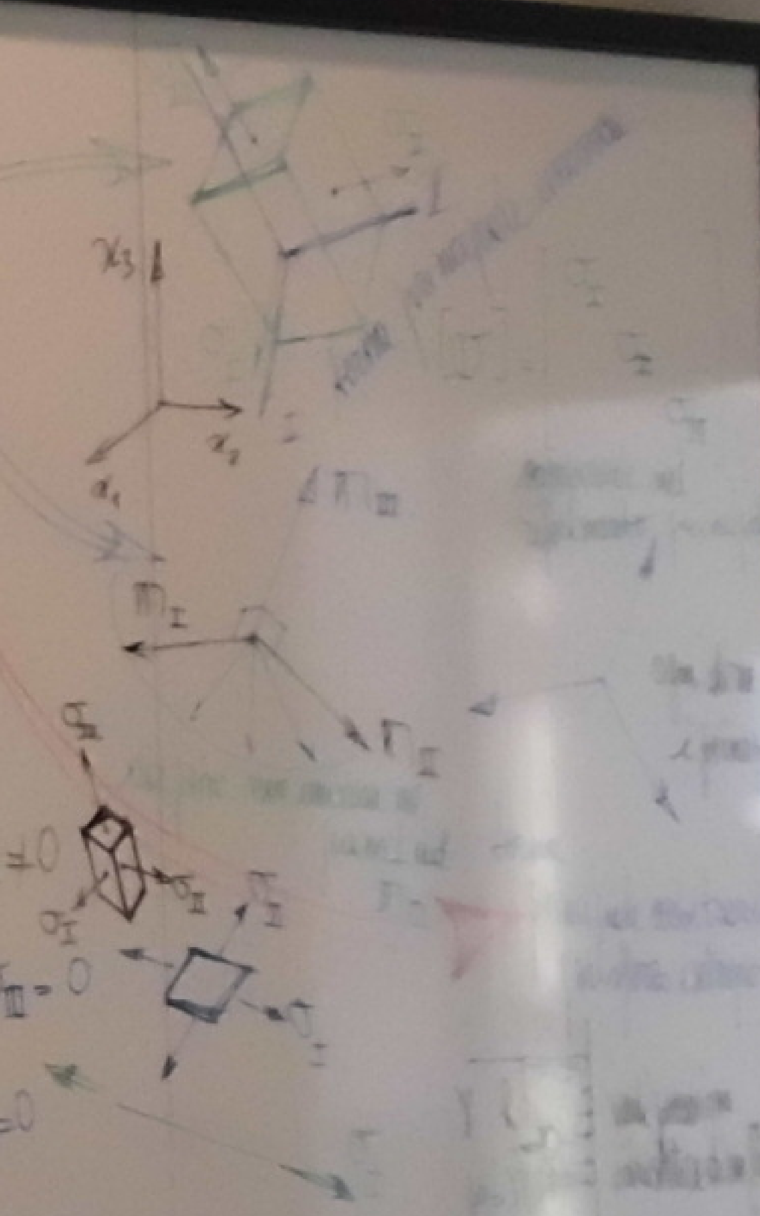
(poiché σ è reale e simmetrico autovalori reali)

Casistica radici:

- Tre radici distinte $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
- Due radici distinte $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
- Tre radici coincid. $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \equiv \sigma_{III}$ sforzo isotropo o idrostatico

Classificazione stato di sforzo

- Triassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0, \sigma_{III} \neq 0$
- Biassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0$; $\sigma_{III} = 0$
- Monoassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = 0$



CNS il sist. lineare omogeneo ammette soluz. non banali ($\underline{n} \neq \underline{0}$):

$$-\det(\underline{\sigma} - \sigma_n \underline{I}) = -\det \begin{bmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{bmatrix}$$

$\times$ simmetria $\underline{\sigma}^T = \underline{\sigma}$

polinomio caratteristico (3° grado)

$$= \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

equazione caratteristica di $\underline{\sigma}$

Invarianti di sforzo: I_i (al variare del sist. di riferimento σ_{ij})

- primo $\sim \sigma^1$: $I_1 = \mathrm{tr}\,\underline{\sigma}$ (operatore traccia) $= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$
- secondo $\sim \sigma^2$: $I_2 = \frac{1}{2}\left(\mathrm{tr}(\underline{\sigma}^2) - (\mathrm{tr}\,\underline{\sigma})^2\right) = \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right) = -\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix} = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$
- terzo $\sim \sigma^3$: $I_3 = \det \underline{\sigma} = \frac{1}{3}\mathrm{tr}\,\underline{\sigma}^3 - \frac{1}{2}\mathrm{tr}\,\underline{\sigma}\left(\mathrm{tr}\,\underline{\sigma}^2 - \frac{1}{3}\mathrm{tr}^2\underline{\sigma}\right) = \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$

A radici distinte corrisp. autovett. mutuam. $\perp$

Infatti, sia $\sigma_I \neq \sigma_{II}$:

$$\underline{n}_{II} \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_I = \sigma_I \underline{n}_I) \quad -$$
$$\underline{n}_I \cdot (\underline{\sigma} \cdot \underline{n}_{II} = \sigma_{II} \underline{n}_{II})$$

$$0 = \underline{n}_I \cdot \underline{\sigma}^{(T)} \cdot \underline{n}_{II} - \underline{n}_I \cdot \underline{\sigma} \cdot \underline{n}_{II} = \underbrace{(\sigma_I - \sigma_{II})}_{\neq 0} \underbrace{\underline{n}_I \cdot \underline{n}_{II}}_{= 0}$$

$\underline{n}_I \perp \underline{n}_{II}$

σ_n radici dell'eq.ne caratt. $\Rightarrow$ autovalori

- $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tensioni principali $\leftrightarrow$ numeri reali
- $\underline{n}_I, \underline{n}_{II}, \underline{n}_{III}$ direz. principali (di sforzo)

(poichè $\underline{\sigma}$ è reale e simmetrico) autovalori reali

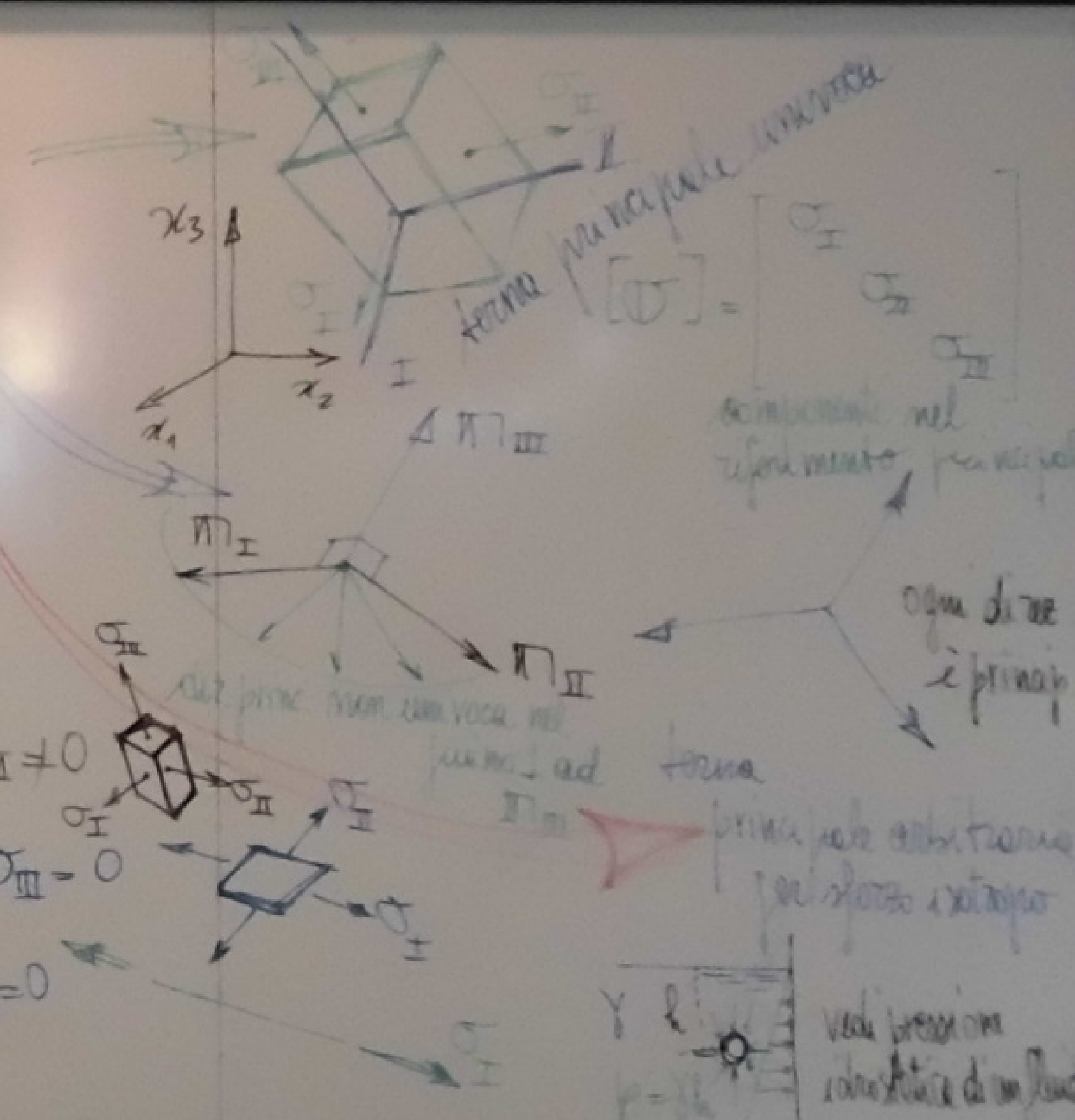
Casistica radici:

- Tre radici distinte: $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
- Due radici distinte: $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
- Tre radici coincid.: $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \equiv \sigma_{III}$

sforzo isotropo o idrostatico

Classificazione stato di sforzo

- Triassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0, \sigma_{III} \neq 0$
- Biassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0$; $\sigma_{III} = 0$
- Monoassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = 0$




Infatti, sia $\sigma_I \neq \sigma_{II}$!
x simmetria
$\sigma^T = \sigma$
σ_i radici dell'eq. ne risult. → autovalori
• $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tensioni principali ↔ numeri reali
• n_I, n_{II}, n_{III} direz. principali (di sforzo)
(poiché σ è reale e simmetrico) autovalori reali
Casistica radici:
• Tre radici distinte: $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
• Due radici distinte: $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$
• Tre radici coincid: $\sigma_I \equiv \sigma_{II} \equiv \sigma_{III}$
sforzo isotropo o idrostatico
Classificazione stato di sforzo
- Triassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0, \sigma_{III} \neq 0$
- Biassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} \neq 0; \sigma_{III} = 0$
- Monoassiale $\sigma_I \neq 0, \sigma_{II} = 0, \sigma_{III} = 0$
terna principale univoca
componenti nel riferimento principale
ogni direz. è princip.
dir. princ. non univoca nel piano ⊥ ad n_{III}
terna principale arbitraria per sforzo isotropo
vedi pressione idrostatica di un fluido
$p = \gamma h$