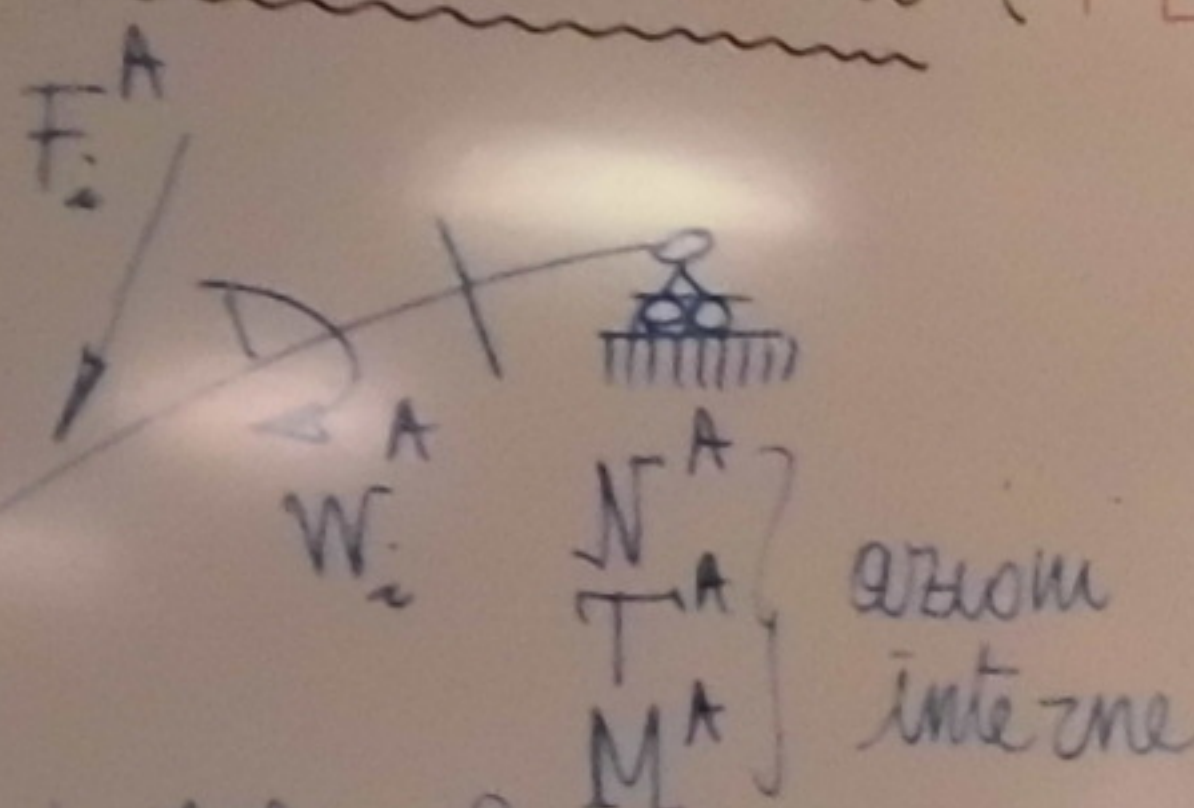


Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Definizione:

Sistema esterno

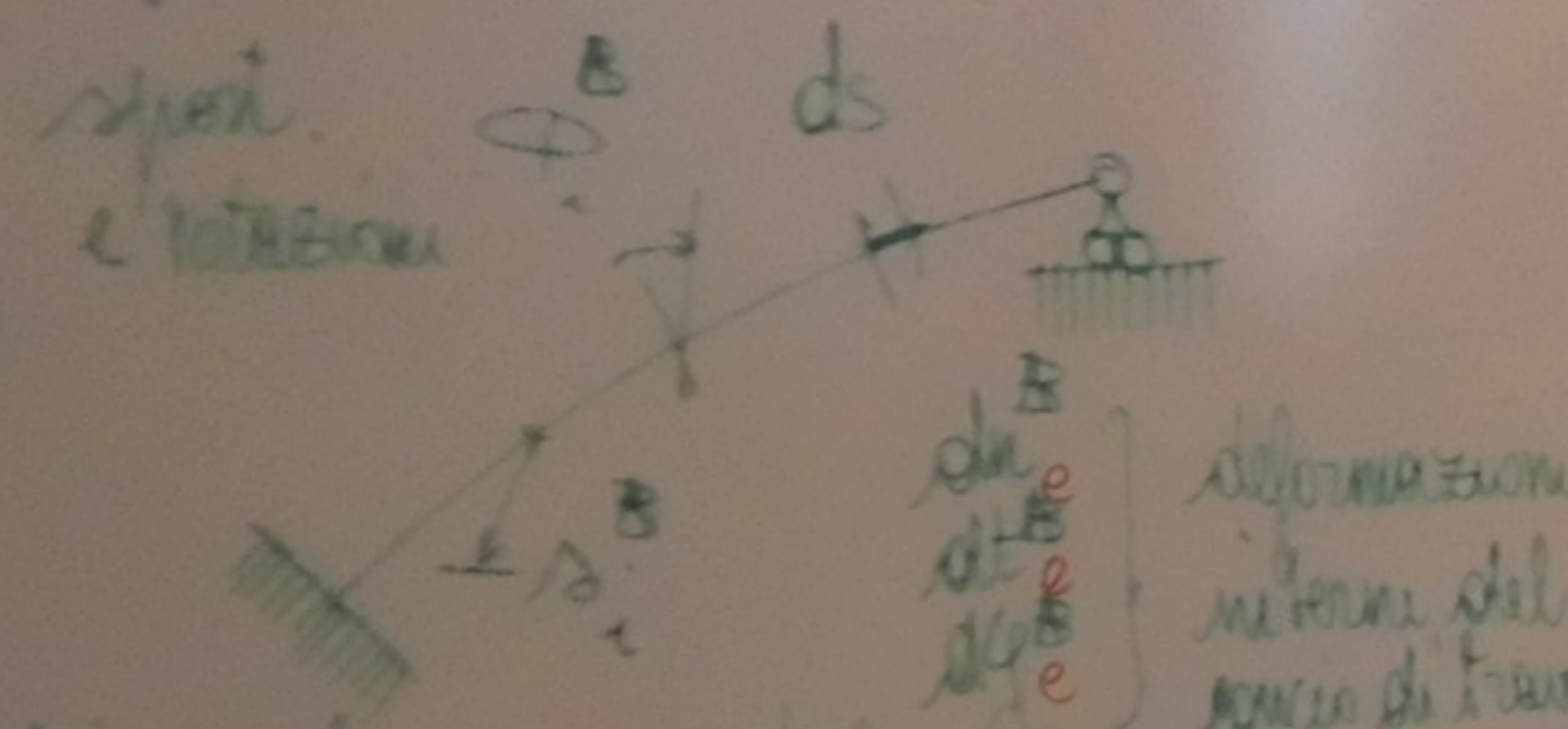
(A)



Staticamente ammissibile: famiglia di quantità statiche equilibrate

Sistema

(B)



Cinematicamente ammissibile: famiglia di quantità cinematiche congruente

Enunciato del PLV (CN di equil. e congr.)

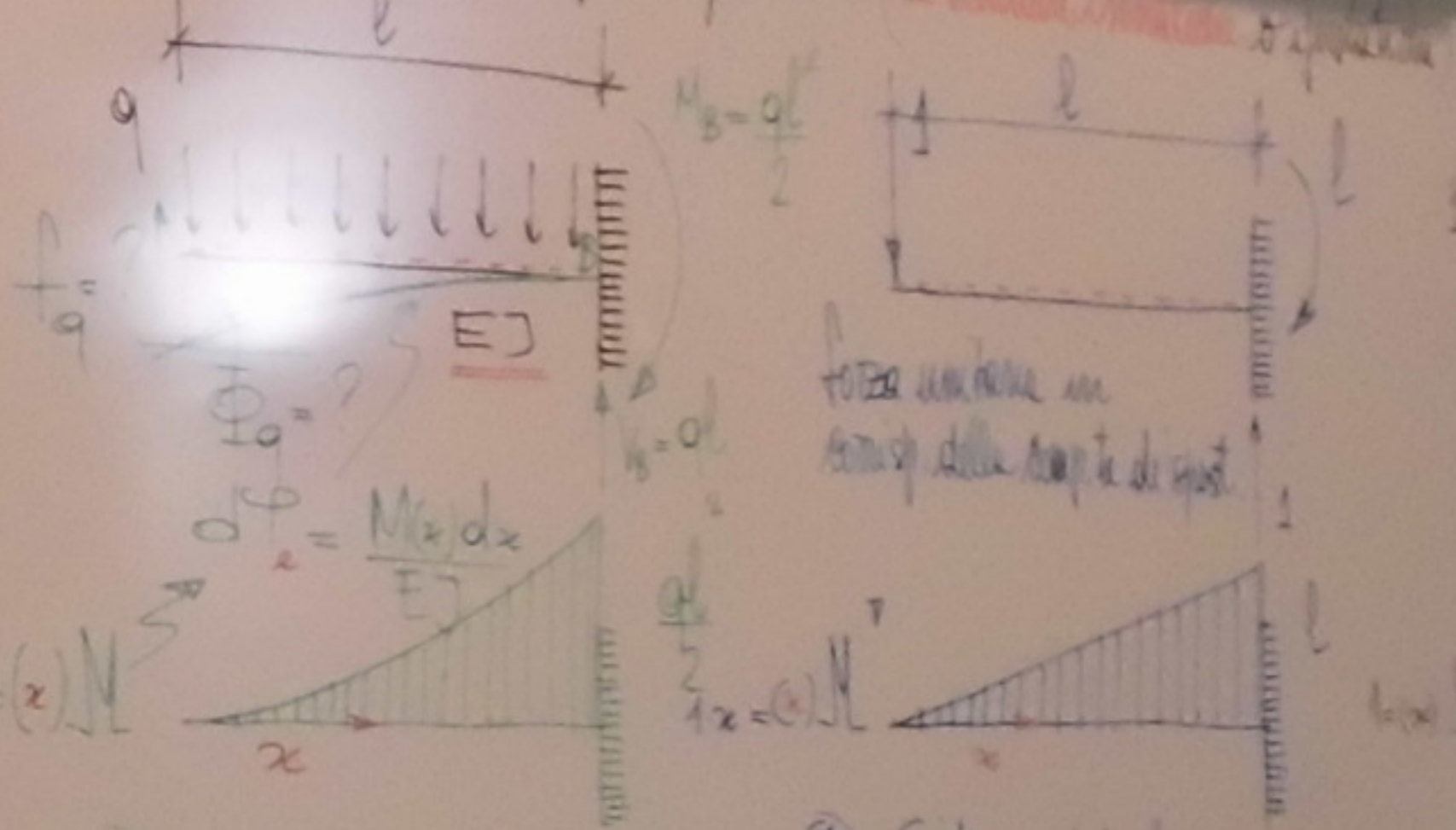
Per sist. (A), (B) $\Rightarrow \int_{AB} \delta u = \int_{AB} \delta u$ ove

$$\delta u = \sum_i F_i^A \delta u_i + W_i^A \delta u_i$$

$$\delta u = \int_{AB} N^A \delta u_e + T^A \delta u_e + M^A \delta u_e$$

- Assunto, se pure dimostrabile (TLV).
- I due sistemi (ammissibili) possono essere virtuali, cioè non necessariamente reali.
- Pertanto non esiste tra essi nessuna relazione di causa/effetto (quindi indip. dal tipo di materiali).
- Usi tipici del PLV: determinare di comp. di spost., risoluzione di strutture iperstatiche.

Determinazione di comp. di spostamento



Sistema reale

Sistema virtuale

Scrittura del PLV

$$\int_{AB} \delta u = 1 \cdot \delta u + 1 \cdot \delta u + 1 \cdot \delta u = \delta u = \delta u$$

Principio dei Lavori Virtuali (PLV) Enunciato del PLV (C.N. di equl. e sorge.)

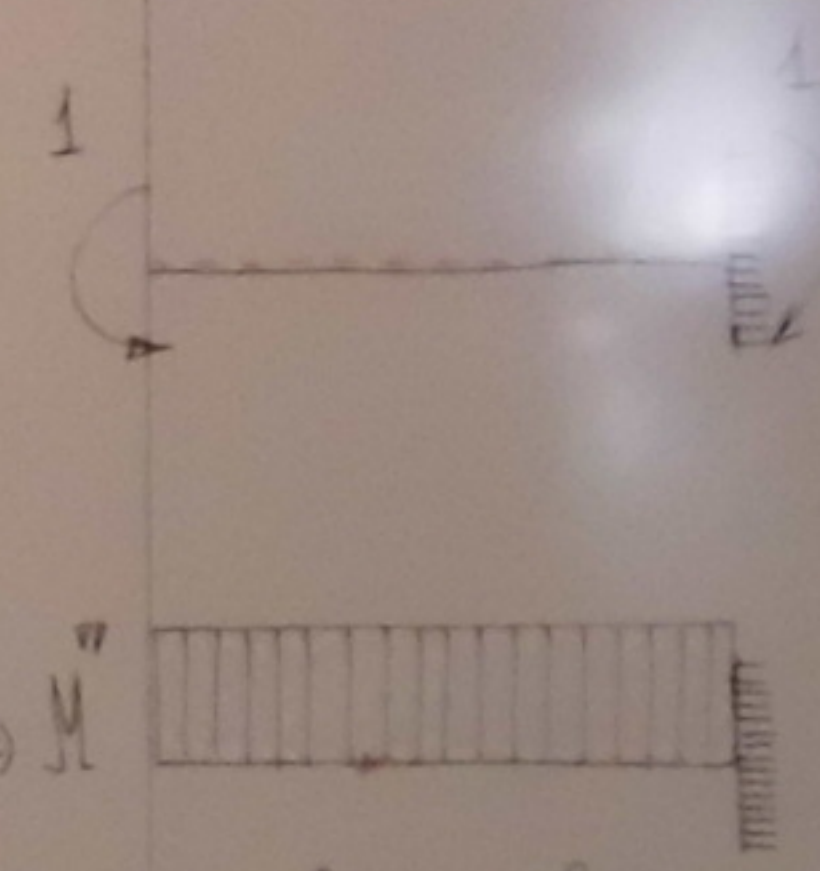
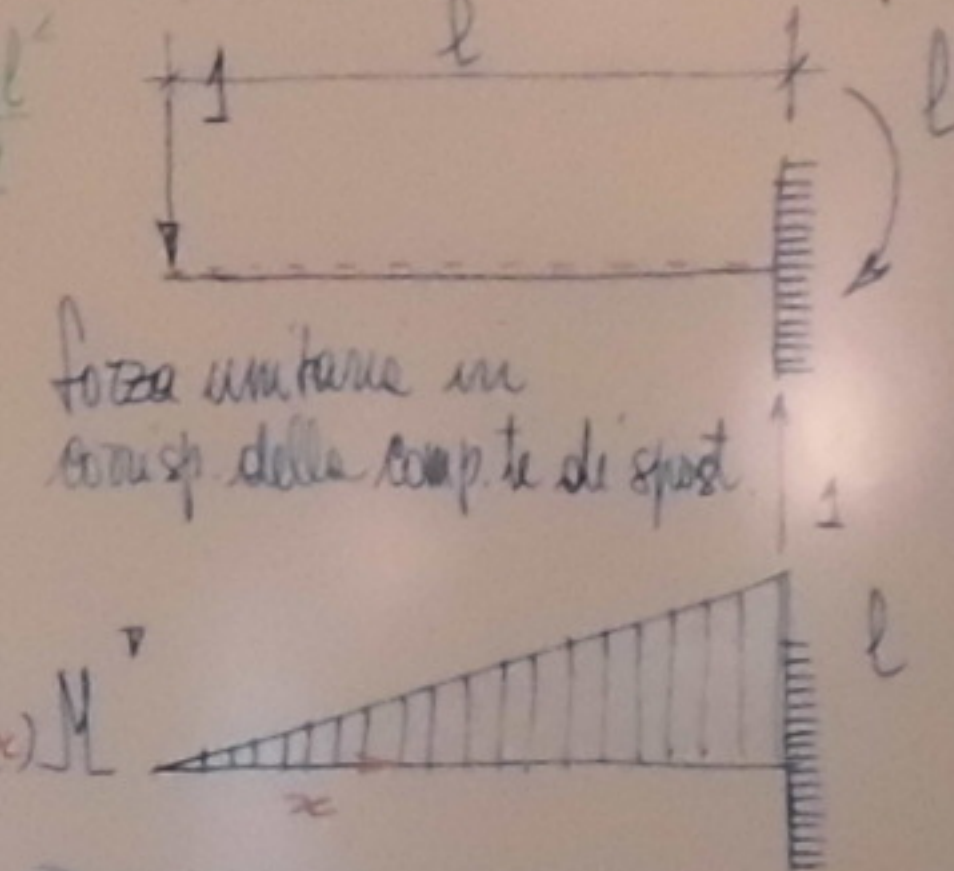
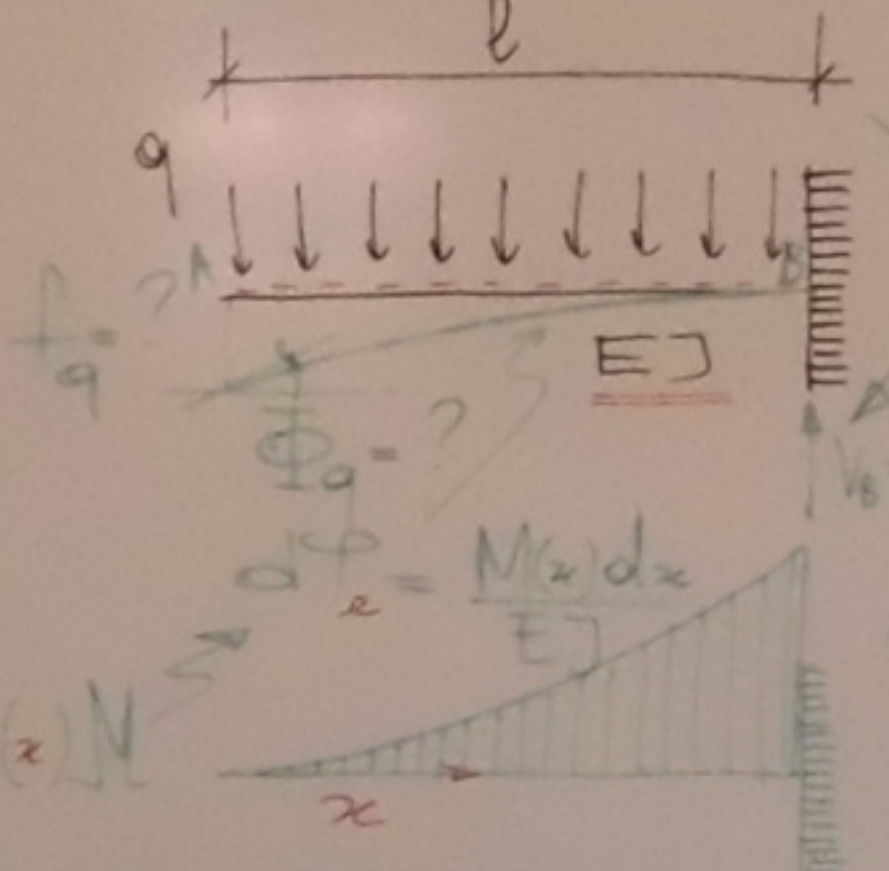
Definizione:
Sistema reale
Sistema virtuale
Stati ammissibili: famiglie di quantità statiche ammissibili

$$\delta L_i = \sum_{AB} F_i \delta x_i + W_i \delta \varphi_i$$

$$L_i = \int_{Stz} N \delta e + T \delta i + M \delta \varphi$$

- Assunto, se pure dimostrabile (TLV).
- I due sistemi (ammissibili) possono essere virtuali, cioè non necessari. $\equiv$ del sist. reale
- Usi tipici del PLV: determinat. di comp. di spost., regolazione di strutture iperstatiche

• Determinazione di comp. di spostamento (in strutture iperstatiche o iperstatiche)



② Sistema reale

① Sistema virtuale (struttura fittizia)

① 2° struttura fittizia

Scrittura del PLV

$$\delta L_c = 1 \cdot f_q + 1 \cdot \delta_B + l \cdot \delta_B = f_q + \delta_B (1 + l) = f_q + \delta_B \frac{1}{2} = \delta_B \frac{1}{2}$$

$$f_q = \int_0^l q x \frac{qx}{2} dx = \frac{1}{2} q \frac{x^3}{3} \Big|_0^l = \frac{1}{6} q l^3 = \frac{1}{6} q l^3$$

$$\delta L_c = 1 \cdot \delta_B = \delta_B = \int_0^l M(x) \frac{1}{EJ} dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l M(x) dx = \frac{1}{EJ} \int_0^l \frac{qx^2}{2} dx = \frac{1}{6} q l^3 = \frac{1}{6} q l^3$$

Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

Enunciato del PLV (Nodi uguali e sorge)

$$\delta U = \delta W \Rightarrow \delta L_c = \delta L_i \text{ ove}$$

$$L_c = \sum F_i \cdot \delta_i + W$$

$$L_i = \int_{AB} N(x) \cdot \delta u(x) dx + \int_{AB} T(x) \cdot \delta v(x) dx + \int_{AB} M(x) \cdot \delta \theta(x) dx$$

- Assunto, se pure determinabile (TLV).

- I due sistemi (virtuale e reale) possono essere

virtuale, reale o misto = alcuni reali

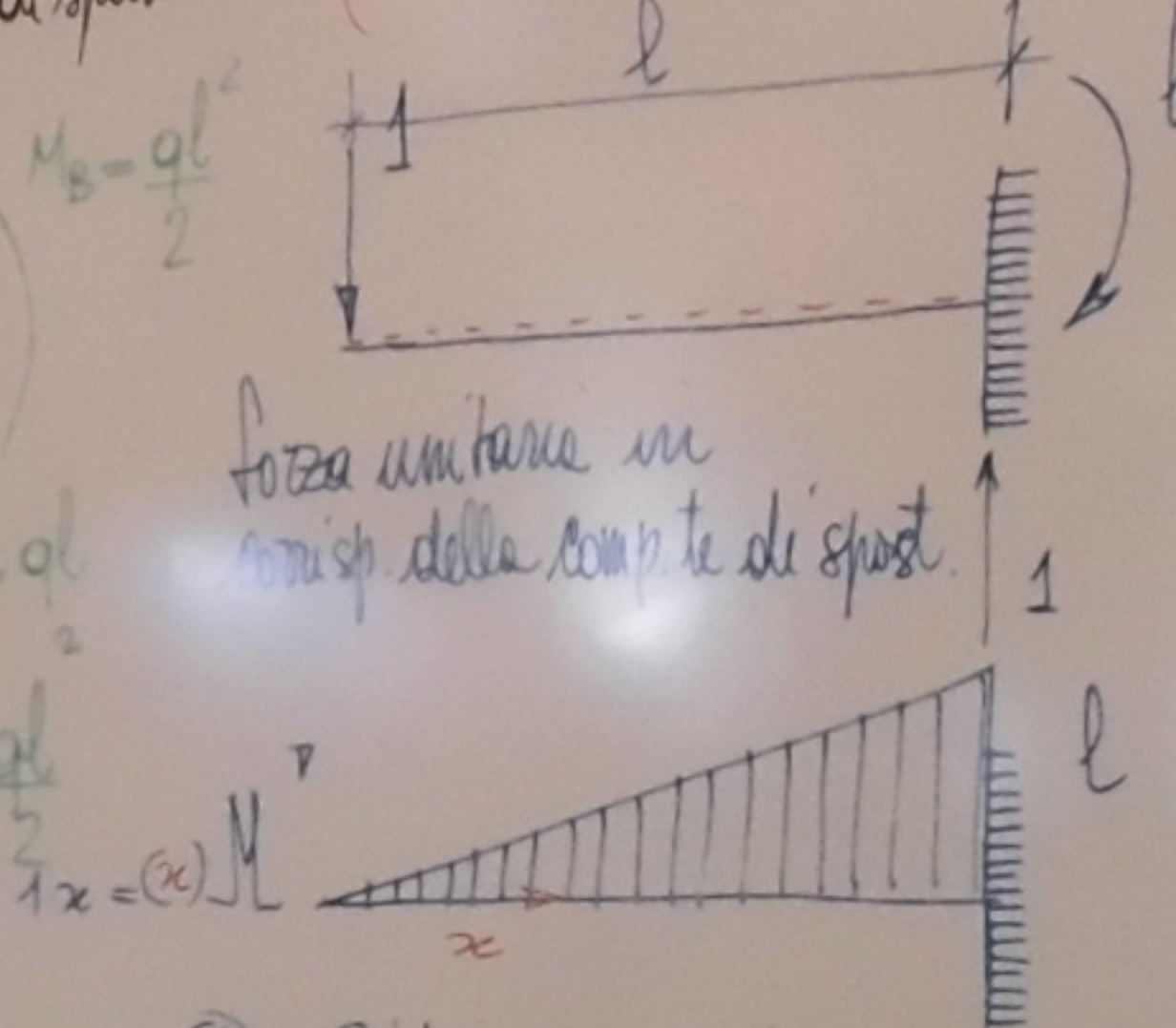
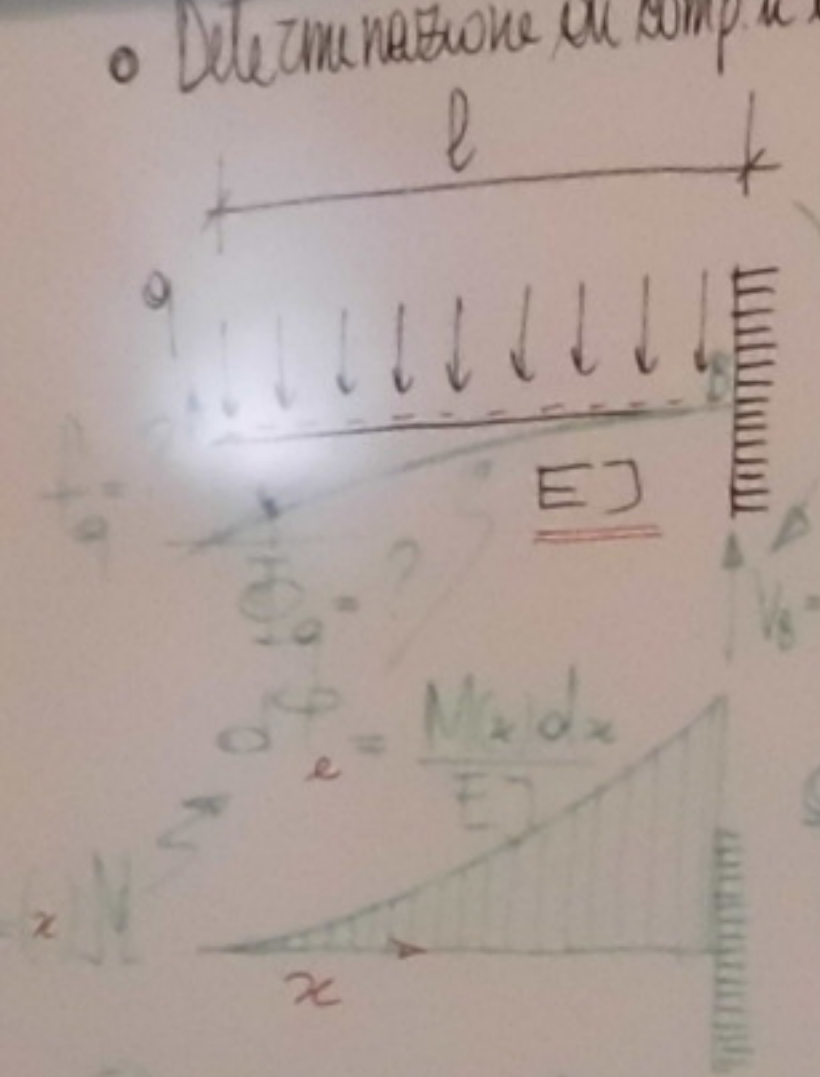
- I due sistemi possono essere

virtuale, reale o misto = alcuni reali

- La funzione del PLV: determinare gli spostamenti di spost.

in strutture iperstatiche e ipostatiche

• Determinazione di comp. di spostamento (in strutture ipostatiche o iperstatiche)



forza unitaria in comp. di spost.

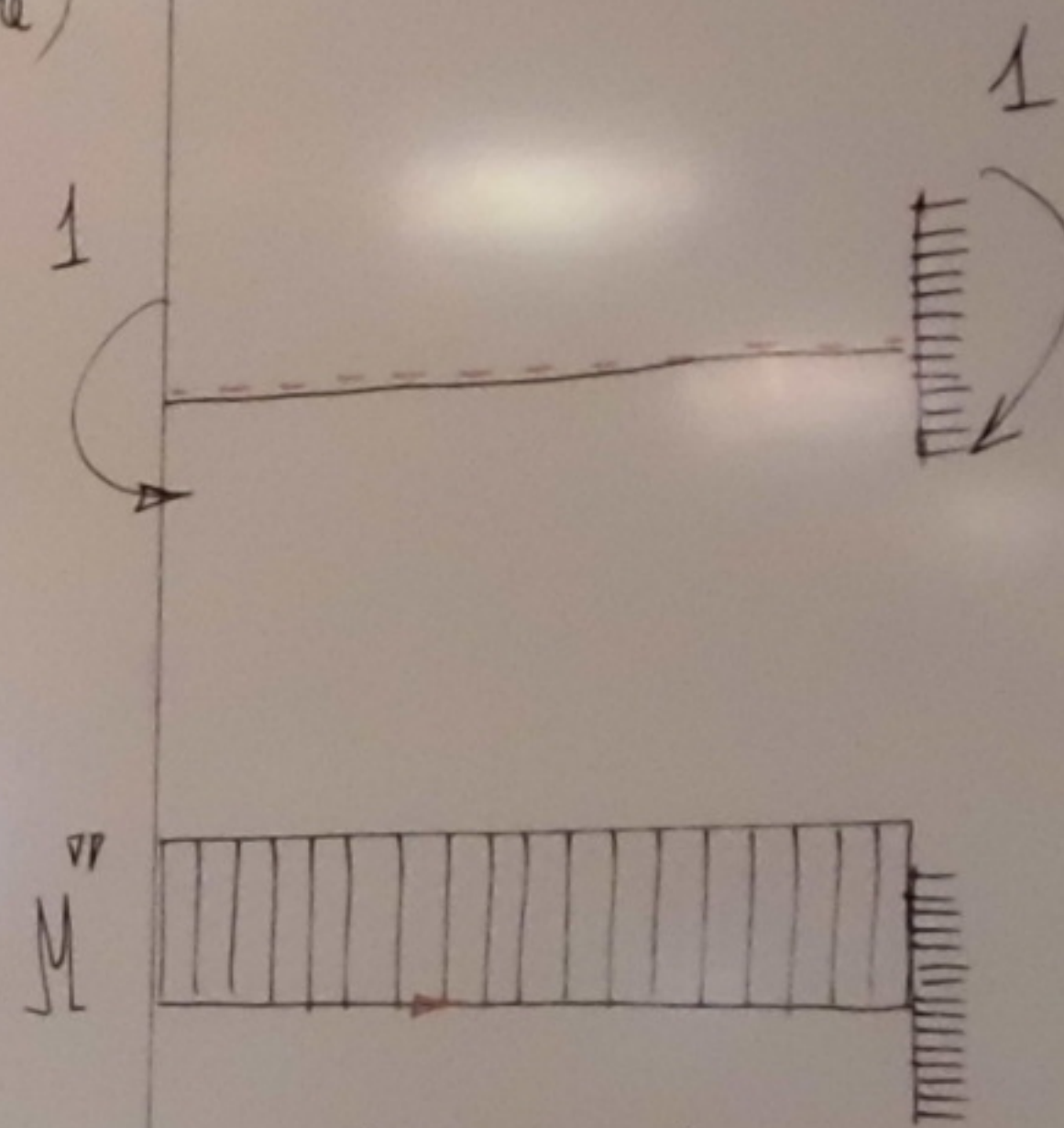
③ Sistema reale

$$\text{Scrittura del PLV: } L_c = 1 \cdot f_q + (1 \cdot \delta_B + l \cdot \delta_B) = f_q = \int_{AB} N(x) \cdot \delta u(x) dx = L_i$$

④ Sistema virtuale (struttura fittizia)

$$f_q = \int_{AB} N(x) \cdot \delta u(x) dx = L_i$$

$$f_q = \int_0^l x \cdot \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{2} \frac{q}{EJ} \frac{x^4}{4} \Big|_0^l = \frac{1}{8} \frac{ql^4}{EJ} = f_q$$

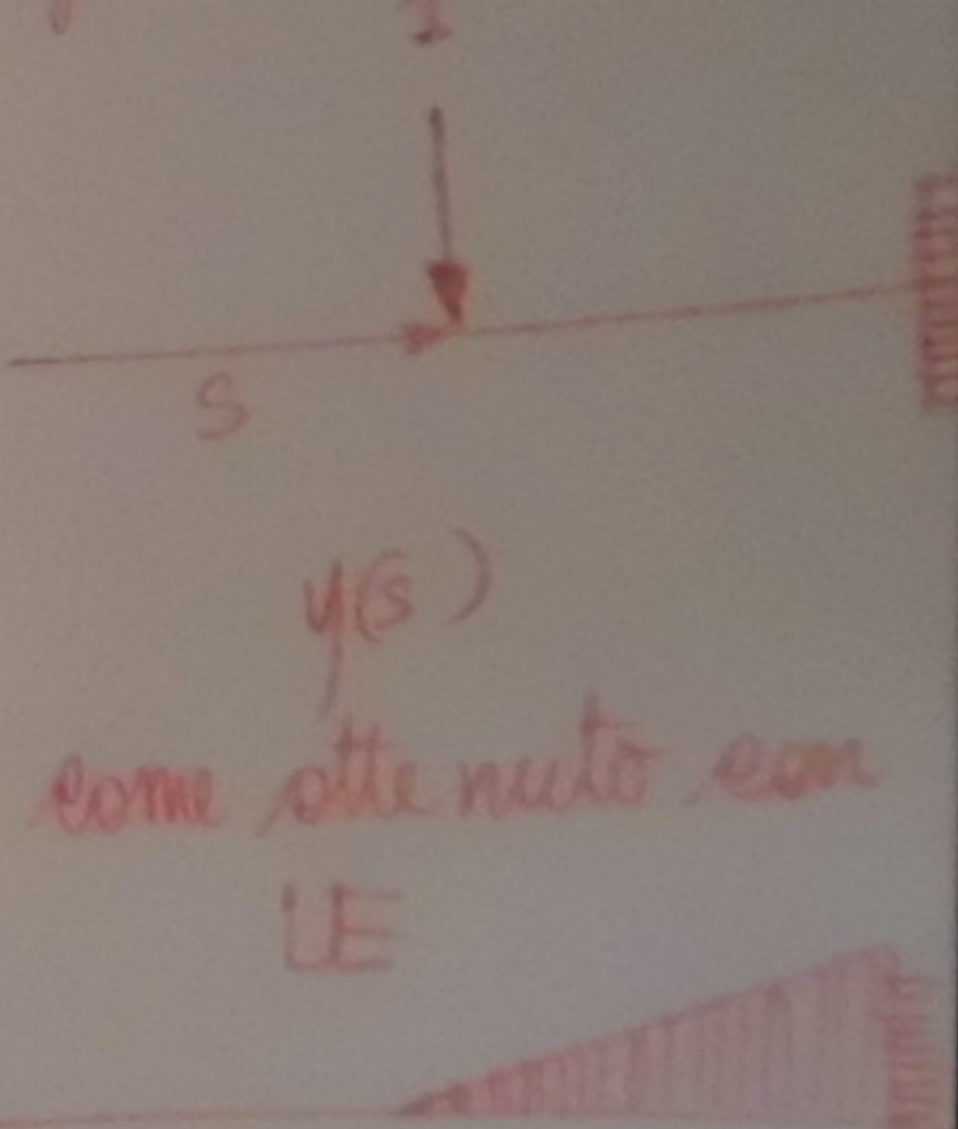


④ 2ª struttura fittizia

$$\text{PLV: } L_c = 1 \cdot \Phi_q = \Phi_q = \int_{AB} M(x) \cdot \delta \theta(x) dx = L_i$$

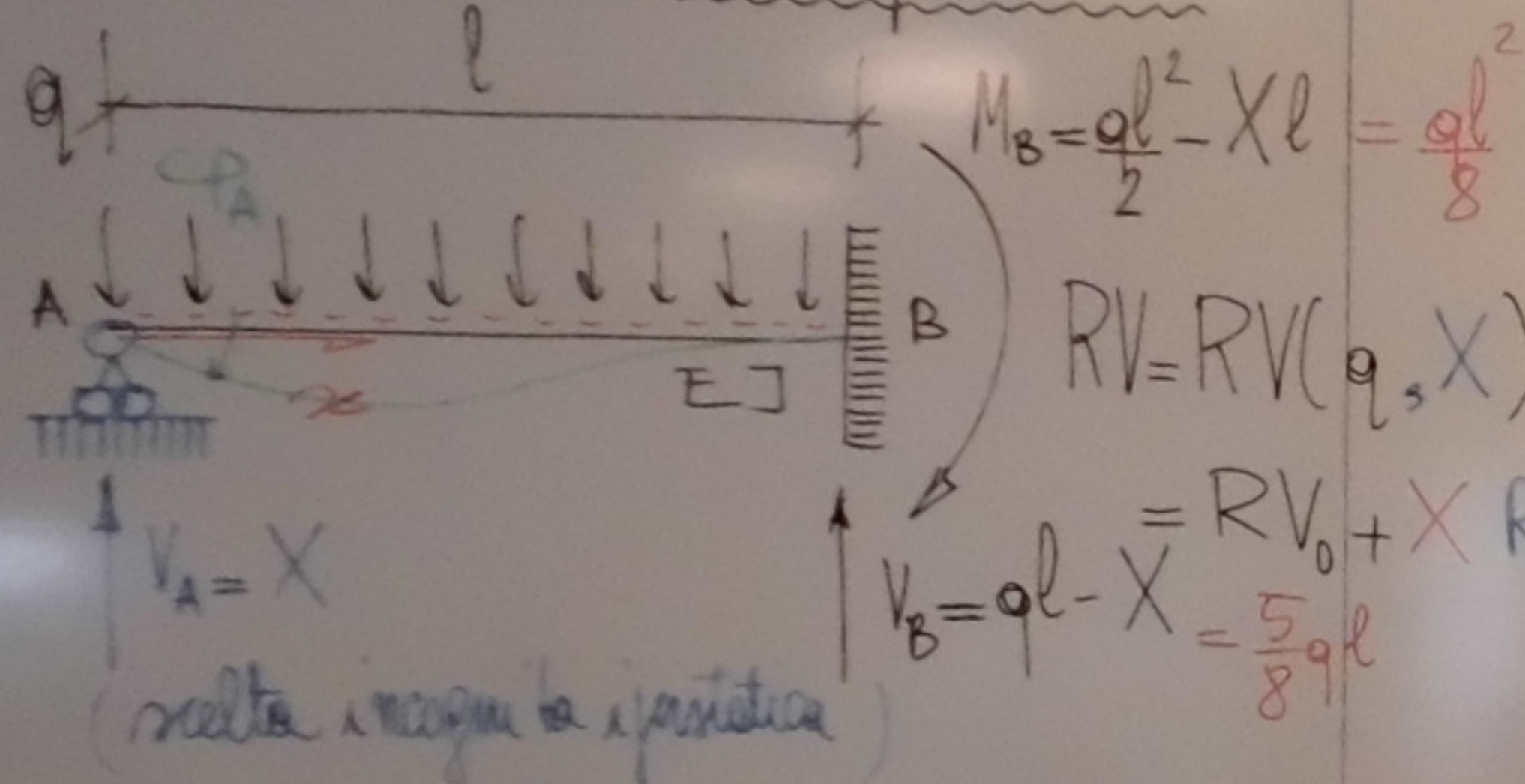
$$\Phi_q = \int_0^l 1 \cdot \frac{qx^2}{2} \frac{dx}{EJ} = \frac{1}{6} \frac{ql^3}{EJ} = \Phi_q$$

generalizzazione



Risoluzione di strutture iperstatiche

- Risoluzione di strutture iperstatiche



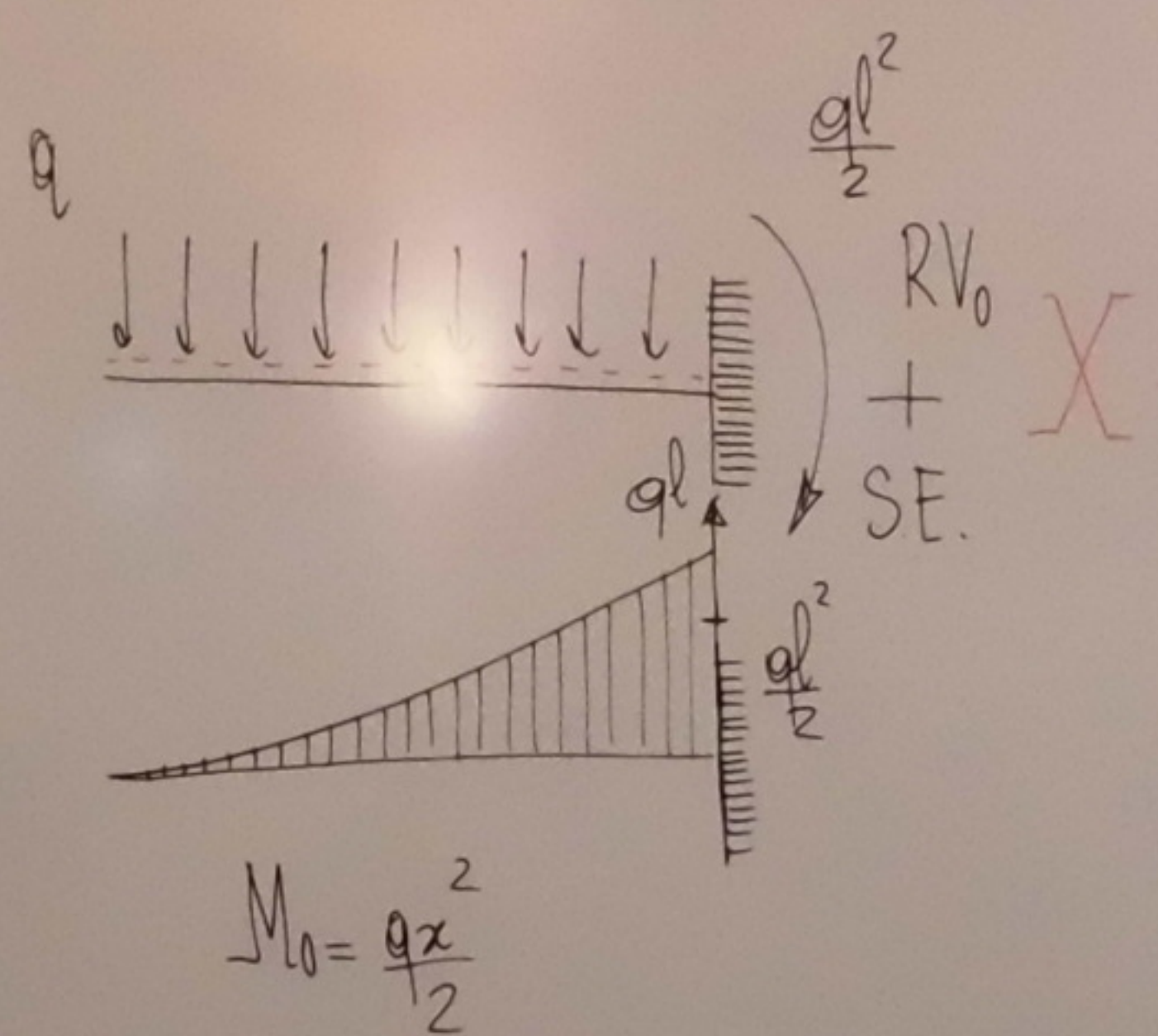
Metodo della Forza

$$v_A = 0$$

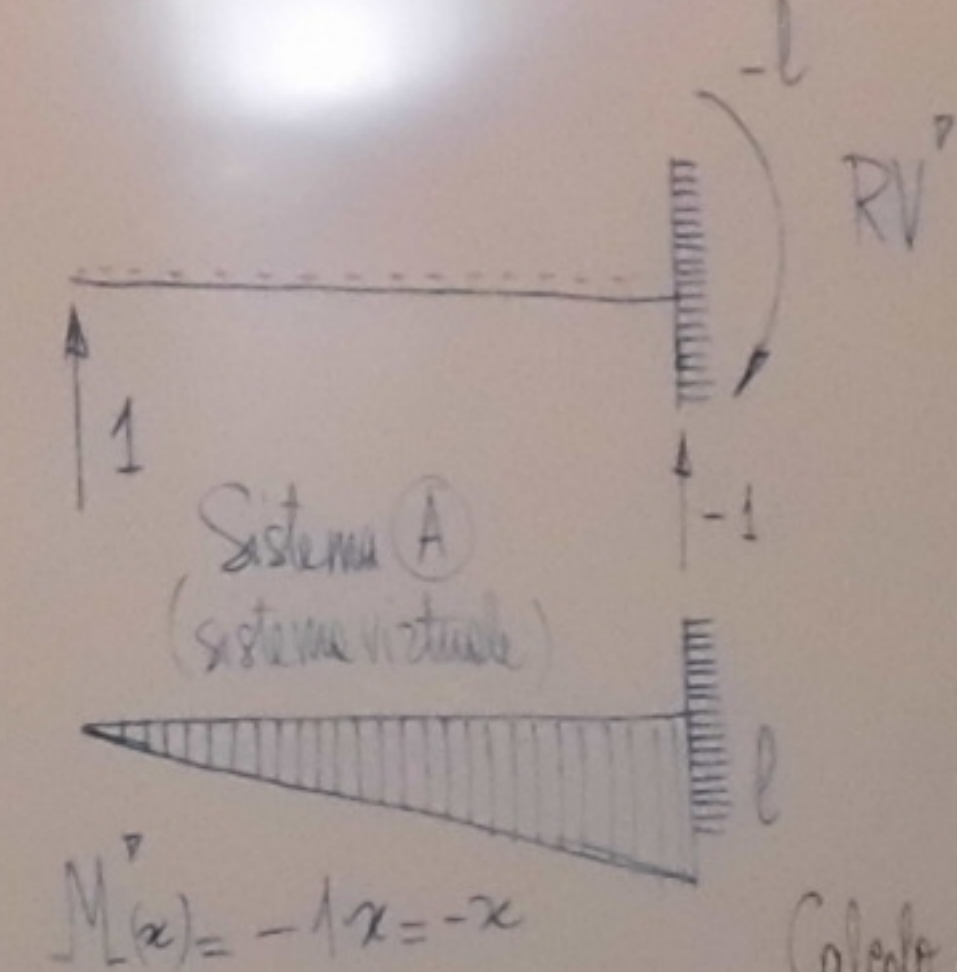
$$M = M_0 + \cancel{\times} M^D$$

$$m_{\text{fate}} = \frac{9x}{2} - X \cdot x$$

Struttura principale isostatica ($X=0$)



Struttura fisica (X=1)



Scrittura del P.V.:

Reschende

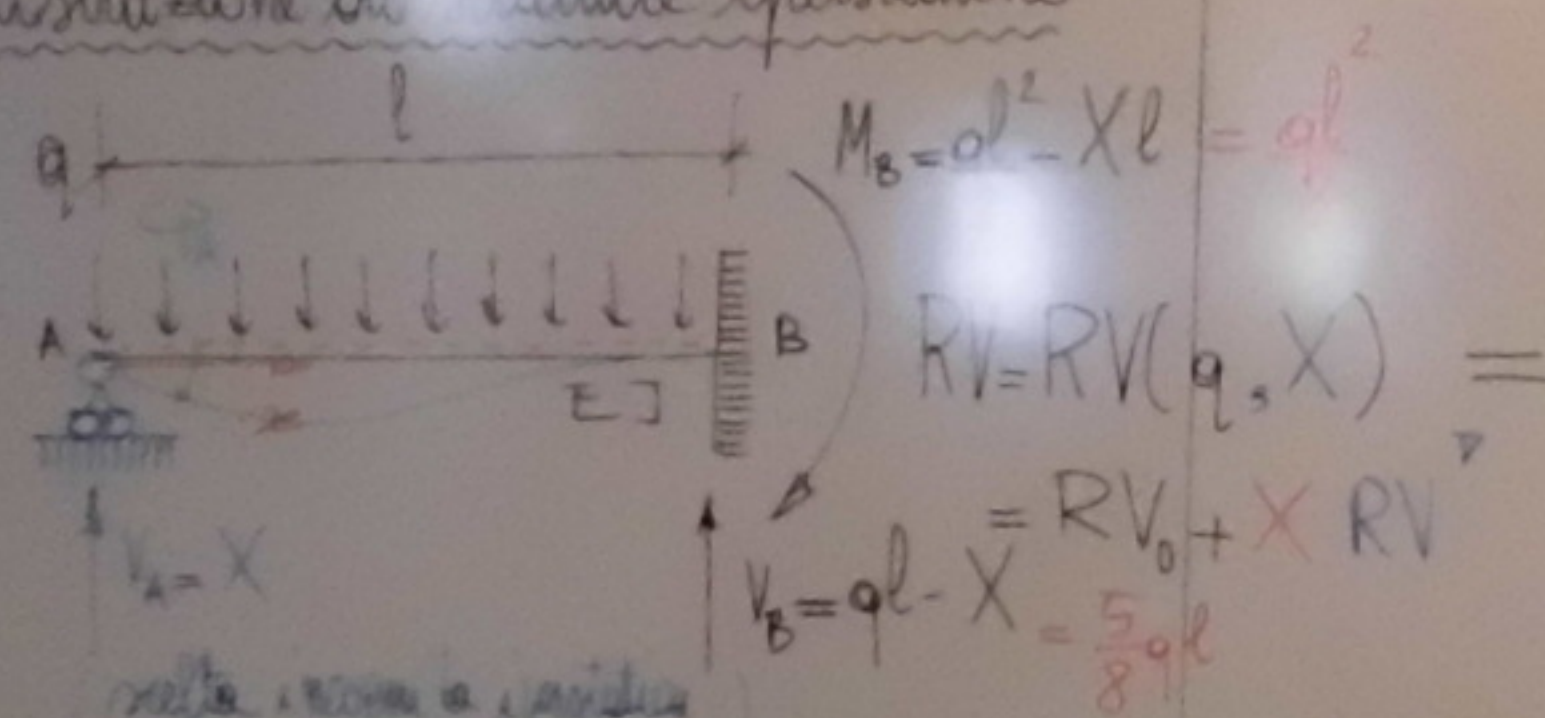
$$X = -$$

Calcolo di P_A (a valle)

$$1 \text{ CQ}_A = \int \frac{N(x)}{1} = \frac{1}{\pi} \int \frac{1}{x^2} dx$$

Principio dei Lavori Virtuali (PLV)

- Risoluzione di strutture iperstatiche

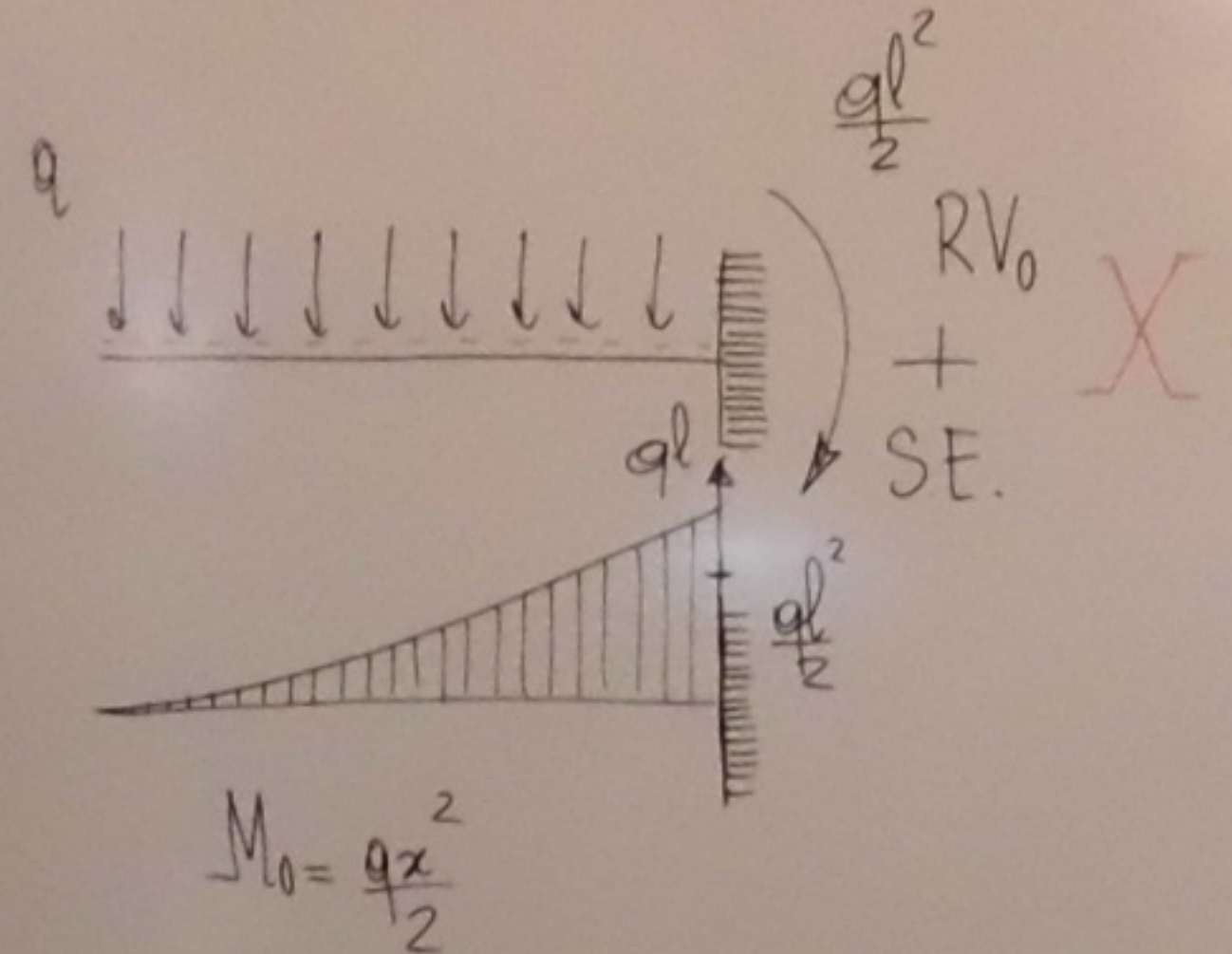


$$M = M_0 + X \cdot M^v$$

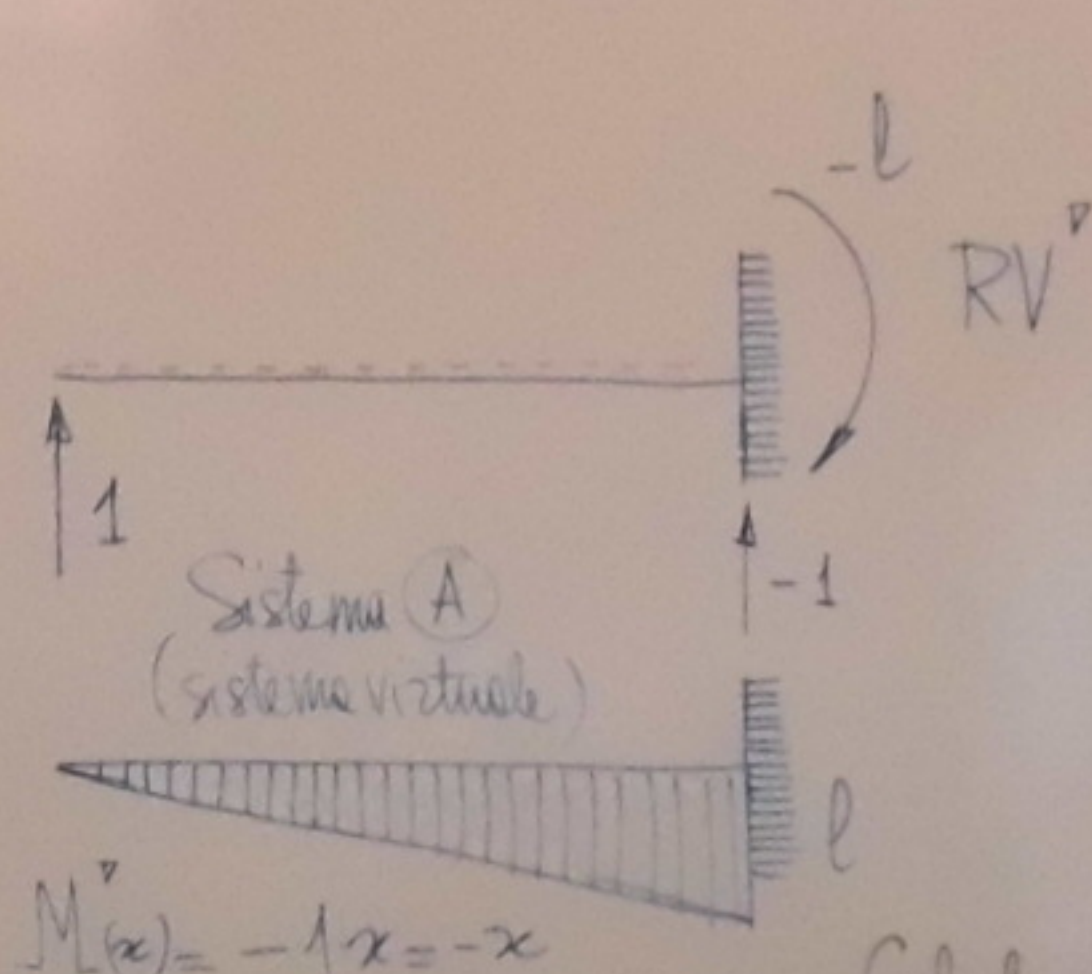
$$M_{fatti} = \frac{q x^2}{2} - X \cdot x$$

$$\delta U = \int \delta M \cdot \delta \theta$$

Struttura principale ipostatica ($X=0$)



Struttura fittizia ($X=1$)



Scrittura del PLV:

$$\delta U = 1 \cdot \delta v_A + \left(-\frac{1}{l} \delta v_B - l \delta v_B \right) = \int_0^l \frac{1}{EJ} \delta v_B dx = \int_0^l \frac{1}{EJ} \delta v_B dx$$

Risolvendo:

$$X = -$$

Calcolo di Φ_A (a valle)

$$1 \Phi_A = \int_0^l \frac{M^v(x)}{EJ} \left(M_0(x) + \frac{q x^2}{2} \right) dx = \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EJ}$$

$$\int_0^l \frac{M^v(x)}{EJ} \delta v_B dx = \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EJ} = \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EJ}$$

Processo dei Lavori Virtuali (PLV)

Analisi di strutture iperstatiche

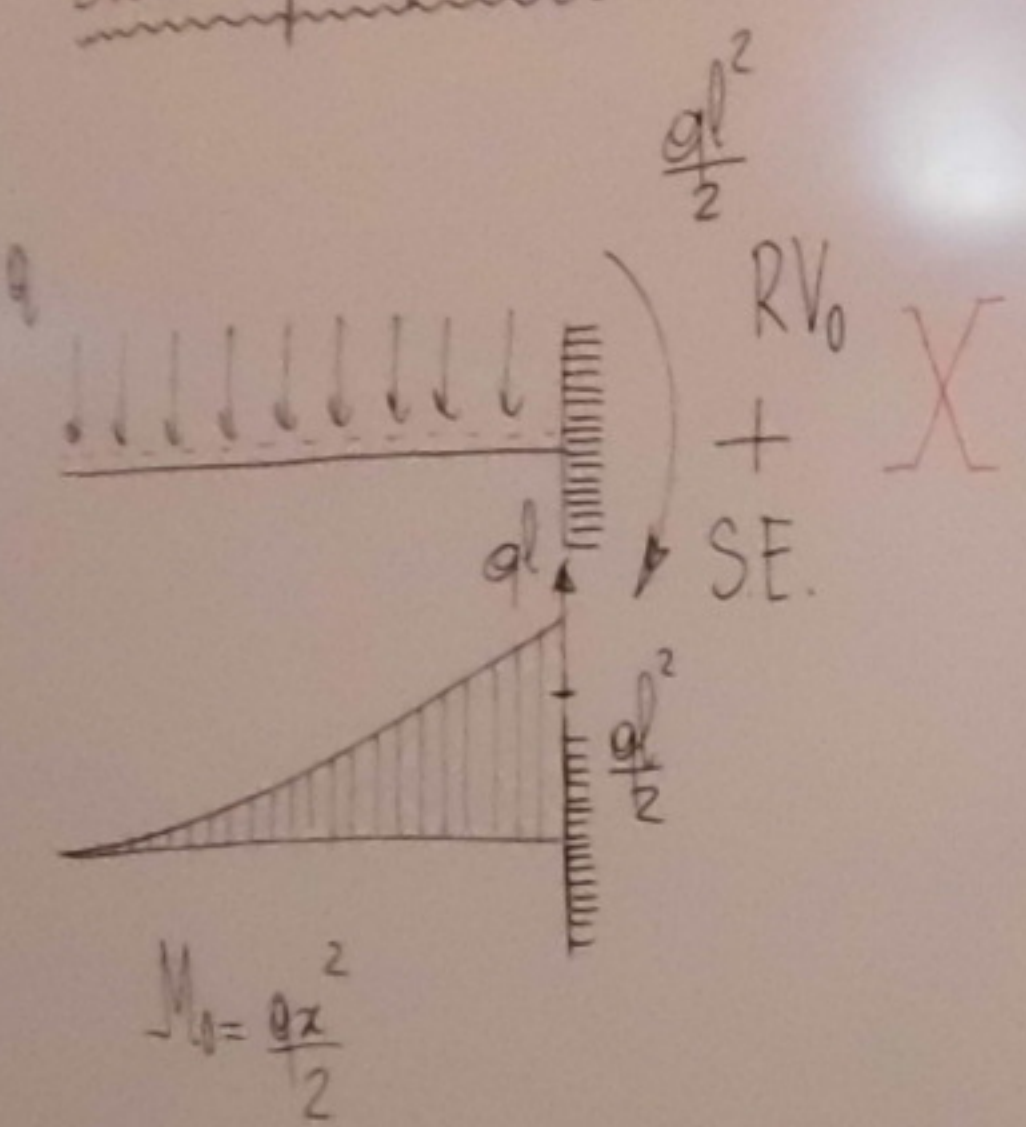
$$M = M_0 + X M^v$$

$$f = f_0 + X f_1$$

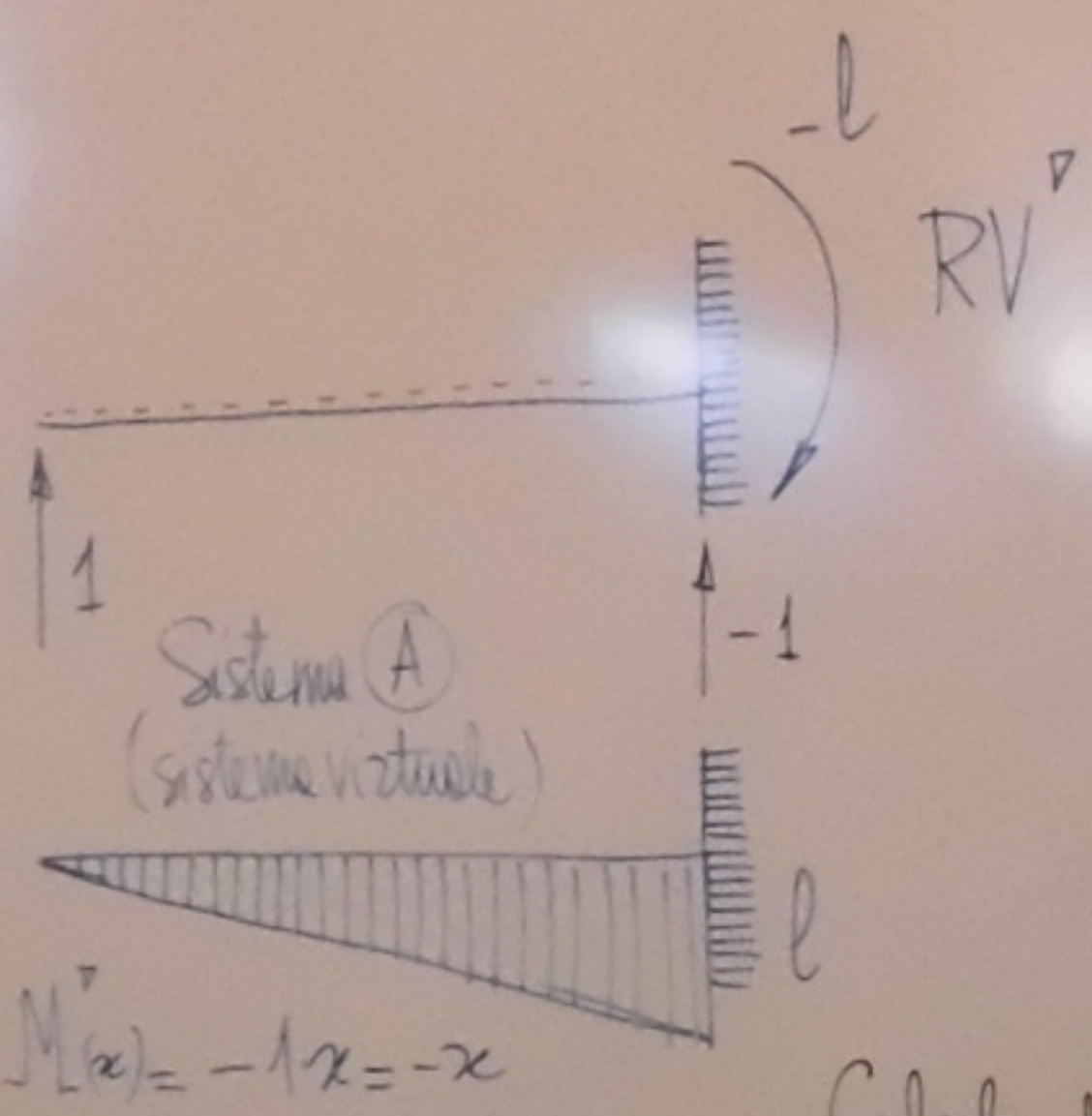
$$M_0 = \frac{q l^2}{2} - X l$$

$$f_0 = \frac{q l^3}{6} - X \frac{l^2}{2}$$

Struttura principale ipostatica (X=0)



Struttura fittizia (X=1)



Scrittura del PLV:

$$\Delta_e = 1 \cdot v_A + \left(-\frac{1}{l} v_B - l f_B \right) = \int_0^l M^v(x) \frac{M_0(x) + X M^v(x)}{EJ} dx$$

$$0 = v_A = \int_0^l M^v(x) \frac{M_0(x)}{EJ} dx + X \int_0^l \frac{M^{v^2}(x)}{EJ} dx$$

Risolvendo:

$$X = - \frac{\int_0^l M^v(x) \cdot M_0(x) \frac{dx}{EJ}}{\int_0^l \frac{M^{v^2}(x)}{EJ} dx}$$

Calcolo di φ_A (a valle)

$$1 \varphi_A = \int_0^l \frac{M^v(x)}{1} \left(M_0(x) + \frac{3}{8} q l \frac{M^v(x)}{3} \right) \frac{dx}{EJ}$$

$$= \frac{1}{48} \frac{q l^3}{EJ}$$

Vincoli non originali

$$\int_0^l M^v(x) \frac{M(x)}{EJ} dx = \int_0^l \frac{M^{v^2}(x)}{EJ} dx$$

$$0 = \int_0^l \frac{M^v(x) M_0(x)}{EJ} dx + X \int_0^l \frac{M^{v^2}(x)}{EJ} dx$$

$$X = - \frac{\int_0^l M^v(x) \cdot M_0(x) \frac{dx}{EJ}}{\int_0^l \frac{M^{v^2}(x)}{EJ} dx} = \frac{f_0}{f_1} = \frac{\frac{1}{8} \frac{q l^4}{EJ}}{\frac{1}{3} \frac{l^3}{EJ}} = \frac{3}{8} q l X$$