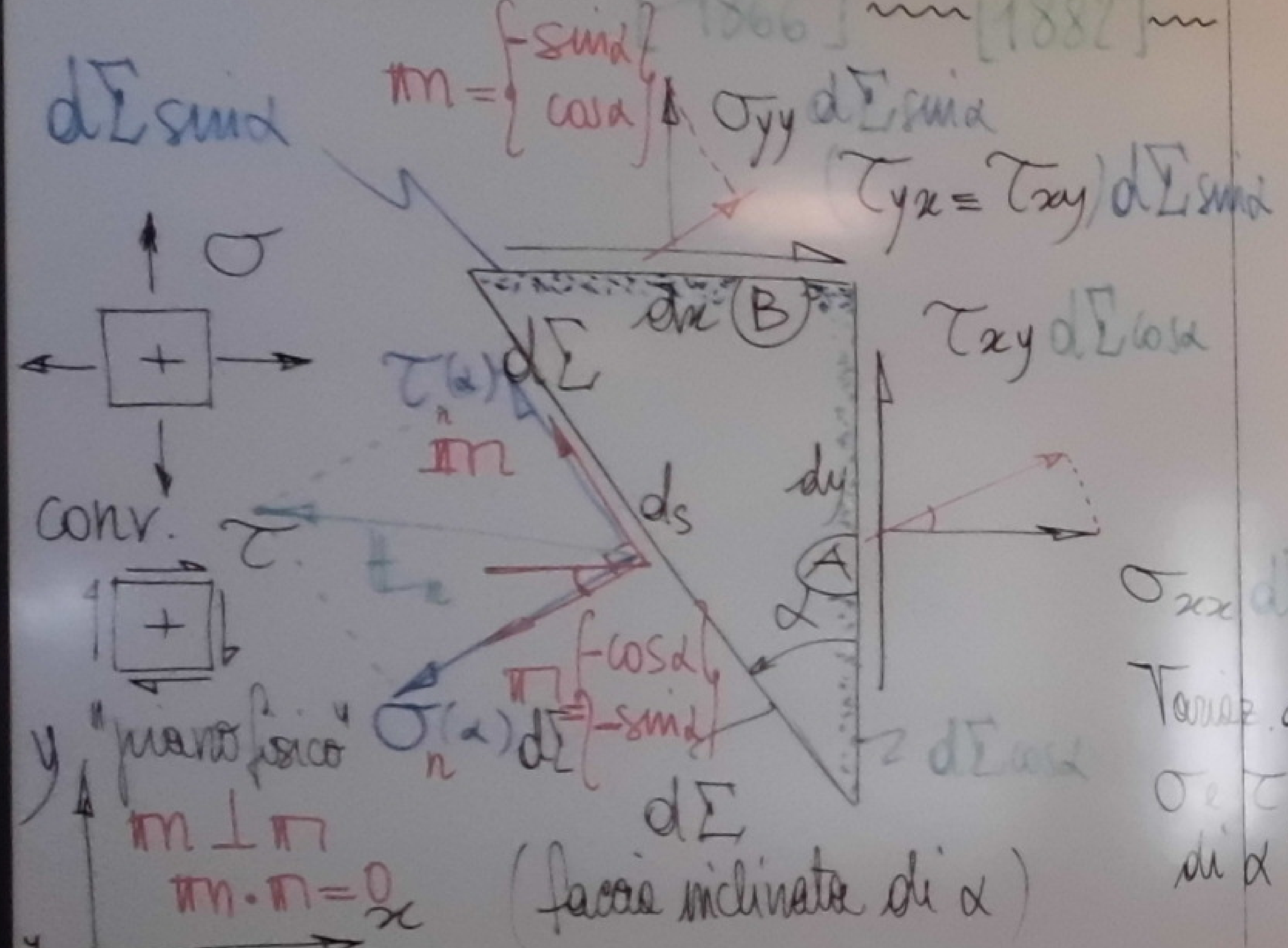
# Cerchio di (Culmann) - MOHR

[1866] [1882]




Variaz. delle comp.ti σ e τ al variare di α?

- Stato di sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$; $z \equiv III \Rightarrow \sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} \equiv 0$)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

element. 3D $d\Sigma$ $dz$ $\quad d\Sigma = ds\, dz$

Equil. alla traslaz. (v. relazione di Cauchy), in sede indefinita $\forall d\Sigma$

$$\begin{cases} n: \ \sigma(\alpha)\cancel{d\Sigma} = \sigma_{xx}\cancel{d\Sigma}\cos\alpha\cos\alpha + \sigma_{yy}\cancel{d\Sigma}\sin\alpha\sin\alpha + \tau_{xy}\cancel{d\Sigma}\cos\alpha\sin\alpha + \tau_{xy}\cancel{d\Sigma}\sin\alpha\cos\alpha \\ m: \ \tau(\alpha)\cancel{d\Sigma} = \sigma_{xx}\cancel{d\Sigma}\cos\alpha\sin\alpha - \sigma_{yy}\cancel{d\Sigma}\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}\cancel{d\Sigma}\cos\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\cancel{d\Sigma}\sin\alpha\sin\alpha \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(\alpha) = \sigma_{xx}\underbrace{\cos^2\alpha}_{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} + \sigma_{yy}\underbrace{\sin^2\alpha}_{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} + \tau_{xy}\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} \\ \tau(\alpha) = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} - \tau_{xy}\underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} \end{cases}$$

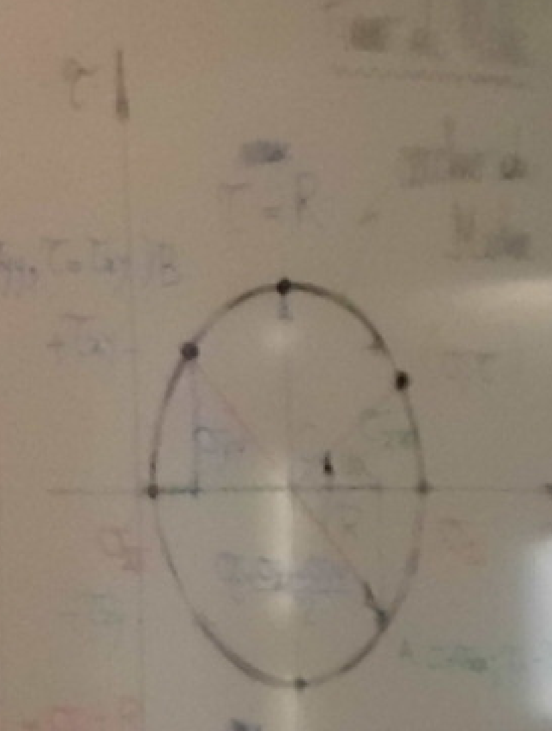
$$\begin{cases} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \\ -1 + 2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma(2\alpha) = \underbrace{\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}}_{\sigma_C} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

Relazioni (da equil.) che definiscono la variazione delle comp.ti σ, τ in f.ne di 2α

- Tali relazioni esprimono l'eq.ne parametrica di una circonferenza, nel piano (σ, τ), detto piano di Mohr, avente:
  - Centro $C = \left(\sigma_C = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$
  - Raggio $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
- Infatti:

$(\sigma - \sigma_C)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 \ldots$




Cerchio di (Culmann)-MOHR
[1866] [1882]
Equil. alla traslaz. (v. relazione di Cauchy), in sede indefinita $\forall\, d\Sigma$
$n:\ \sigma(\alpha)\,d\Sigma = \sigma_{xx}\,d\Sigma\cos\alpha\cos\alpha + \sigma_{yy}\,d\Sigma\sin\alpha\sin\alpha + \tau_{xy}\,d\Sigma\cos\alpha\sin\alpha + \tau_{xy}\,d\Sigma\sin\alpha\cos\alpha$
$m:\ \tau(\alpha)\,d\Sigma = \sigma_{xx}\,d\Sigma\cos\alpha\sin\alpha - \sigma_{yy}\,d\Sigma\sin\alpha\cos\alpha - \tau_{xy}\,d\Sigma\cos\alpha\cos\alpha + \tau_{xy}\,d\Sigma\sin\alpha\sin\alpha$
$\sigma(\alpha) = \sigma_{xx}\underbrace{\cos^2\alpha}_{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} + \sigma_{yy}\underbrace{\sin^2\alpha}_{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} + \tau_{xy}\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}$
$\tau(\alpha) = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} - \tau_{xy}\underbrace{(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha}$
$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$
$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$
$= -1+2\cos^2\alpha \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$
$\sigma(2\alpha) = \underbrace{\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}}_{\sigma_c} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha$
$\tau(2\alpha) = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha$
Relazioni (da equil.) che definiscono la variazione delle comp.ti σ, τ in f.ne di 2α
Tensioni delle comp.ti σ, τ al variare di α?
Stato di sforzo piano
$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
$d\Sigma = ds\,dz$
• Tali relazioni esprimono l'eq.ne parametrica di una circonferenza, nel piano (σ, τ), detto piano di Mohr, avente:
- Centro $C = \left(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$
- Raggio $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
• Infatti:
$(\sigma-\sigma_c)^2 + \tau^2 = \ldots = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$
Piano di Mohr
cerchio di Mohr
$\tau^{max} = R$
$\tau^{min} = -R$
$(\sigma, \tau)$
$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Piano di Mohr
cerchio di Mohr
$\tau^{max} = R$
$\tau^{min} = -R$
$(\sigma = \sigma_{yy}, \tau = \tau_{xy})$ B
$(\sigma, \tau)$
A $(\sigma = \sigma_{xx}; \tau = -\tau_{xy})$
$\sigma_I$
$\sigma_{II}$
$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$
$R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
• Tali relazioni esprimono l'eq.ne parametrica di una circonferenza, nel piano $(\sigma, \tau)$, detto piano di Mohr, avente: $(x-x_c)^2+(y-y_c)^2=R^2$
– Centro $C = \left(\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$
– Raggio $R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
tens. princ. $\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R$
• Infatti:
$(\sigma-\sigma_c)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$

# Commenti

- Rotazioni $\alpha$ nel piano fisico corrispondono a rotazioni $2\alpha$ (angolo al centro) nel piano di Mohr
- Le componenti $\sigma, \tau$ su facce mutuamente perpendicolari (come le A e B) $\alpha = 90^\circ$ sono rappresentate da p.ti diametralmente opposti sul cerchio di Mohr
- Le tensioni principali nel piano sono facilmente individuate dall' $\cap$ del CM con l'asse $\tau = 0$ e rappr. il max e min valore di $\sigma$ al variare di tutte le giaciture nel piano e sono agevolmente espresse da

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Analogamente si individua la

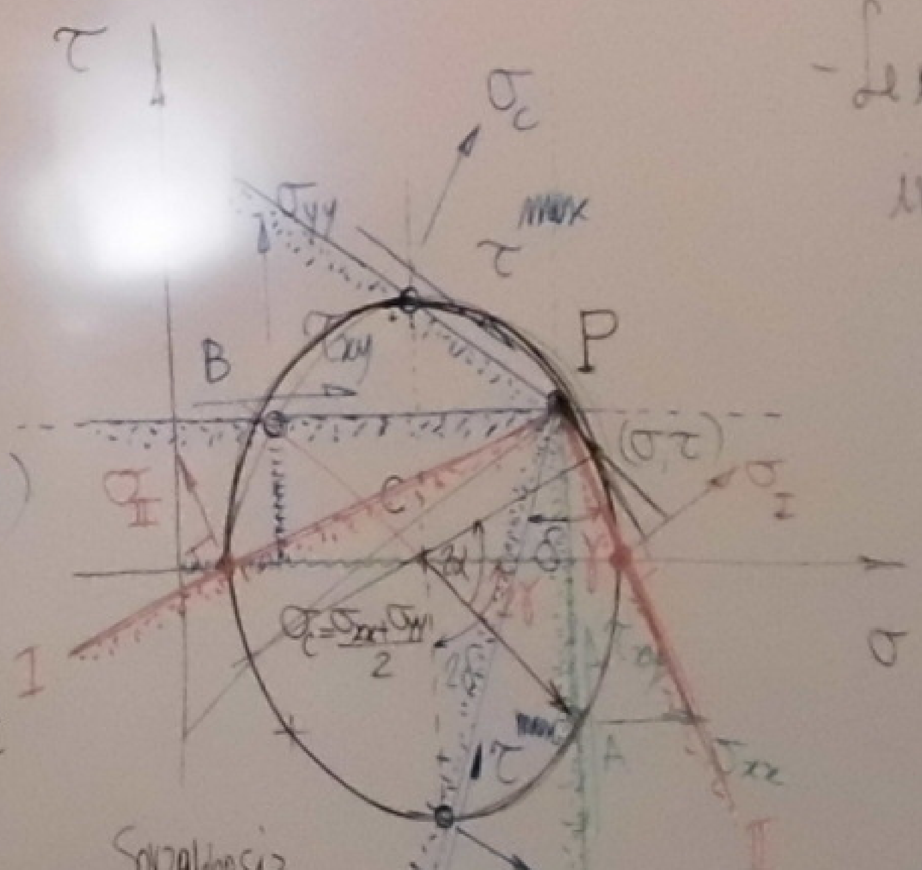
$$\tau^{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

che si accompagna a tensione normale

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$$

faccia B // (orizzontale)

- È possibile "sovrapporre" in un'unica rappresentaz. grafica il piano fisico (elementini) e il piano di Mohr (cerchio di Mohr che rappresenta le comp.ti $\sigma, \tau$) tramite il cosiddetto Polo del Cerchio di Mohr, avente la seguente proprietà: tracciando la retta tra il p.to $(\sigma, \tau)$ del CM ed il polo P si ottiene la giacitura della faccia sulla quale insistono le comp. $\sigma, \tau$

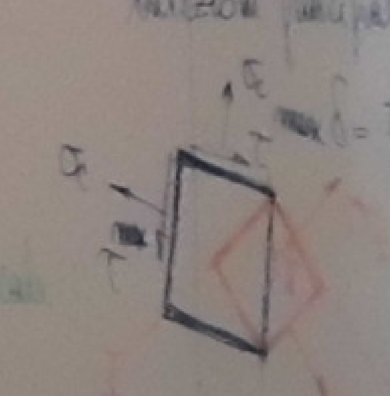



Sovrapposiz. del piano fisico sul piano di Mohr

- Le direzioni principali sono facilmente individuate, per esempio $\gamma$ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}\arctan\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

- Le direzioni associate ai valori $\tau^{max}$ (insieme a $\sigma_c$) risultano a [illegible] rispetto alle direzioni principali



Commenti

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni 2α (angolo al centro) nel piano di Mohr
- Le componenti σ, τ su facce ortogonalmente perpendicolari come la A e B (α = 90) sono rappresentate da p.ti diametralmente opposti nel cerchio di Mohr
- Le tensioni principali nel piano sono facilmente individuate dall'∩ del CM con l'asse τ = 0 e rapp. il max e min valore di σ al variare di tutte le giaciture nel piano e sono espresse da

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

- Analogamente si individua la

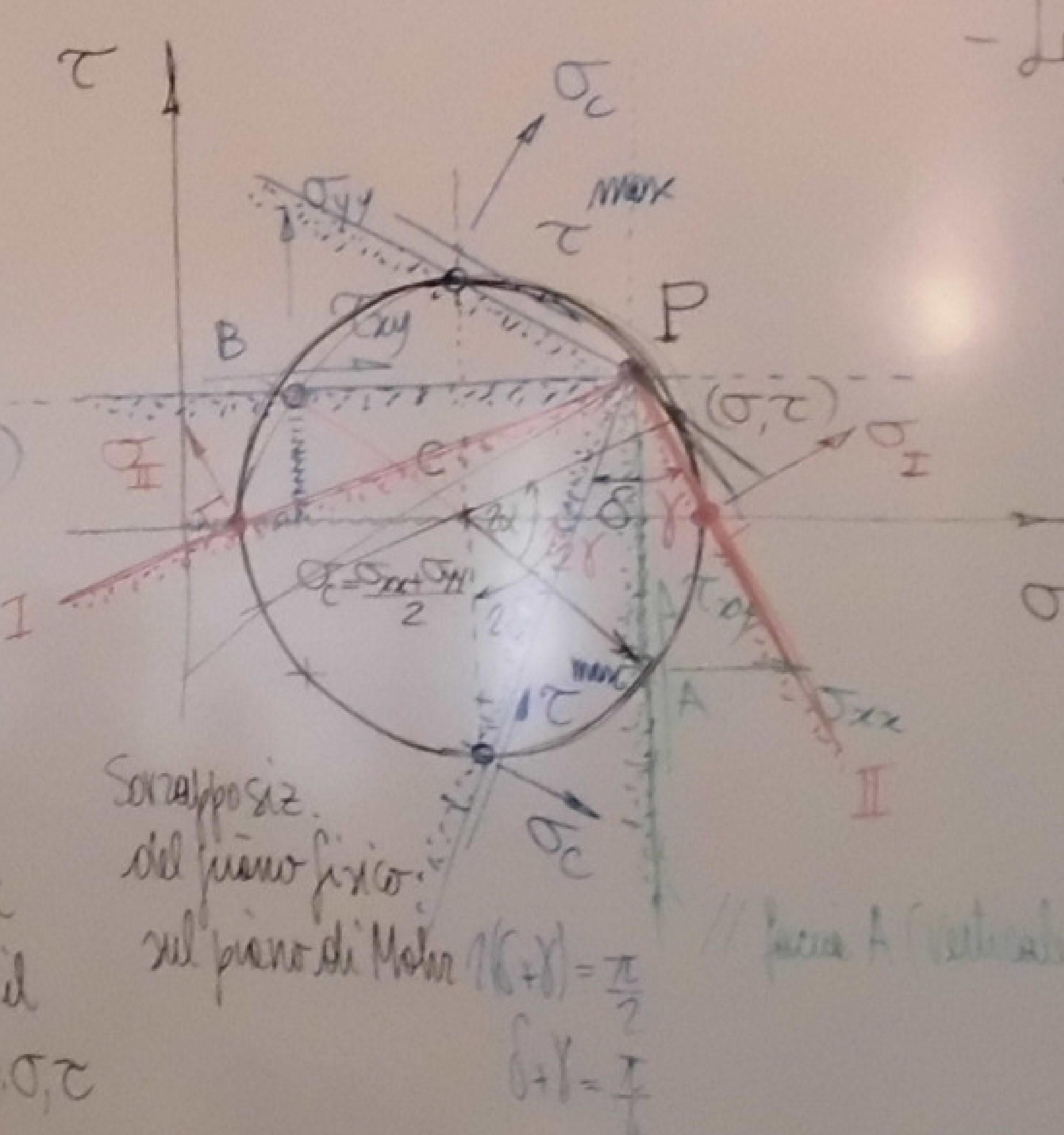
$$\tau^{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

che si accompagna a tensione normale

$$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$$

- È possibile "sovrapporre" in un'unica rappresentaz. grafica il piano fisico (elementini) e il piano di Mohr (cerchio di Mohr che rappresenta le comp.ti σ, τ) tramite il cosiddetto Polo del Cerchio di Mohr, avente la seguente proprietà: tracciando la retta tra il p.to (σ, τ) del CM ed il polo P si ottiene la giacitura della faccia sulla quale insistono le comp. σ, τ

faccia B // (orizzontale)




Sovrapposiz. del piano fisico sul piano di Mohr $2(\delta+\gamma) = \frac{\pi}{2}$

$\delta + \gamma = \frac{\pi}{4}$

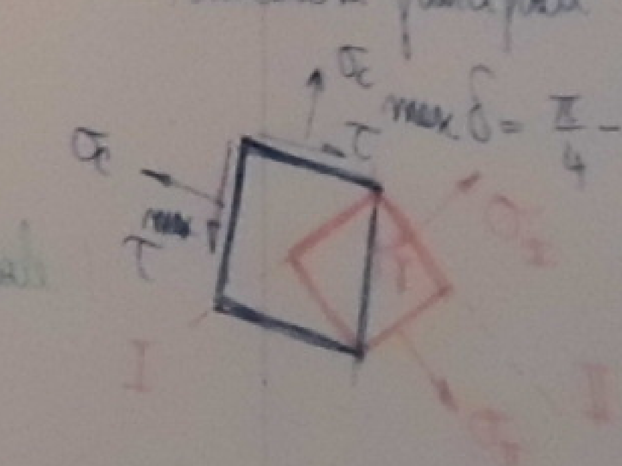
// faccia A (verticale)

- Le direzioni principali sono prontamente individuate, per rotare γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{atan}\,\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

- Le direzioni secondo cui agisce la $\tau^{max}$ (insieme a $\sigma_c$) risultano a 45° rispetto alle direzioni principali

$\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$



Analogamente si individua la
$\tau^{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$
che si accompagna a tensione normale
$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$
– È possibile sovrapporre in un'unica rappresentaz.
grafica il piano fisico (elementino) e il piano di Mohr
faccia B // (orizzontale)
$\tau$
$\sigma$
$\sigma_c$
$\tau^{max}$
$\sigma_{yy}$
$\sigma_{xx}$
B
C
P
A
$(\sigma, \tau)$
$\sigma_I$
$\sigma_{II}$
I
II
$\delta$
$\gamma$
$\sigma_c = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}$
Sovrapposiz. del piano fisico sul piano di Mohr
$2(\delta+\gamma) = \frac{\pi}{2}$
$\delta+\gamma = \frac{\pi}{4}$
// faccia A (verticale)
– Le direzioni principali sono prontamente
individuate, per rotaz. $\gamma$ tale che:
$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} \operatorname{atan} \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$
– Le direzioni secondo cui agisce la $\tau^{max}$
(insieme a $\sigma_c$) risultano a 45° rispetto alle
direzioni principali:
$\sigma_c$
$\tau^{max}$
$\delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$
$\sigma_I$
$\sigma_{II}$
$\gamma$
I
II