Risposta volumetrica/deviatorica

– Componenti volumetrica e deviatorica di ε, σ:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_V + \varepsilon_D = \frac{tr\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} + e = \frac{v}{3}\,\mathbb{I} + e \\ \sigma = \sigma_V + \sigma_D = \frac{tr\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} + s = p\,\mathbb{I} + s \end{cases}$$

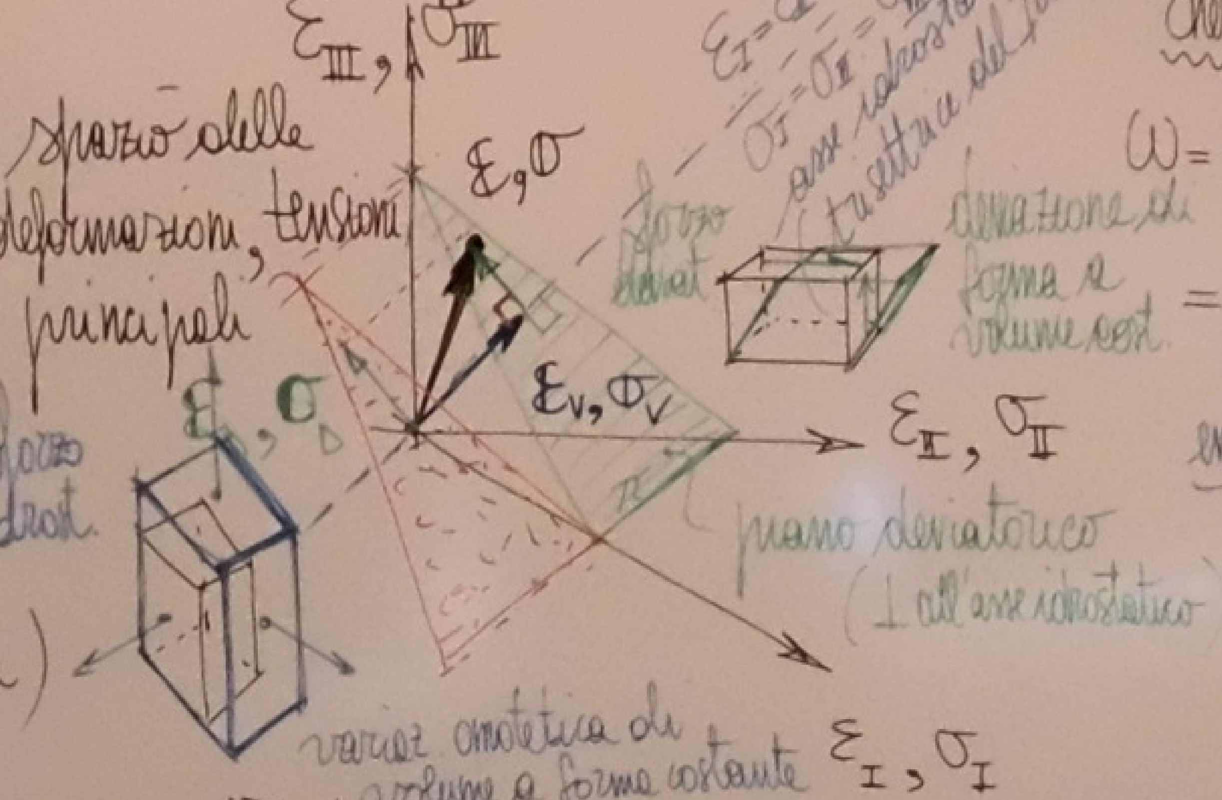
idrostatica, sferica, isotropa — deviatorica (a traccia nulla)

Alias,
$$\begin{cases} e \triangleq \varepsilon - \frac{tr\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} = \varepsilon - \frac{v}{3}\,\mathbb{I} & \text{deviatore di deformazione} \\ s \triangleq \sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} = \sigma - p\,\mathbb{I} & \text{deviatore di sforzo} \end{cases}$$

Per definizione: $tr\,e = tr\,\varepsilon - \frac{tr\,\varepsilon}{3}\underbrace{tr\,\mathbb{I}}_{3} \equiv 0$, idem per $tr\,s$

Invarianti:
$$\begin{cases} J_1' = tr\,e = 0 \\ J_2' = \frac{1}{2} tr\,e^2 = \frac{1}{2} e:e = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij} \\ J_3' = \frac{1}{3} tr\,e^3 \end{cases} ; \quad \begin{cases} J_1 = tr\,s = 0 \\ J_2 = \frac{1}{2} tr\,s^2 = \frac{1}{2} s:s = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} \\ J_3 = \frac{1}{3} tr\,s^3 \end{cases}$$

– Significato e rappresentazione



N.B. Le componenti volumetrica e deviatorica risultano mutuamente ortogonali:

$$\varepsilon_V : \varepsilon_D = \frac{tr\,\varepsilon}{3}\,\underbrace{\mathbb{I} : \varepsilon_D}_{\delta_{ij}\varepsilon_{D_{ij}} = \varepsilon_{D_{ii}} = tr\,\varepsilon_D \equiv 0} = 0$$

idem per σ

$$\sigma_V : \sigma_D \equiv 0$$

$$(\ )_V : (\ )_D \equiv 0 \ (*)$$

Energia elastica:

$$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_V + \sigma_D) : (\varepsilon_V + \varepsilon_D)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_V : \varepsilon_V}_{\text{en. volumetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D}_{\text{en. deviatorica}} + 0 + 0$$

$$\omega_V = \frac{1}{2} p v, \quad \omega_D = \frac{1}{2} s : e$$

$$\frac{1}{2} K v^2 \quad \frac{1}{2}\frac{1}{K} p^2 \quad \frac{1}{2} 2G\, e:e = 2G J_2' \quad \frac{1}{2} s : \frac{s}{2G} = \frac{J_2}{2G}$$

– In generale, per la legge costitutiva:

$$\begin{cases} \varepsilon_V = \varepsilon_V(\sigma_V, \cancel{\sigma_D}) \\ \varepsilon_D = \varepsilon_D(\cancel{\sigma_V}, \sigma_D) \end{cases} \rightarrow \text{disaccoppiamento per materiale isotropo}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{E} tr\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma}$$

– Risposta volumetrica

- $v = tr\,\varepsilon = \frac{1}{K}\,p$ con $K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$
  $p = \frac{tr\,\sigma}{3}$ tensione media
- $p = K v$ $= \frac{3(1-2\nu)}{E}\frac{tr\,\sigma}{3}$

– Risposta deviatorica

- $e \triangleq \varepsilon - \frac{tr\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} = -\frac{\nu}{E} tr\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$
  $= \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\frac{\mathbb{I}}{E}(3\nu + 1 - 2\nu)$
  $= \frac{1+\nu}{E}\left(\sigma - \frac{tr\,\sigma}{3}\,\mathbb{I}\right)$
- $e = \frac{s}{2G} = \frac{1}{2G}\,s$
- $s = 2G\,e$

Risposta volumetrica/deviatorica

- Componenti volumetrica e deviatorica di ε, σ:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_v + \varepsilon_D = \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} + e = \frac{v}{3}\,\mathbb{I} + e \\ \sigma = \sigma_v + \sigma_D = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} + s = p\,\mathbb{I} + s \end{cases}$$

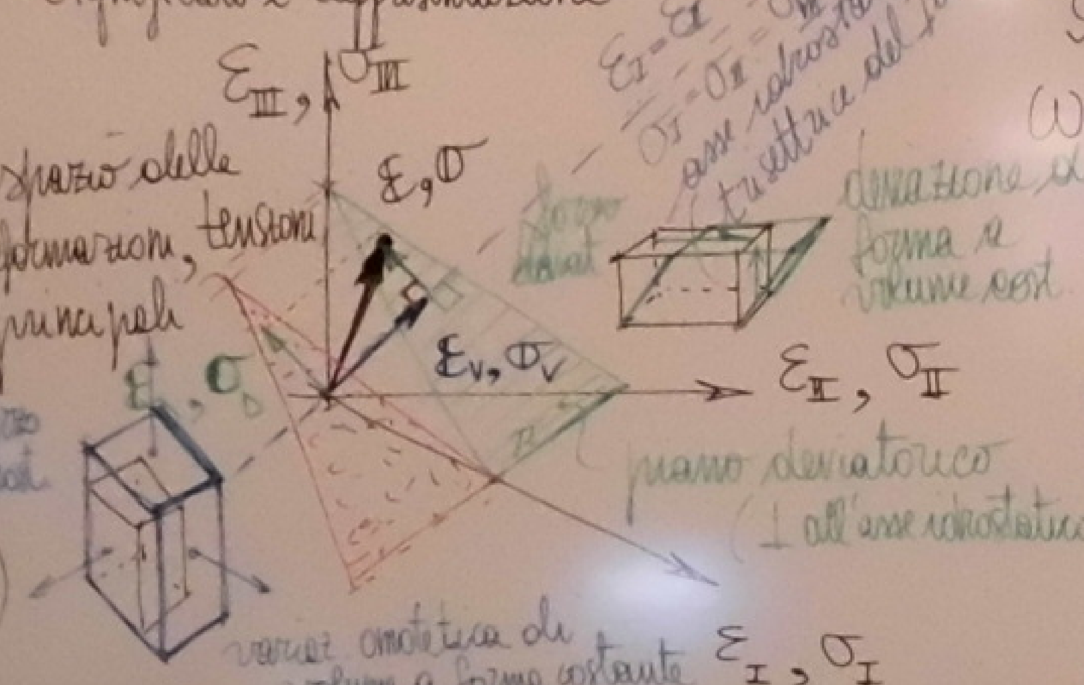
idrostatica, sferica, isotropa — deviatorica (a traccia nulla)

Alias,
$$\begin{cases} e \triangleq \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} = \varepsilon - \frac{v}{3}\,\mathbb{I} \\ s \triangleq \sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I} = \sigma - p\,\mathbb{I} \end{cases}$$

Per definizione $\mathrm{tr}\, e = \mathrm{tr}\,\varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathrm{tr}\,\mathbb{I} \equiv 0$, idem per $\mathrm{tr}\, s$

Invarianti:

- Significato e rappresentazione



NB. Le componenti volumetrica e deviatorica risultano mutuamente ortogonali:

$$\varepsilon_v : \varepsilon_D = \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} : \varepsilon_D = 0$$

$$\delta_{ij}\,\varepsilon_{D_{ij}} = \varepsilon_{D_{ii}} = \mathrm{tr}\,\varepsilon_D \equiv 0$$

idem per σ

$$\sigma_v : \sigma_D \equiv 0$$

$$(\ )_v : (\ )_D \equiv 0 \ (*)$$

Energia elastica:

$$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_v + \sigma_D) : (\varepsilon_v + \varepsilon_D)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_v : \varepsilon_v}_{\text{en volumetrica}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D}_{\text{en deviatorica}} + 0 + 0$$

$$\omega_v = \frac{1}{2}p v, \quad \omega_D = \frac{1}{2} s : e$$

$$\frac{1}{2}K v^2 \qquad \frac{1}{2}\frac{1}{K}p^2 \qquad \frac{1}{2}\,2G\, e : e \qquad \frac{1}{2} s : \frac{s}{2G}$$

- In generale, per la legge costitutiva:

$$\begin{cases} \varepsilon_v = \varepsilon_v(\sigma_v, \cancel{\sigma_D}) \\ \varepsilon_D = \varepsilon_D(\cancel{\sigma_v}, \sigma_D) \end{cases} \Rightarrow \text{disaccoppiamento per materiale isotropo}$$

$$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma}$$

- Risposta volumetrica

- $v = \mathrm{tr}\,\varepsilon = \frac{1}{K}\,p$ con $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$; $p = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$ tensione media; $= \frac{3(1-2\nu)}{E}\,\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$
- $p = K v$

rigidezza volumetrica
Modulo di volume
$K \to \infty$, $\nu \to 1/2$
materiale incomprimibile

- Risposta deviatorica

- $e \triangleq \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3}\,\mathbb{I} = -\frac{\nu}{E}\,\mathrm{tr}\,\sigma\,\mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\,\sigma - \frac{1}{3}\frac{1}{K}\,p\,\mathbb{I}$

$$= \frac{1+\nu}{E}\,\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\frac{\mathbb{I}}{E}\underbrace{(3\nu + 1 - 2\nu)}_{1+\nu}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\underbrace{\left(\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\,\mathbb{I}\right)}_{s} \quad \text{con } G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0 \text{ di taglio}$$

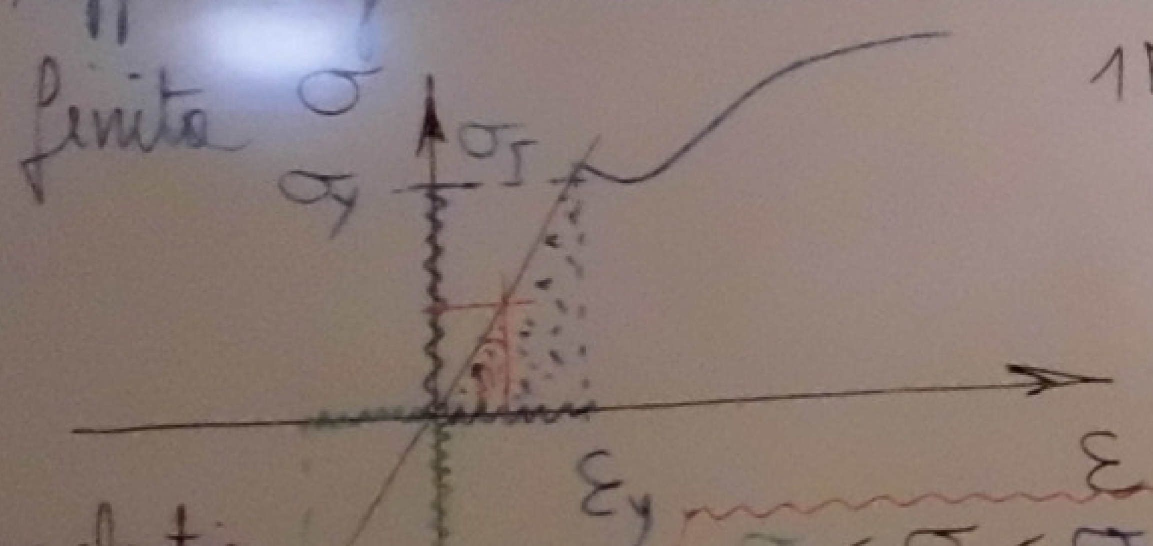
- $e = \frac{s}{2G} = \frac{1}{2G}\,s$
- $s = 2G\,e$

Energia elastica:
$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon = \frac{1}{2}(\sigma_v + \sigma_D) : (\varepsilon_v + \varepsilon_D)$
$= \frac{1}{2}\sigma_v : \varepsilon_v + \frac{1}{2}\sigma_D : \varepsilon_D + 0 + 0$
in volumetrica
in deviatorica
$\omega_v = \frac{1}{2} p v$, $\omega_D = \frac{1}{2} s : e$
$\frac{1}{2} K v^2$
$\frac{1}{2}\frac{1}{K} p^2$
$\frac{1}{2}\frac{s : s}{2G}$
$\frac{J_2}{2G}$
– In generale, per la legge costitutiva:
$\varepsilon_v = \varepsilon_v(\sigma_v, \cancel{\sigma_D})$
$\varepsilon_D = \varepsilon_D(\cancel{\sigma_v}, \sigma_D)$
=> disaccoppiamento per materiali isotropi
$\boxed{\varepsilon = -\frac{\nu}{E} \mathrm{tr}\,\sigma\, I + \frac{1+\nu}{E}\sigma}$
NB le componenti volumetrica e deviatorica risultano mutuamente ortogonali:
$\varepsilon_v : \varepsilon_D = \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3} I : \varepsilon_D = 0$
$\delta_{ij}\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ii} = \mathrm{tr}\,\varepsilon = 0$
– Risposta volumetrica
$v = \mathrm{tr}\,\varepsilon = \frac{1}{K} p$ = con $K = \frac{E}{3(1-2\nu)} > 0$
$p = \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$ tensione media
$= \frac{3(1-2\nu)}{E}\frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}$
$p = K v$
– Risposta deviatorica
$e \triangleq \varepsilon - \frac{\mathrm{tr}\,\varepsilon}{3} I = -\frac{\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma\, I + \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{1}{3}\frac{1}{K} p\, I$
$\frac{1-2\nu}{E}\mathrm{tr}\,\sigma$
$= \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3}\frac{I}{E}(3\nu + 1 - 2\nu)$
$1+\nu$
$= \frac{2}{2}\frac{1+\nu}{E}\left(\sigma - \frac{\mathrm{tr}\,\sigma}{3} I\right)$
in deviatorica è prop. all'invariante 2° del deviatore
con $G = \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$
$e = \frac{s}{2G} = \frac{1}{2G} s$
$s = 2G e$
$2e = \frac{s}{G}$
$s = G\, 2e$
vedi
$\gamma_{ij} = \frac{\tau_{ij}}{G}$
$\tau_{ij} = G \gamma_{ij}$
(rigidezza volumetrica)
Modulo di volume
$K \to \infty$, $\nu \to 1/2$
materiale incomprimibile –
mat. indeform. a taglio
$G \to \infty$, $\nu \to -1$
(rigidezza deviatorica)
Modulo di taglio
Significato e rappresentazione
ε_I, σ_I
$\varepsilon_{II}, \sigma_{II}$

Verifica di resistenza (elastica)

- L'assunto comportamento illimitatamente elastico si esaurisce in realtà, per un dato stato tenso-deformativo, in corrispondenza del primo snervamento del materiale.
- ~~Approccio sperimentale~~ mostra resistenza finita

1D



regime elastico
↳ limite di comp. elastico

$-\sigma_c \leq \sigma \leq \sigma_T$

$-\varepsilon_c \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T$

$\omega \leq \omega_y$

- In generale, occorre verificare che lo stato di Sollecitazione del materiale sia inferiore alla Resistenza

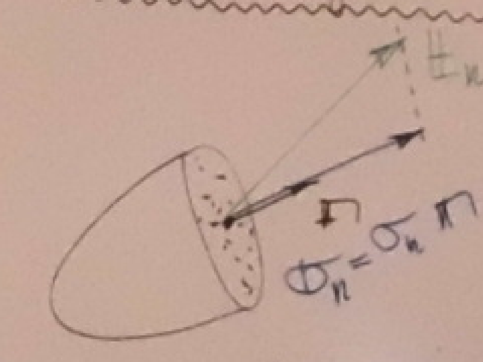
$$S \leq R$$

- Si definisca, secondo vari criteri di resistenza, una Grandezza Indice del Pericolo (o di crisi) che quantifichi lo stato di sollecitazione tenso-deformativo e consenta di metterlo a confronto con un parametro di resistenza del materiale, in relazione al comportamento del materiale ed al tipo dello stato tenso-deformativo.
- Spesso, in termini pratici e al fine di omologare i vari criteri si opera nel dominio delle tensioni:

$$\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \leq \sigma_0 = \frac{\sigma_y}{f}$$

tensione equivalente; tens. ammiss.; tens. di snervamento; fattore di sicurezza 1÷5

Criterio di Galileo-Rankine-Navier

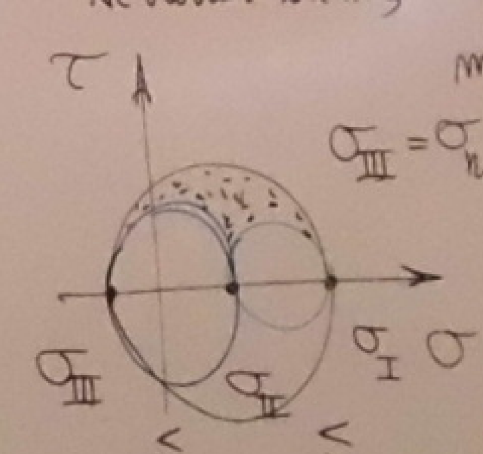


$$\underset{min}{-\sigma_c \leq \sigma_n} \; ; \; \underset{max}{\sigma_n \leq \sigma_T}$$

concetto

Al variare di n, varia σ_n (sforzo normale)

$$\underset{min}{\sigma_{III} = \sigma_n} \; ; \; \underset{max}{\sigma_n = \sigma_I}$$



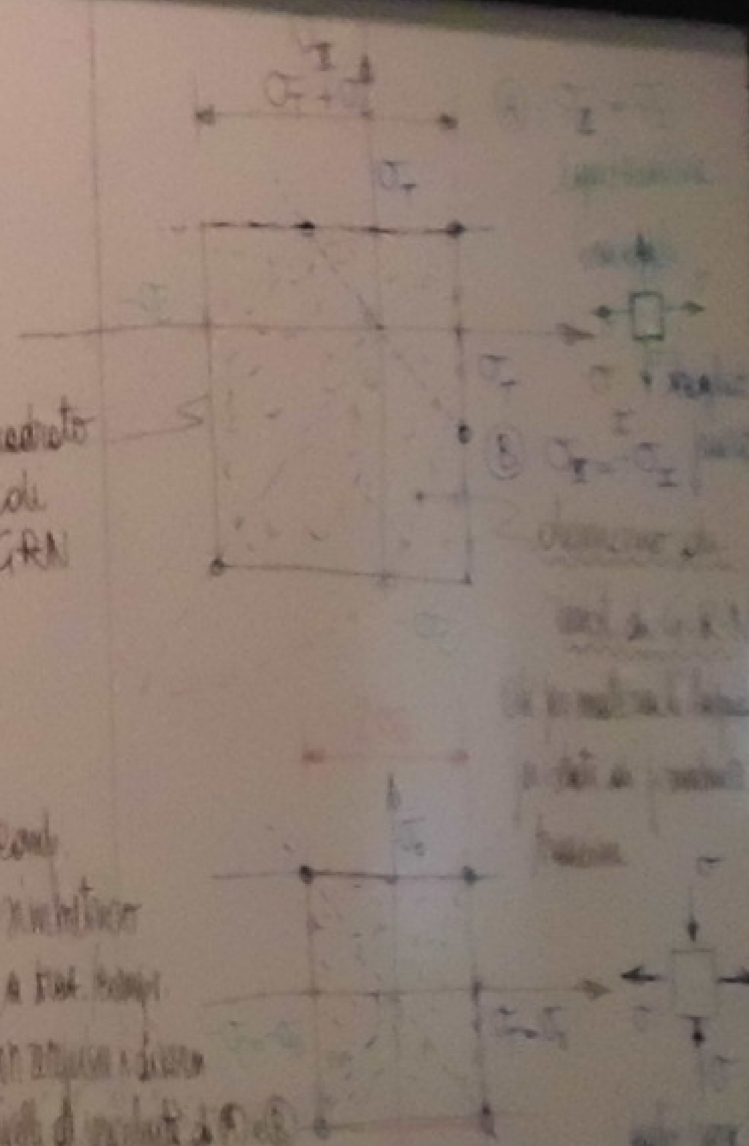
Arbelo di Mohr nel piano di Mohr

$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_T$

$-\sigma_c \leq \sigma_{II} \leq \sigma_T$

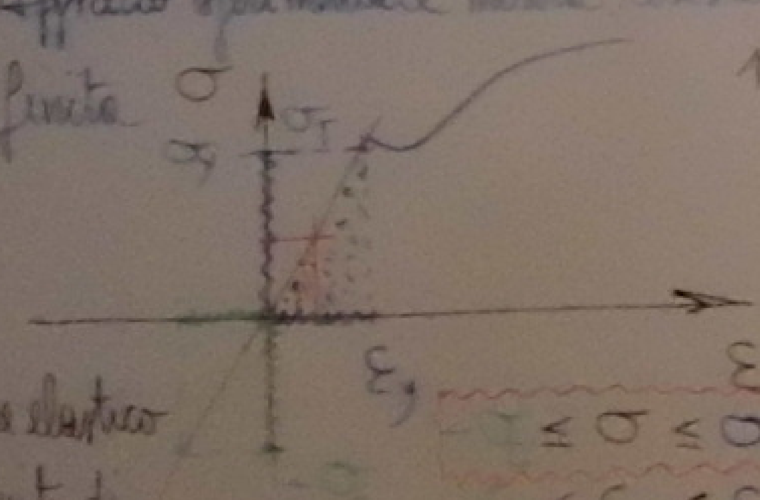
$-\sigma_c \leq \sigma_{III} \leq \sigma_T$

quadrato di GRN



Verifica di resistenza (elastica)

- L'assunto comportamento illimitatamente elastico si esaurisce in realtà, per un dato stato tenso-deformativo, in corrispondenza del primo snervamento del materiale.
- Approccio sperimentale mostra resistenza finita



$\le \sigma \le \sigma_T$

$\le \varepsilon \le \varepsilon_T$

$\omega \le \omega_y$

In generale, occorre verificare che lo stato di sollecitazione del materiale sia inferiore alla Resistenza

$$S \le R$$

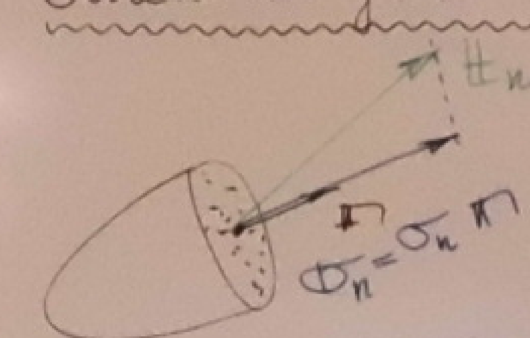
- Si definisca, secondo vari criteri di resistenza, una Grandezza Indice del Pericolo (o di crisi) che quantifichi lo stato di sollecitazione tenso-deformativo e consenta di metterlo a confronto con un parametro di resistenza del materiale, in relazione al comportamento del materiale ed al tipo dello stesso stato tenso-deformativo.

$$\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \le \sigma_a = \frac{\sigma_y}{f}$$

tens. di snervamento

fattore di sicurezza 2÷5

Criterio di Galileo-Rankine-Navier

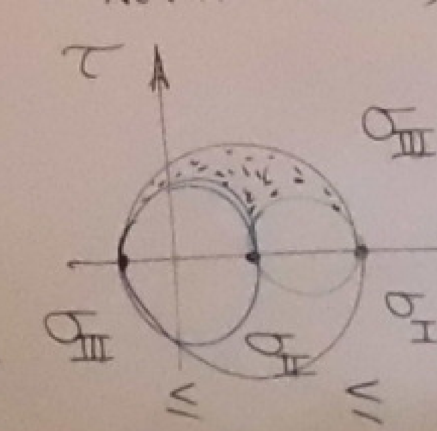


$$-\sigma_C \le \sigma_n^{min} \; ; \; \sigma_n^{max} \le \sigma_T$$

concetto

Al variare di n, varia σ_n (sforzo normale)

$$\sigma_{III} = \sigma_n^{min} \; ; \; \sigma_n^{max} = \sigma_I$$



Arbelo di Mohr nel piano di Mohr

4 disug. nel caso di sforzo piano

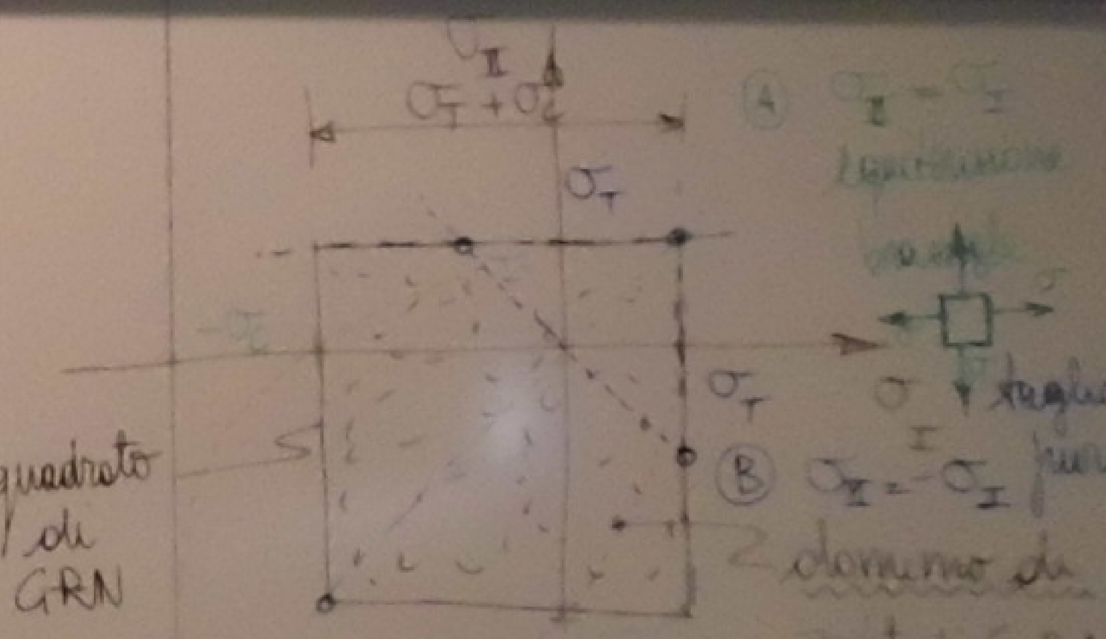
6 disuguaglianze analitiche

$$-\sigma_C \le \sigma_I \le \sigma_T$$

$$-\sigma_C \le \sigma_{II} \le \sigma_T$$

$$-\sigma_C \le \sigma_{III} \le \sigma_T$$

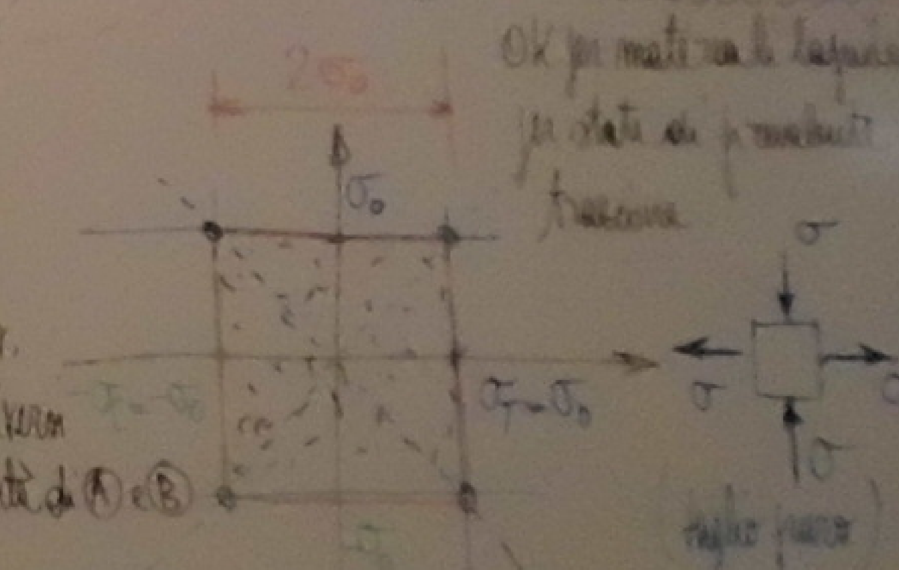
quadrato di GRN



dominio di resist. di G-R-N

OK per materiali fragili per stati di prevalente trazione

comp. simmetrico a traz./compr. non distingue i diversi livelli di pericolosità di Ⓐ e Ⓑ




Criterio di Galileo-Rankine-Navier
$-\sigma_c \le \sigma_n^{min}$; $\sigma_n^{max} \le \sigma_T$
concetto
$\sigma_n = \sigma_n n$
Al variare di n, varia σ_n (sforzo normale)
$\sigma_{III} = \sigma_n^{min}$; $\sigma_n^{max} = \sigma_I$
6 disuguaglianze analitiche
$-\sigma_c \le \sigma_I \le \sigma_T$
$-\sigma_c \le \sigma_{II} \le \sigma_T$
$-\sigma_c \le \sigma_{III} \le \sigma_T$
$\sigma_{III} = 0$
4 diseg. nel caso di sforzo piano
Arbelo di Mohr nel piano di Mohr
$\sigma_{III} = 0$ per caso piano
quadrato di GRN
$\sigma_I + \sigma_c$
σ_T
$-\sigma_c$
A $\sigma_{II} = \sigma_I$ equitensione biassiale
taglio puro
B $\sigma_{II} = -\sigma_I$
dominio di resist. di G-R-N
OK per materiali lapidei per stati di prevalente trazione
$2\sigma_0$
σ_0
$-\sigma_c = -\sigma_0$
$\sigma_T = \sigma_0$
$-\sigma_0$
comp. simmetrico a traz./compr.
non recepisce i diversi livelli di pericolosità di A e B
(taglio puro)
$S \le R$