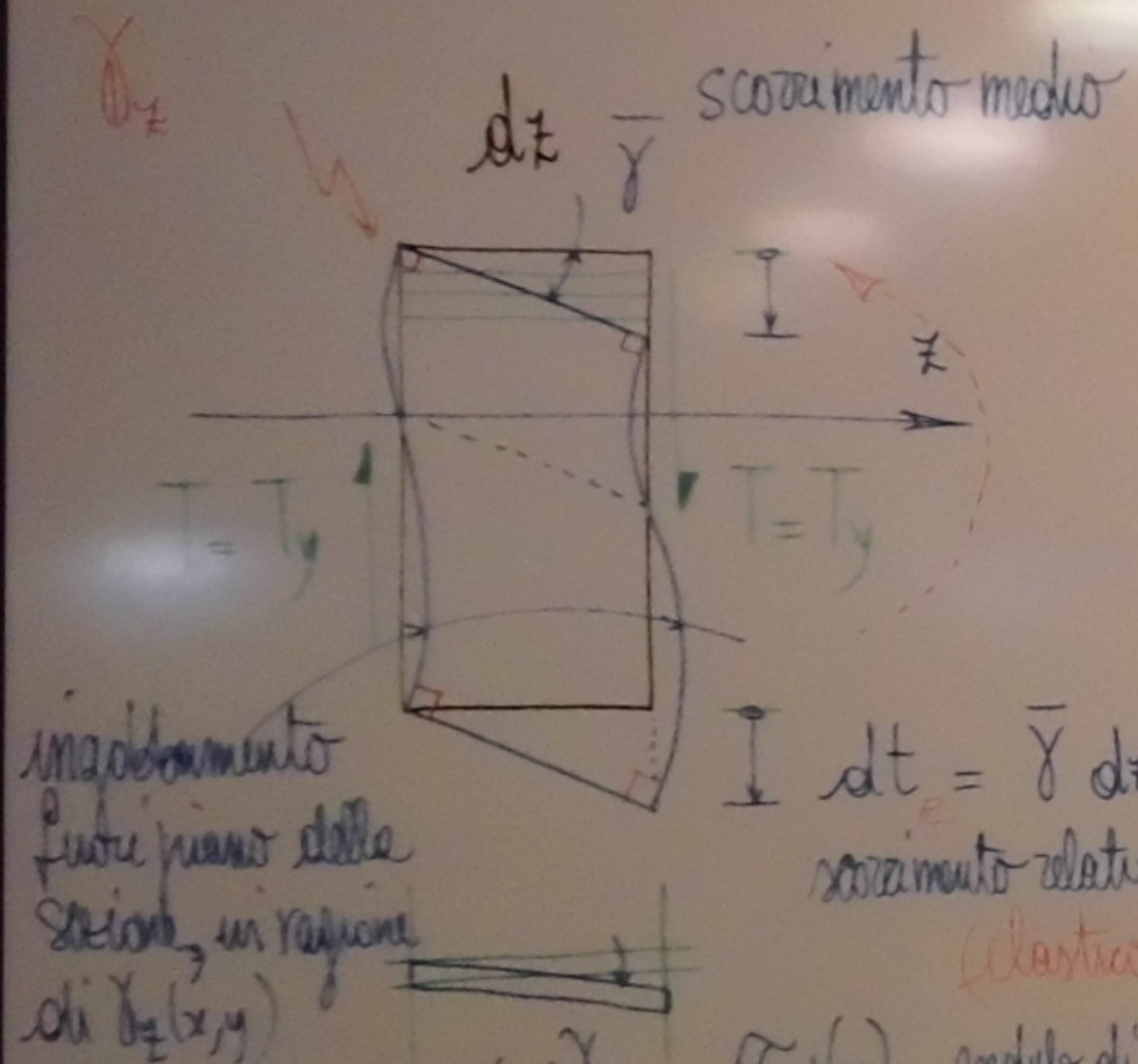


Deformazione a taglio



inaglobamento
fuori piano delle
sezioni, in ragione
di $\gamma_z(x,y)$

calcola per $\gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$; $(y)\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}(y)}{G}$ modulo di taglio
(lineare) $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Tale scorrimento medio, determinabile a partire
da deformazioni taglianti variabili lungo la
sezione, può essere determinato tramite PLV.

fattore di taglio
$$d\delta_e = \tau_y dt = \int_A \tau_z \cdot \gamma_z dA dz = d\delta_e$$

$$\tau_y \frac{dt}{dz} = \frac{1}{G} \int_A \tau_{zy}(y) \left(1 + \left(\frac{\tau_{zx}}{\tau_{zy}}\right)^2\right) dA$$

$$= \frac{1}{G} \int_A \frac{\tau_y S_x(y)}{J_x b(y)} \left(1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b(y)^2}\right) dA$$

$$= \frac{1}{G} \frac{\tau_y}{J_x^2} \int_A \frac{S_x(y)}{b^3(y)} \left(1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b(y)^2}\right) dA$$

$$A^* = \frac{A}{\mu}$$
 area ridotta

- Fattore di taglio

$$\mu = \frac{A}{J_x^2} \int_A \frac{S_x(y)}{b(y)^2} \left(1 + \frac{4 \tan^2 \alpha(y)}{b(y)^2}\right) dA \geq 1$$

pure proprietà geometrica della
sezione trasversale, con $\mu \geq 1$
(es. in se. rettang. $\mu = \frac{b}{5}$)

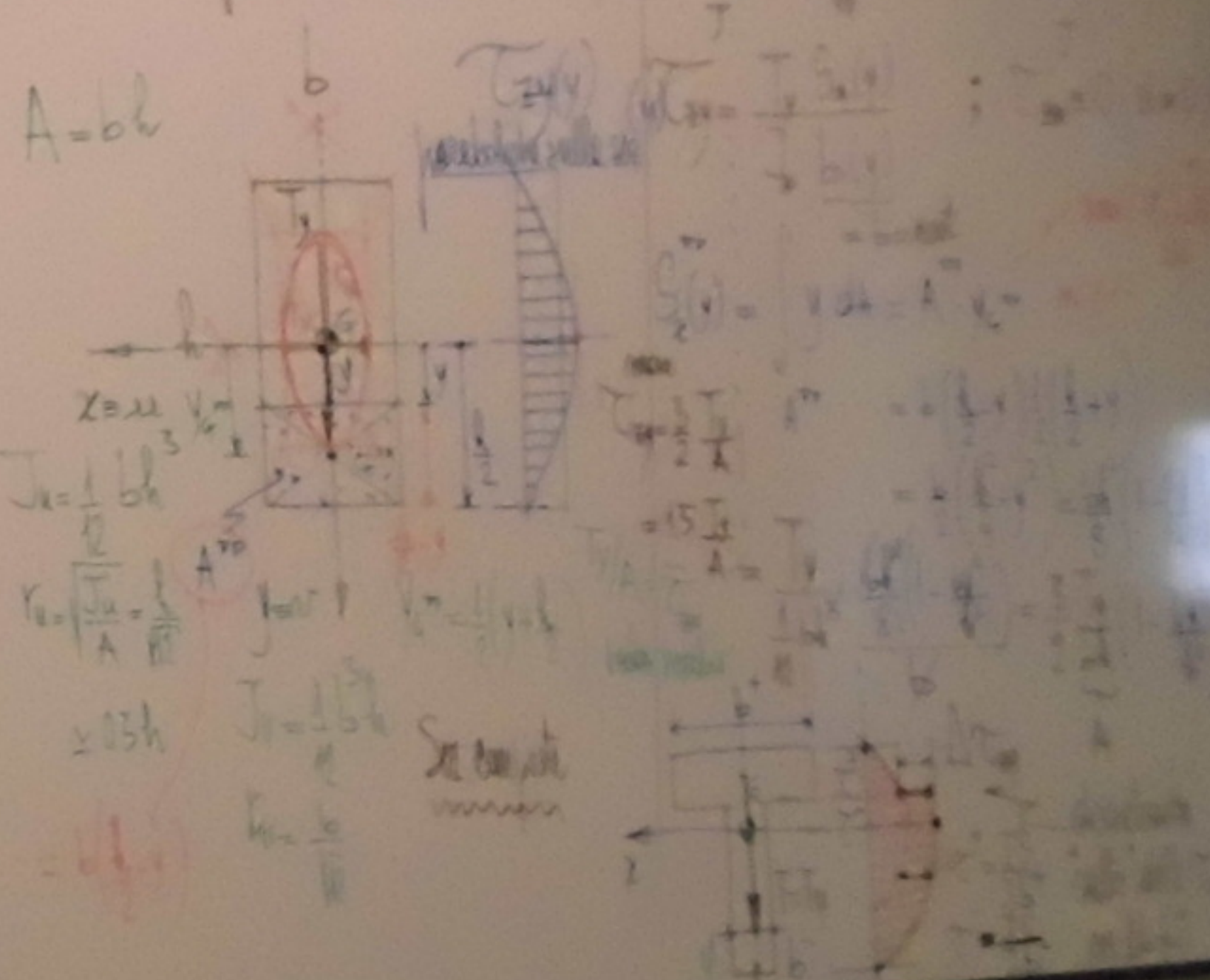
- Scorrimento totale tra il bas

$$\Delta t = \int_0^l dt = \int_0^l \mu \frac{\tau_y dz}{GA}$$

$$\Delta t = \mu \frac{\tau_y l}{GA}$$

$$= \frac{\tau_y l}{GA^*}$$

- Caso della sezione rettangolare
composizione di due elementi



Dimensioni a taglio

Tale sezione molto ridotta, determinabile a partire da coefficiente di resistenza, variabile lungo la sezione, può essere determinata tramite PLV

$$\tau_{xy} = \frac{V}{A} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{h} \frac{y}{h} \right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{V}{A} \cdot \frac{1}{2} \left(1 + \frac{b}{h} \frac{y}{h} \right)$$

Fattore di taglio

$$\mu = \frac{A}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \left(1 + \frac{b}{h} \frac{y}{h} \right) dy \geq 1$$

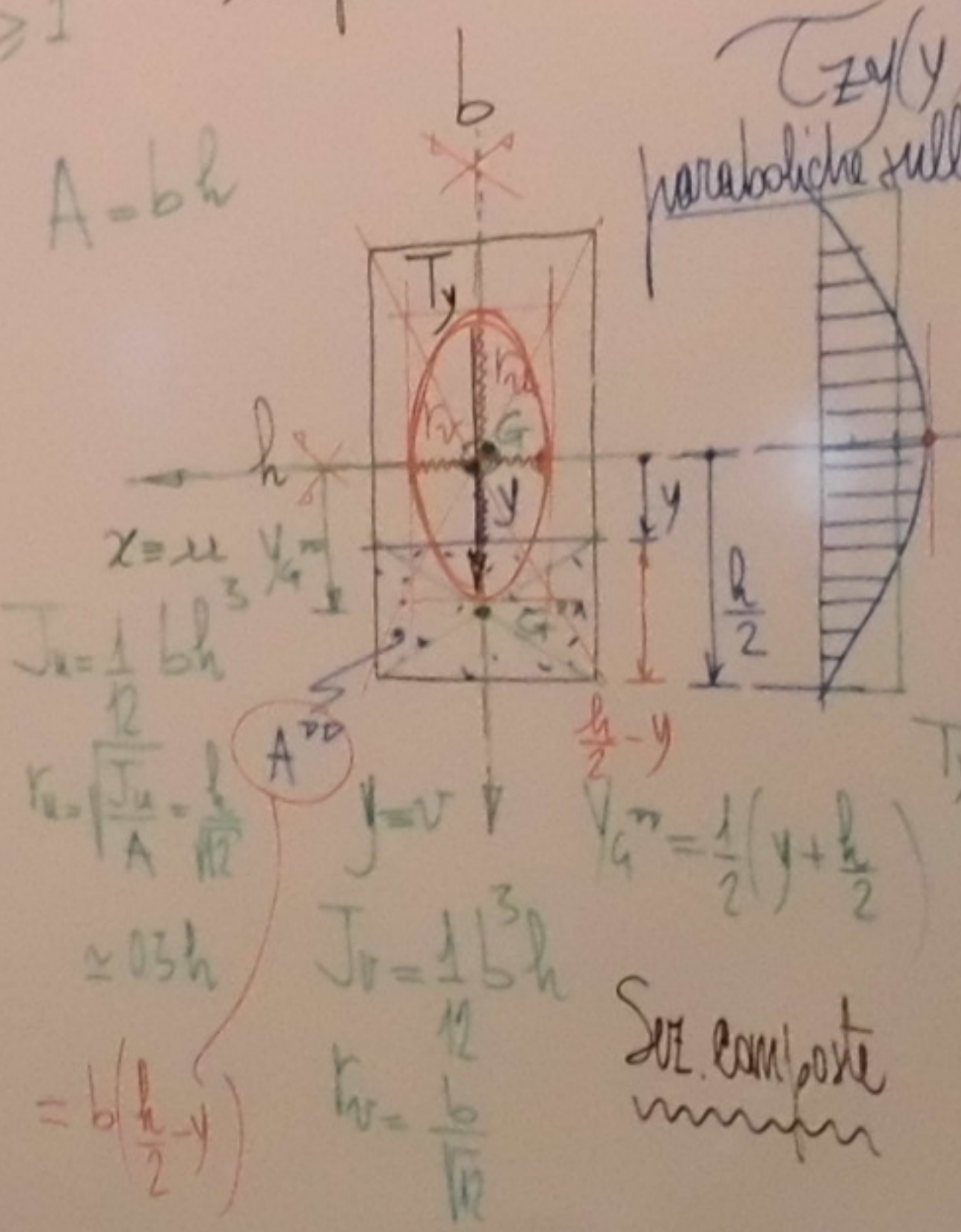
per proprietà geometrica della sezione trasversale, con $\mu \geq 1$

(a) per se. rettang. $\mu = \frac{b}{5}$

$$\Delta t = \int_{-h/2}^{h/2} dt = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \frac{T_y}{GA} dy$$

$$\Delta t = \mu \frac{T_y l}{GA} = \frac{T_y l}{GA^*}$$

Caso della sezione rettangolare (utile per sezioni "composte" formate dalla composizione di aree elementari)



$$J_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$J_y = \frac{1}{12} b^3 h$$

Sez. composta

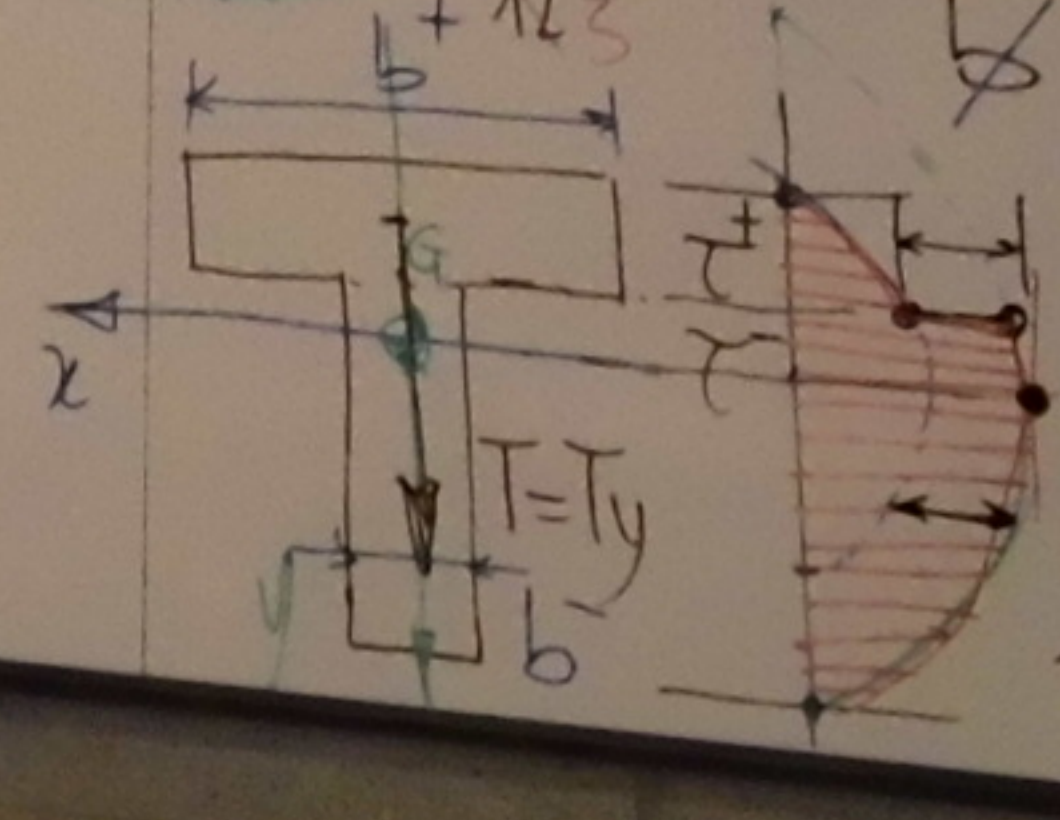
utile per sezioni "composte" formate dalla

$$\tau_{xy} = \frac{T_y}{J_x} \frac{S_x(y)}{b(y)}$$

$$\tau_{zx} = 0 \quad (\alpha = 0)$$

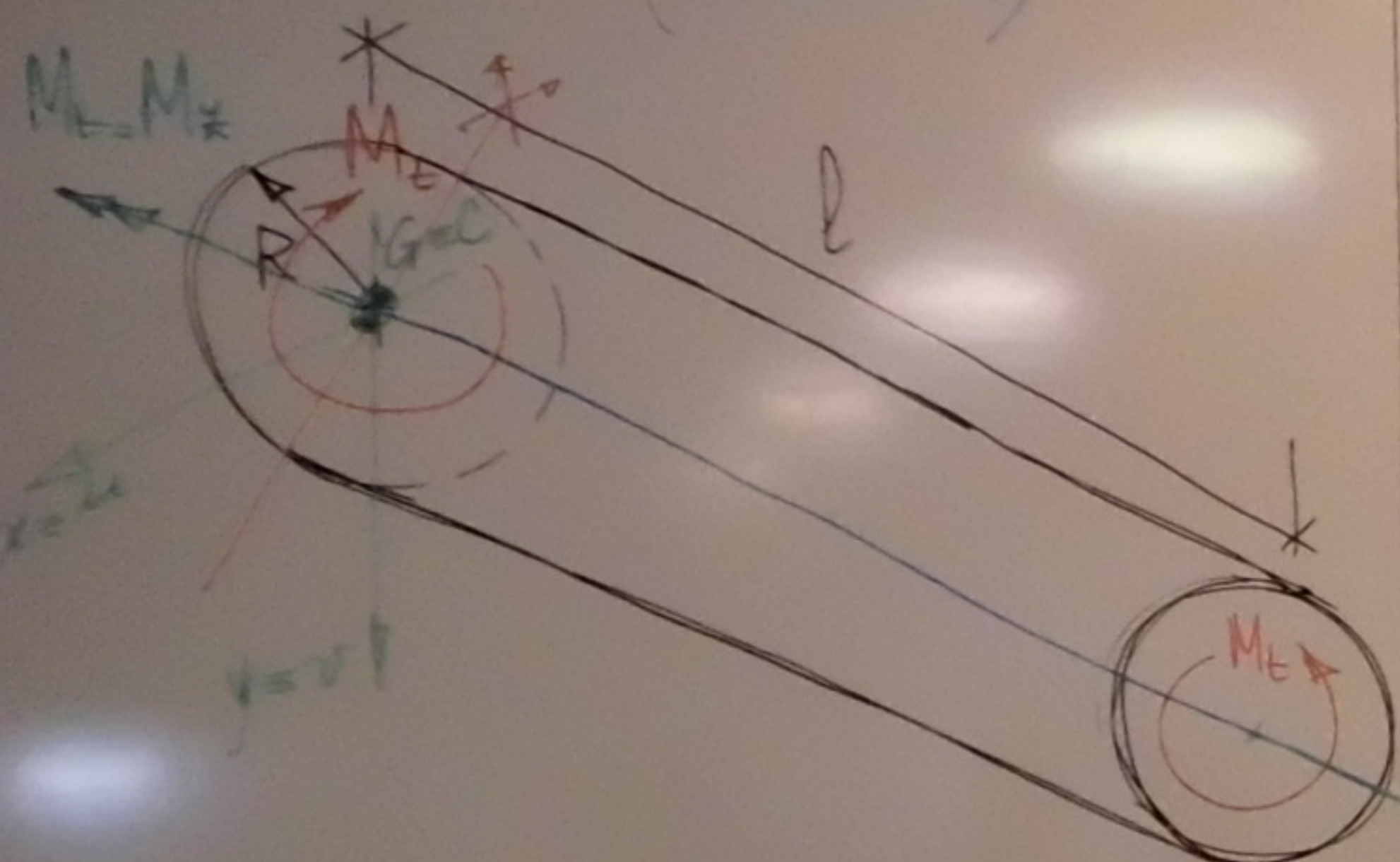
$$S_x(y) = \int y dA = A^* \cdot y_G^*$$

$$A^* = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) = \frac{b}{2} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) = \frac{b h^2}{8} \left(1 - \frac{y^2}{h^2} \right)$$



discontinuità "salto" delle τ_{xy} ove $\Delta b \neq 0$

4) Torsione (circolare)



- Le azioni sulle basi del prisma di DSV sono equivalenti a due coppie torcenti (giacenti nel piano della sezione) sulle due basi, uguali e contrarie

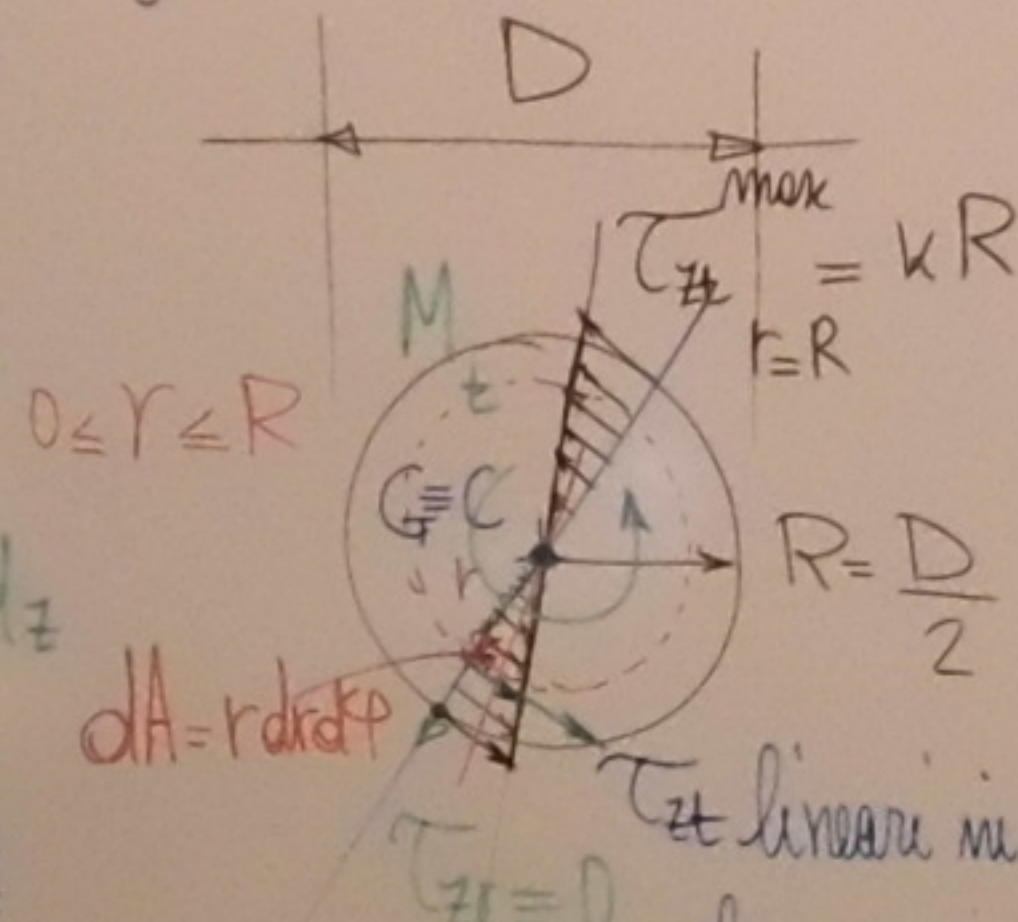
- Seguire la linea importante... (faint text)

- Con approccio semi-inverso agli sforzi, ipotizzo:

$$\sigma_{ij} = 0 ; \tau_{xz} = 0, \tau_{zx} = k r = \frac{M_t}{J_g} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$$

Si verifica che tutte le eq m. approssimate a ulteriori soddisfatto

- Resta da det. la costante K (per equivalenza statica tra M_t e τ_{zx})



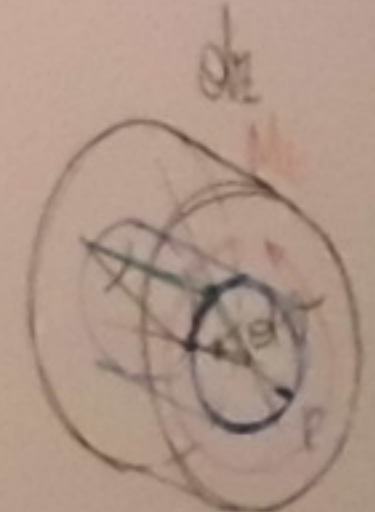
(flessione) $J_x = J_y = J_g = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

(torsione) $J_g = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{2}$

$$M_t = \int_A (\tau_{zx} r) dA = \int_A k r^2 dA \Rightarrow k = \frac{M_t}{J_g}$$

Momento d'inerzia polare rispetto al centro

- Deformabilità



$$\gamma_{zx} dz = r d\theta$$

$$\frac{M_t}{J_g} dz = r d\theta$$

$$d\theta = \frac{M_t dz}{J_g} = \frac{M_t}{J_g} dz$$

- Rotazione relativa tra le basi a distanza relativa l

$$\Delta\theta = \int_0^l d\theta$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_g}$$

4) Torsione circolare



Le azioni sulle basi del prisma di DSV sono equivalenti a due coppie torcenti (giacenti nel piano della sezione) nelle due basi, uguali e contrarie.

Con approccio semiempirico agli sforzi, ipotizzo:

$$\sigma_{ij} \equiv 0; \tau_{\theta\theta} = 0, \tau_{zt} = k r = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2 M_t}{\pi R^4} r$$

Si verifica che tutte le eq m governante risultano soddisfatte

Resta da det. la costante k (per equivalenza statica tra M_t e τ_{zt})

$$M_t = \int_A (\tau_{zt} dA) r = \int_A k r^2 dA \Rightarrow k = \frac{M_t}{J_G}$$

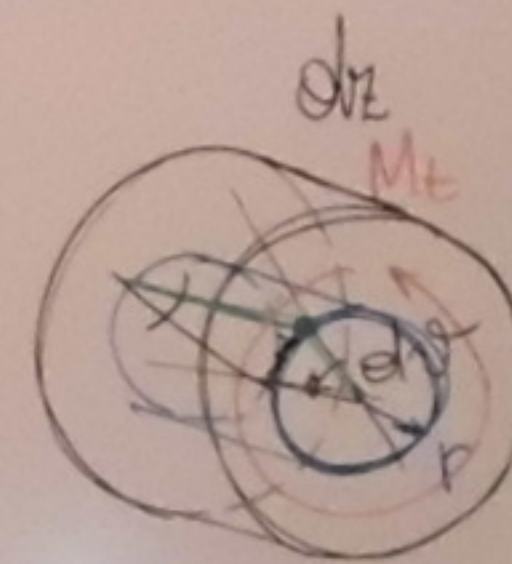
$$W_t = \frac{\pi R^3}{2}$$

(flessione) $J_x = J_y = J_G = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

(torsione) $J_G = \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = \pi R^4/2 = \pi D^4/32$

$J_G = C$ momento d'inerzia polare rispetto al centro

Deformabilità



$d\theta$ rotaz. relativa

$$\gamma_{zt} dz = r d\theta$$

$$\frac{M_t}{J_G} r dz = r d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{M_t dz}{J_G}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_G}$$

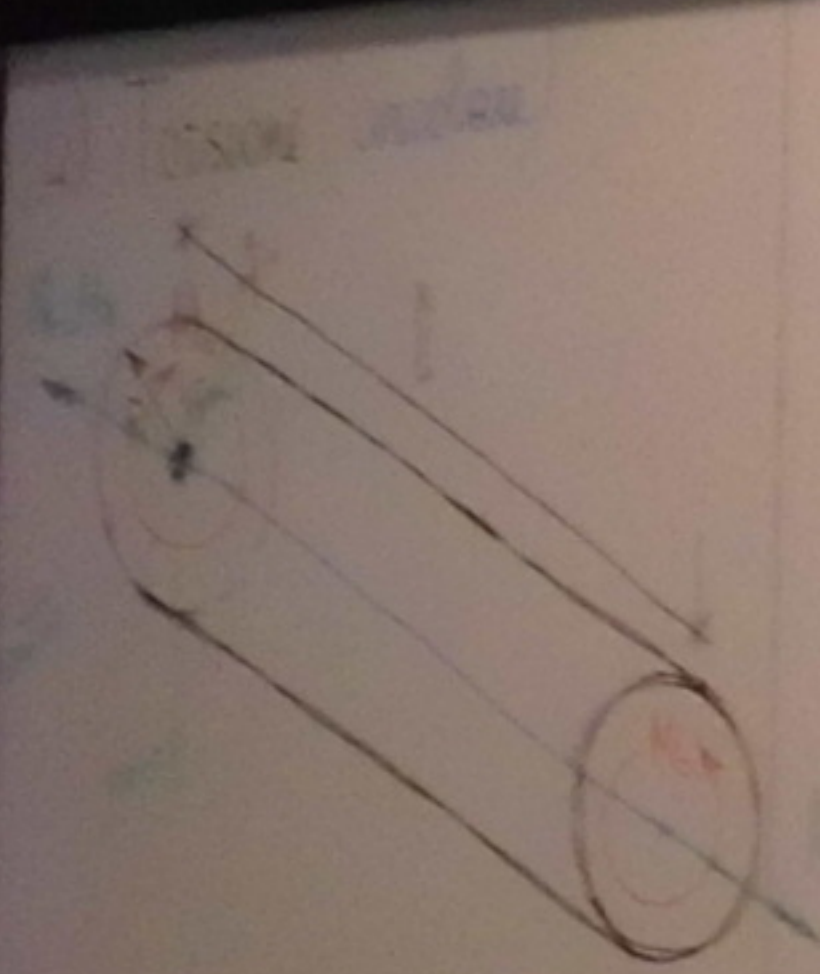
Rotaz. relativa tra le basi a distanza relativa l.

$$\Delta\theta = \int_0^l d\theta = \int_0^l \frac{M_t dz}{G J_G}$$

$$\Delta\theta = \frac{M_t l}{G J_G}$$

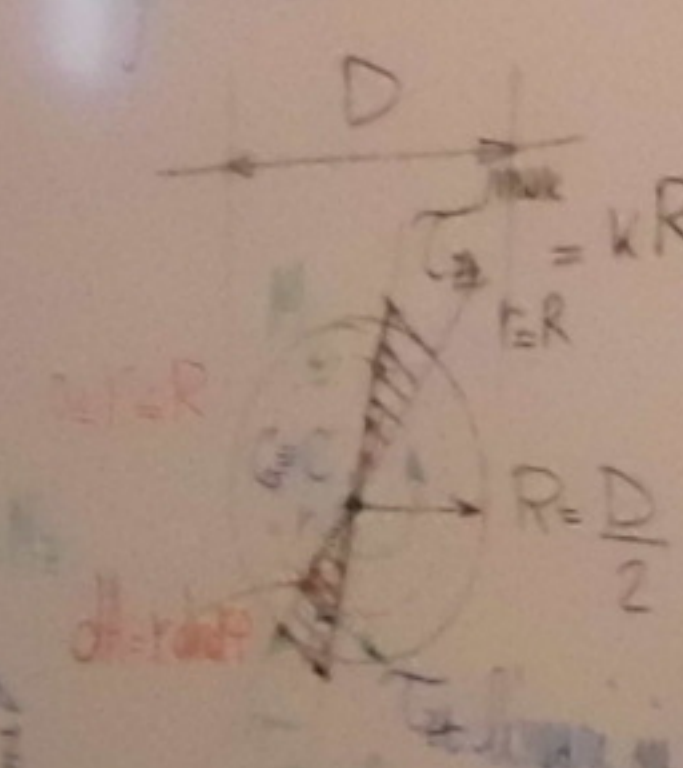
momento di inerzia torzionale

$$J_G = J_G \leftarrow J = \frac{J_G}{\eta} \text{ fattore di torsione } \geq 1$$



- Ipotesi di Saint Venant:

$J_y = 0; \tau_{yz} = 0, \tau_{zt} = kr = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$
 Significa che tutte le linee elementari risultano soddisfatte



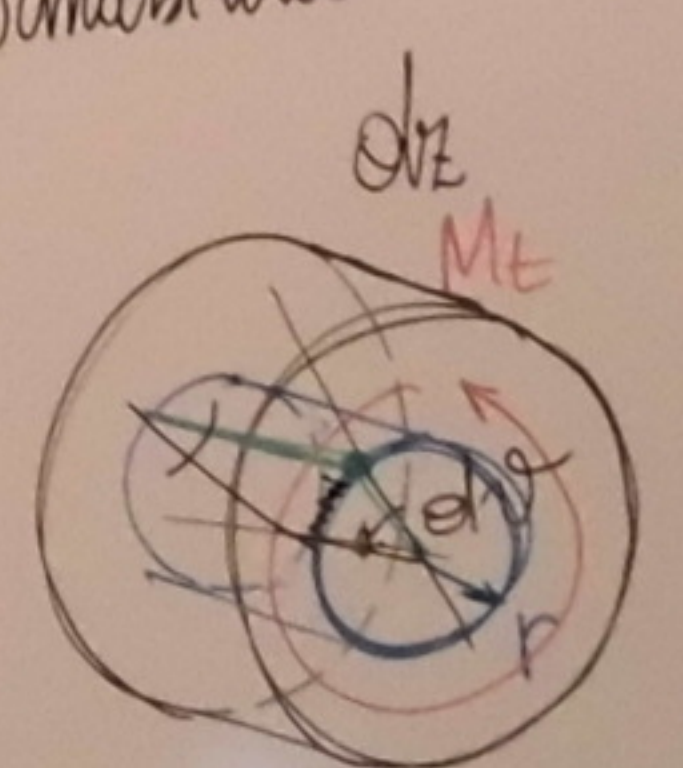
- Nota da det. la costante K (per modulo di resistenza statica tra M_t e τ_{zt}):

$M_t = \int_A \tau_{zt} r dA = \int_A k r^2 dA \Rightarrow k = \frac{M_t}{J_G}$

$W_t = \frac{\pi R^3}{2}$

momento d'inerzia polare rispetto al centro

- Deformabilità



$d\phi$ rotaz. relativa

$\gamma_{zt} dz = r d\phi$
 $\frac{M_t}{J_G G} dz = r d\phi$

se generica

$d\phi = \frac{M_t dz}{G J_G}$

rigidezza torsionale

- Rotaz. relativa tra le basi a distanza relativa l:

$$\Delta\phi = \int_0^l d\phi = \int_0^l \frac{M_t dz}{G J_G}$$

$$\Delta\phi = \frac{M_t l}{G J_G}$$

momento d'inerzia torsionale

$J_t = \frac{J_G}{\eta}$

η = fattore di torsione ≥ 1