Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

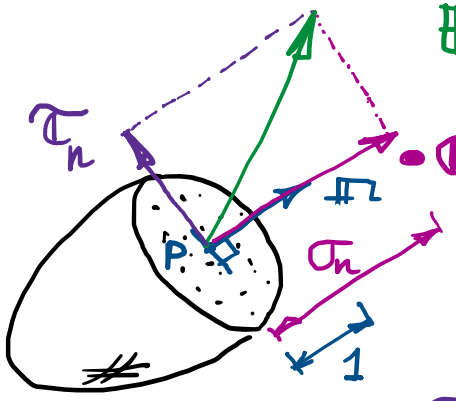
A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Tensioni principali e direzioni principali di sforzo



$\mathbb{t}_n = \Pi \cdot \sigma = \sigma^{(T)} \cdot \Pi =$ vettore sforzo di Cauchy $= \sigma_n + \tau_n$

- $\sigma_n = \sigma_n \Pi$ ove $\sigma_n = \mathbb{t}_n \cdot \Pi = t_n \cdot \cos \widehat{\mathbb{t}_n \Pi}$ vettore sforzo normale

$= \Pi \cdot \sigma \cdot \Pi = n_i \sigma_{ij} n_j$ componente di sforzo normale (scalare)

- $\tau_n = \mathbb{t}_n - \sigma_n = \sigma^{T} \cdot \Pi - \sigma_n \underbrace{\mathbb{I} \cdot \Pi}_{\Pi}$ vettore sforzo tangenziale o tagliante

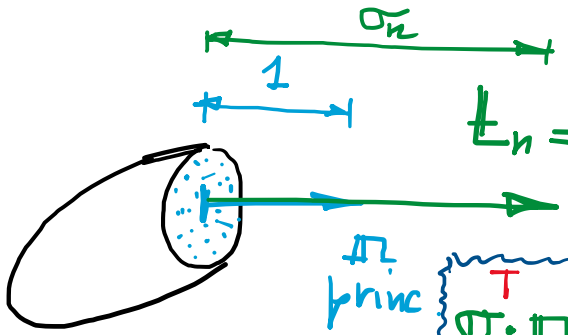
$= (\sigma^{T} - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot \Pi$

$\mathbb{I}$: tensore identità del 2° ordine

$$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \qquad I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases}$$

Simbolo di Kronecker

Direzione principale di sforzo: (solo sforzo normale, no sforzo tagliente)



$\mathbb{t}_n = \sigma_n = \sigma_n \Pi \quad (\tau_n = 0)$

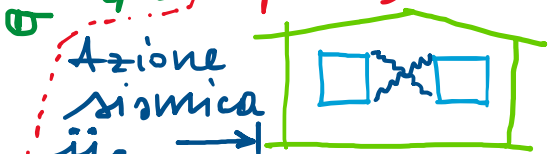
$(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot \Pi = 0$

$\sigma^{T} \cdot \Pi = \sigma_n \Pi = \sigma_n \mathbb{I} \cdot \Pi$

Problema agli autovalori associato al tensore sforzo σ

$A \cdot x = \lambda x$ — matrice; autovettore ⇒ direzioni principali; autovalore ⇒ tensioni principali

Valenza pratica: implicazioni della resistenza dei materiali sul comportamento strutturale (es. materiali lapidei, non resistenti a trazione)



fratture a 45°

Il pb. agli autovalori associato al tensore sforzo di Cauchy ammette soluzioni non banali ($\mathbf{n} \neq 0$) sse:

$$\mathbf{t}_n = (\boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n} = 0 \Rightarrow -\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \mathbf{I}) = -\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{vmatrix} =$$

Coefficienti del polinomio caratteristico I_i:

Invarianti di sforzo (al variare del sistema di riferimento): [poiché σ_n devono essere le radici dell'eq.ne]

$$= \sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3 = 0$$

eq.ne caratteristica (di 3° grado) → 3 radici: autovalori $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

$\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n - I_3$ ← polinomio caratteristico

tensioni principali ⇕ autovettori $\mathbf{n}_I, \mathbf{n}_{II}, \mathbf{n}_{III}$ direzioni principali di sforzo

- primo (lineare) $I_1 = \operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma} \sim \sigma^1$
$= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sigma_{ii} = \mathbf{I} : \boldsymbol{\sigma} = \delta_{ij}\sigma_{ij}$

- secondo (quadratico) $I_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^2 - (\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma})^2\right) \sim \sigma^2$
$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right)$
$= -\left(\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix}\right) = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$

- terzo (cubico) $I_3 = \det\boldsymbol{\sigma} \sim \sigma^3$ ⟷ poiché $-\det(\boldsymbol{\sigma} - \sigma_n \mathbf{I}) = -I_3$ per $\sigma_n = 0$
$= \frac{1}{3}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^3 - \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{2}\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}^2\boldsymbol{\sigma}\right)$
$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$

- Poichè σ è reale ($\sigma \in \mathbb{R}$) e simmetrico ($\sigma^T = \sigma$), gli autovalori sono reali: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \in \mathbb{R}$

- A due autovalori distinti corrispondono due autovettori mutuamente ortogonali:

$$\sigma_I \neq \sigma_{II} \Rightarrow \begin{matrix} \Pi_{II} \cdot (\sigma \cdot \Pi_I = \sigma_I \Pi_I) \\ \Pi_I \cdot (\sigma \cdot \Pi_{II} = \sigma_{II} \Pi_{II}) \end{matrix} -$$

$$\Pi_{II} \cdot \sigma \cdot \Pi_I - \Pi_I \cdot \sigma \cdot \Pi_{II} = \sigma_I \, \Pi_{II} \cdot \Pi_I - \sigma_{II} \, \Pi_I \cdot \Pi_{II}$$

$\sigma^T = \sigma$

$$0 = \Pi_I \cdot \sigma^T \cdot \Pi_{II} - \Pi_I \cdot \sigma \cdot \Pi_{II} = (\sigma_I - \sigma_{II}) \, \Pi_I \cdot \Pi_{II} \Rightarrow \Pi_I \cdot \Pi_{II} = 0$$

$\neq 0$ $\quad = 0$

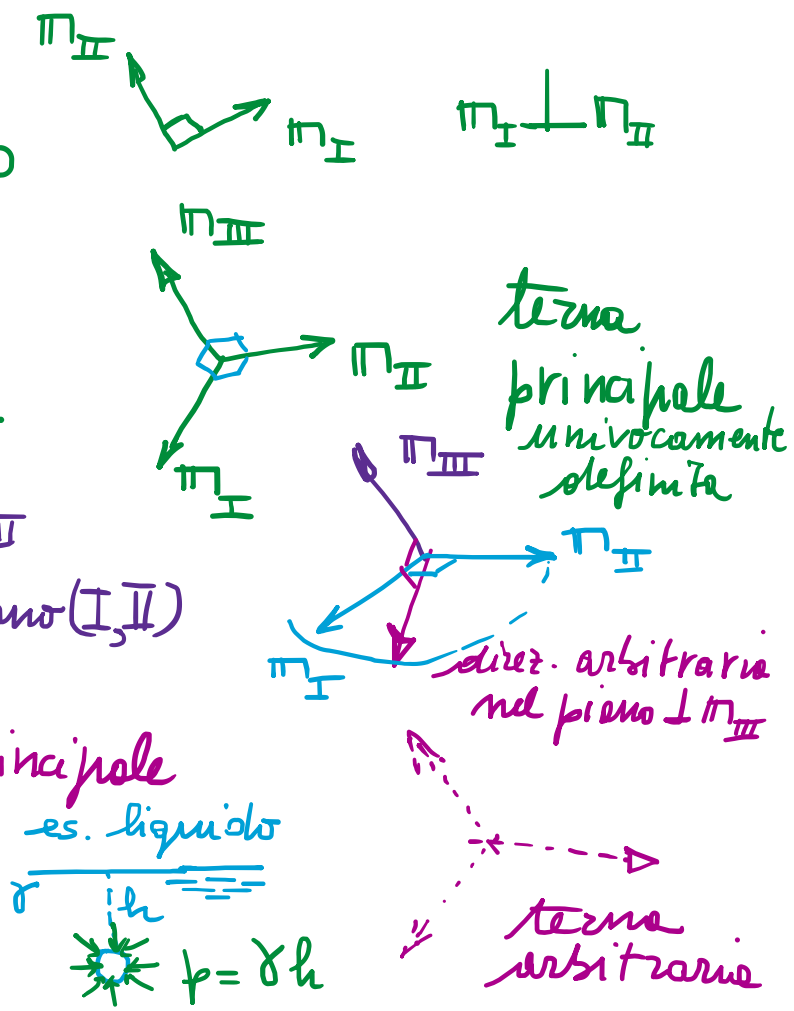
$\Pi_I \perp \Pi_{II}$

- Molteplicità delle radici

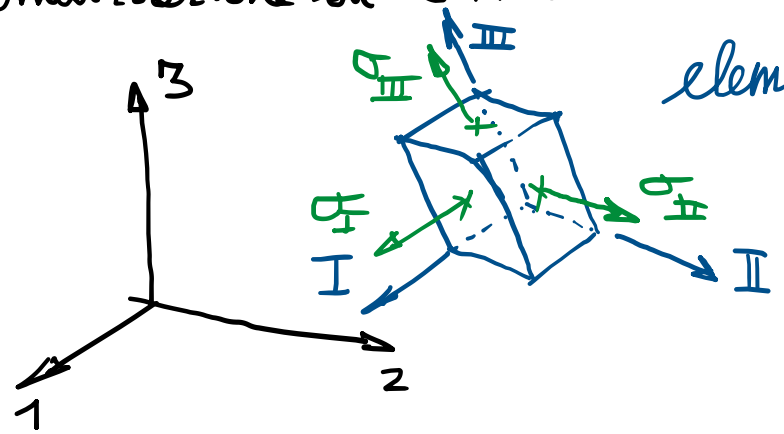
  + 3 radici distinte $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ $\Rightarrow$ 3 dir. princ. mutuam. $\perp$

  + 2 radici distinte, es. $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III}$ $\Rightarrow$ ogni direz. $\perp$ a Π_{III} è principale nel piano (I, II)
  (" " coincidenti)

  + 3 radici coincidenti $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$ $\Rightarrow$ ogni direz. è principale
  (stato di sforzo sferico o idrostatico)
  "uguale in tutte le direzioni"
  (solo sforzo normale)



- Diagonalizzazione di σ nelle direzioni principali



elementino in terna principale

$$[\sigma]_{\text{rif. princ.}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

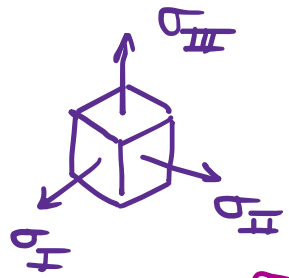
matrice diagonale

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}) \\ I_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

Invarianti espressi nel riferimento principale

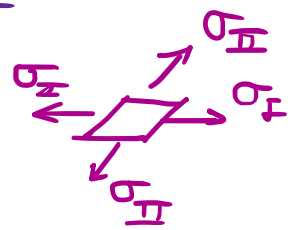
- Classificazione dello stato di sforzo:

+ triassiale (3D): $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} \neq 0$, $\sigma_{III} \neq 0$



sforzo tridimensionale (es. diga)

+ biassiale (2D): " ", $\sigma_{III} = 0$



sforzo piano (es. lastra, trave)

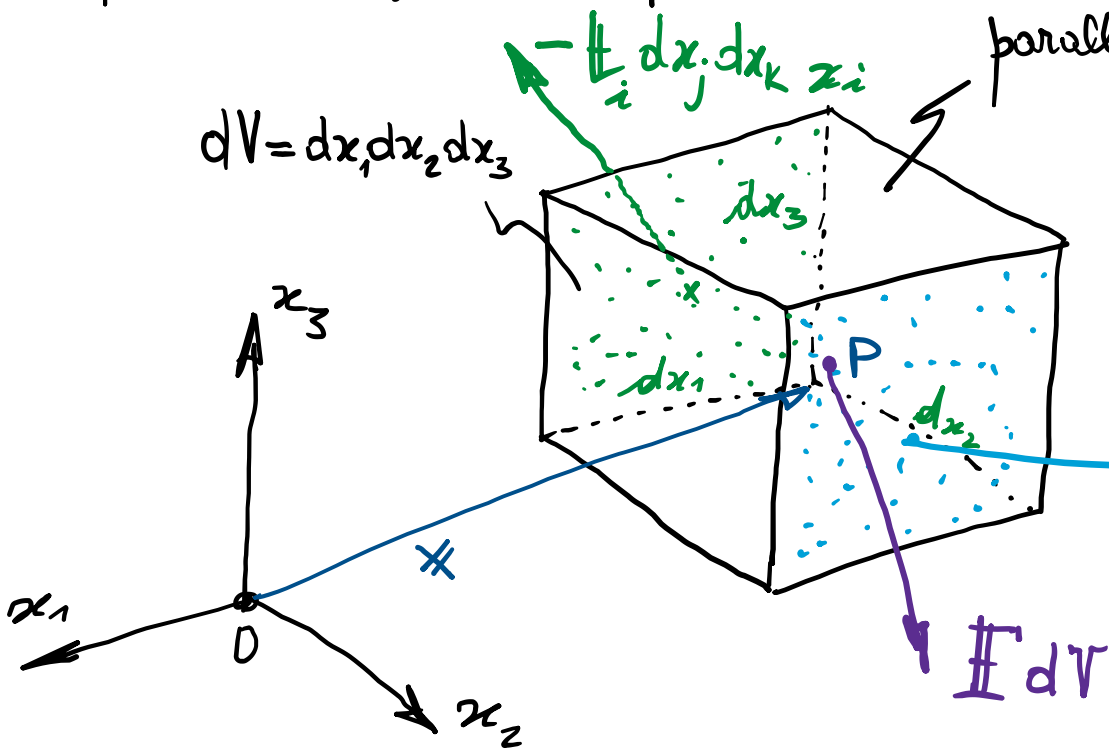
+ monassiale (1D): " ", $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$



sforzo monodimensionale (es. filo teso)

(vedi es. stato di sforzo nelle prova monoassiale di trazione)

Equazioni indefinite di equilibrio del continuo : $\forall x$, dV



parallelepipedo infinitesimo

$x_i + dx_i$

i, j, k

dt_i

$\left(t_i + \frac{\partial t_i}{\partial x_i} dx_i\right) dx_j dx_k$

sulla variazione spaziale del campo di sforzo $\sigma(x)$, $t_n(x)$

es. nelle travi $T'(x) = -q(x)$

Equilibrio alla traslazione:

$$\sum_i \left(t_i + \frac{\partial t_i}{\partial x_i} dx_i\right) dx_j dx_k - t_i\, dx_j dx_k + \mathbb{F}\, dV = 0$$

dV

$$\sum_i \frac{\partial t_i}{\partial x_i} + \mathbb{F} = 0 \quad \text{in } V$$

3 eq.ni scalari

$j = 1,2,3$

$\frac{\partial ( )}{\partial x_i} = ( )_{,i}$

σ_{ij}

$$\sigma_{ij,i} + F_j = \frac{\partial t_{i'j}}{\partial x_i} + F_j = 0_j \iff$$

(Equil. alla rotaz. $\Rightarrow \sigma^T = \sigma$)

$\frac{\partial}{\partial x}$ gradiente

$\mathrm{div} = \nabla \cdot ( )$ operatore divergenza

$$\mathrm{div}\, \sigma + \mathbb{F} = 0 \quad \text{in } V$$

$\nabla \cdot \sigma$

$\mathrm{div}\, \sigma = -\mathbb{F}$