Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 14

"Cerchio" di (Culmann) - Mohr (circolo o circonferenza di Mohr)

[1866] [1882]

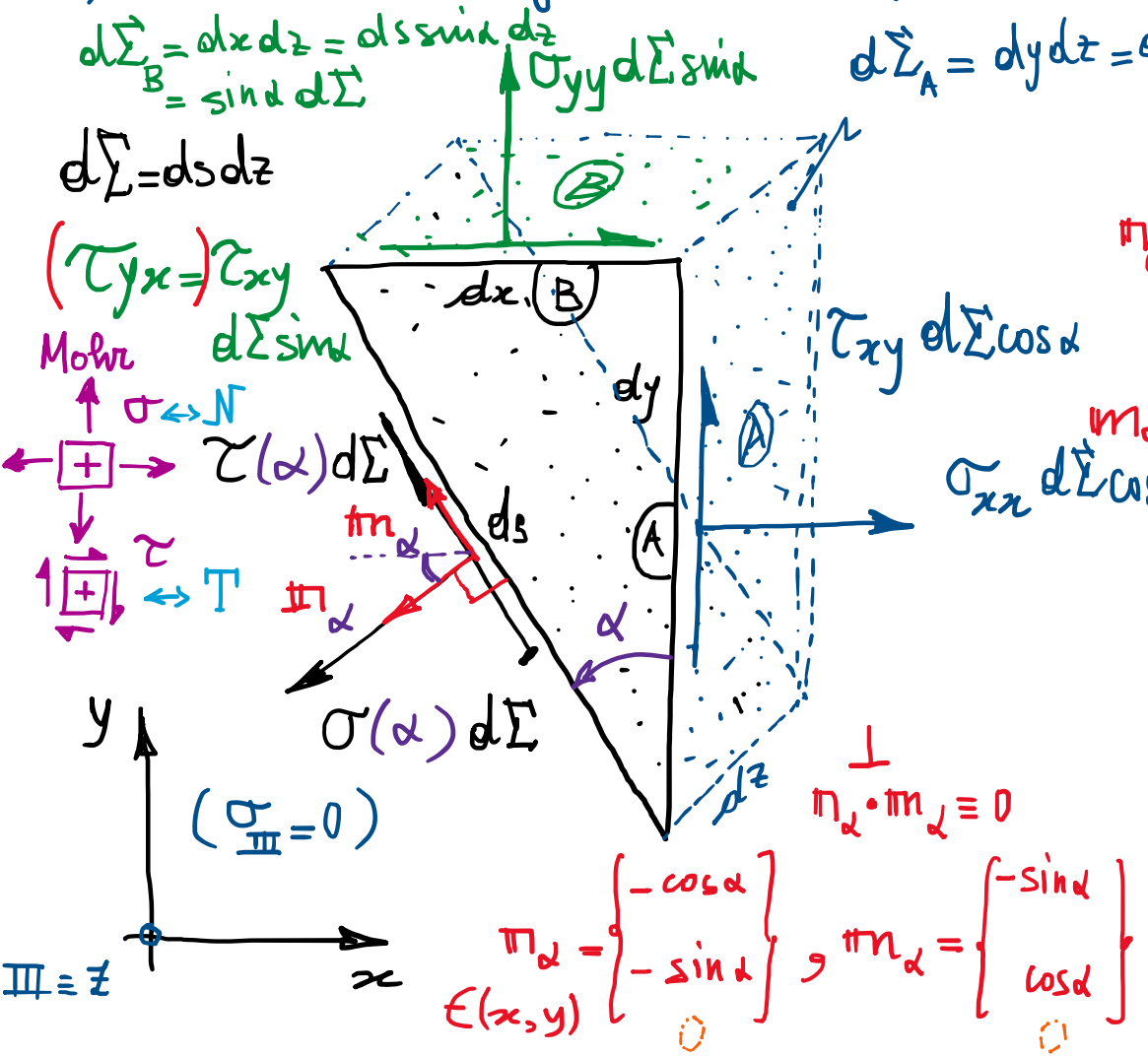
es. $\sigma_{III} = 0 \Rightarrow \sigma_{zj} = 0$ (l_z)

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \cdot \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Rappresentazione analitico-grafica delle componenti di sforzo (piano) normale σ e tangenziale τ, al variare della giacitura nel piano (α)

[es. stato di sforzo nelle travi alla DSV]

(vedi relazione di Cauchy; caso particolare)



$$d\Sigma_A = dy\,dz = ds\cos\alpha\,dz = \cos\alpha\, d\Sigma$$

$\perp$
$\pi_\alpha \cdot \pi_\alpha \equiv 0$

$$\pi_\alpha = \begin{Bmatrix} -\cos\alpha \\ -\sin\alpha \end{Bmatrix}, \quad {}^{\perp}\pi_\alpha = \begin{Bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{Bmatrix}$$

$\epsilon(x,y)$

Equilibrio alla traslazione: $(\forall d\Sigma)$ [tra forze]

π_α:
$$\sigma\, d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos\alpha \cos\alpha + \sigma_{yy} d\Sigma \sin\alpha \sin\alpha + \tau_{xy} d\Sigma \cos\alpha \sin\alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin\alpha \cos\alpha$$

π_α:
$$\tau\, d\Sigma = \sigma_{xx} d\Sigma \cos\alpha \sin\alpha - \sigma_{yy} d\Sigma \sin\alpha \cos\alpha - \tau_{xy} d\Sigma \cos\alpha \cos\alpha + \tau_{xy} d\Sigma \sin\alpha \sin\alpha$$

$$\begin{cases} \sigma(2\alpha) = \sigma_{xx}\cos^2\alpha + \sigma_{yy}\sin^2\alpha + \tau_{xy}\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} \\ \tau(2\alpha) = \underbrace{\frac{(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})}{2}}\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha} - \tau_{xy}\underbrace{(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)}_{\cos 2\alpha} \end{cases}$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \begin{cases} 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = -1 + 2\cos^2\alpha \end{cases}$$

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}; \quad \cos^2\alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$$

Relazioni finali:

$$\begin{cases} \sigma(2\alpha) = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\alpha + \tau_{xy}\sin 2\alpha \\ \tau(2\alpha) = \dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\sin 2\alpha - \tau_{xy}\cos 2\alpha \end{cases}$$

Si sono ottenute le equazioni parametriche di una circonferenza nel piano di Mohr (σ,τ) di (2α)

↑ piano delle componenti di sforzo normale e tangenziale su faccia di giacitura α

centro $C\left(\sigma_c = \dfrac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}, 0\right)$, raggio $R = \sqrt{\left(\dfrac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$

Infatti:

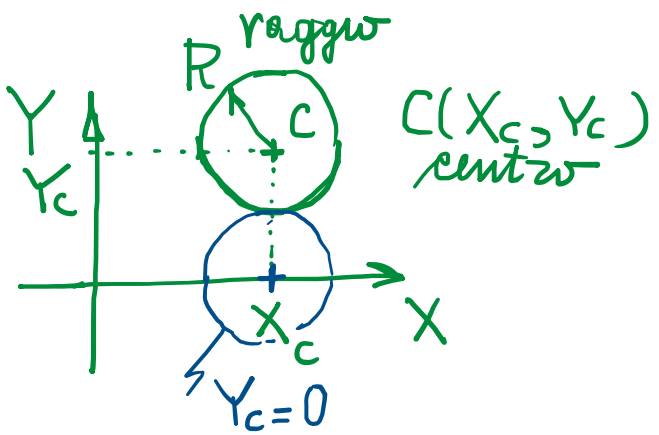
$$\left(\sigma - \underbrace{\frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}}_{\sigma_c}\right)^2 + \tau^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 \underbrace{\cos^2 2\alpha}_{1} + \tau_{xy}^2 \underbrace{\sin^2 2\alpha}_{1} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\tau_{xy}\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$

$$+ \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 \sin^2 2\alpha + \tau_{xy}^2 \cos^2 2\alpha - \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\tau_{xy}\sin 2\alpha\cos 2\alpha$$

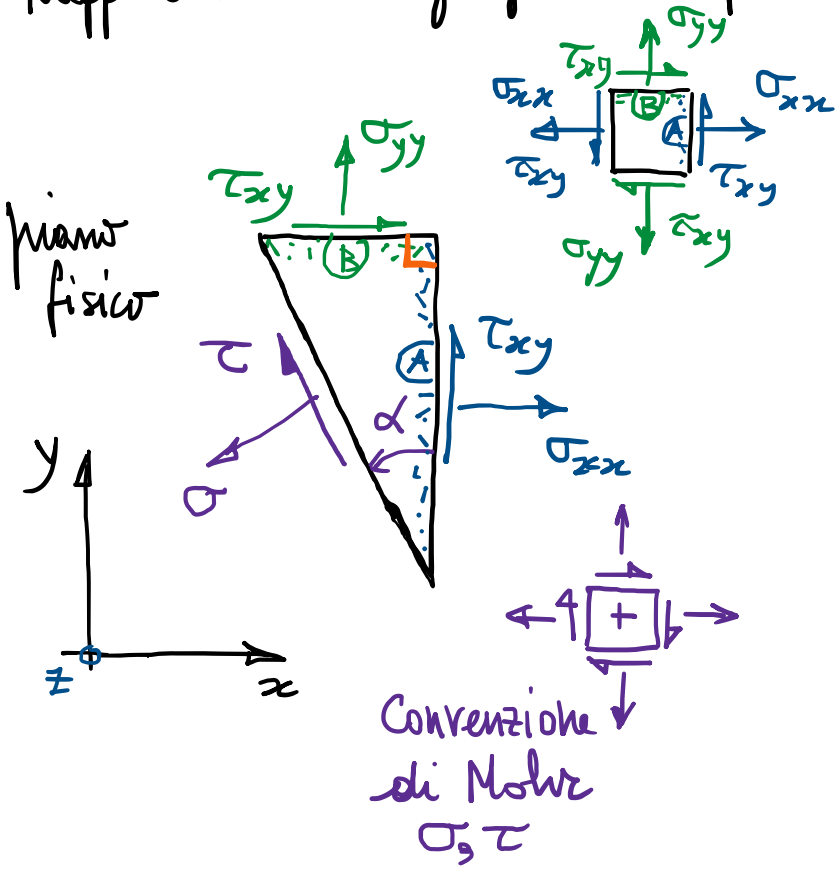
$$= \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2 = R^2$$

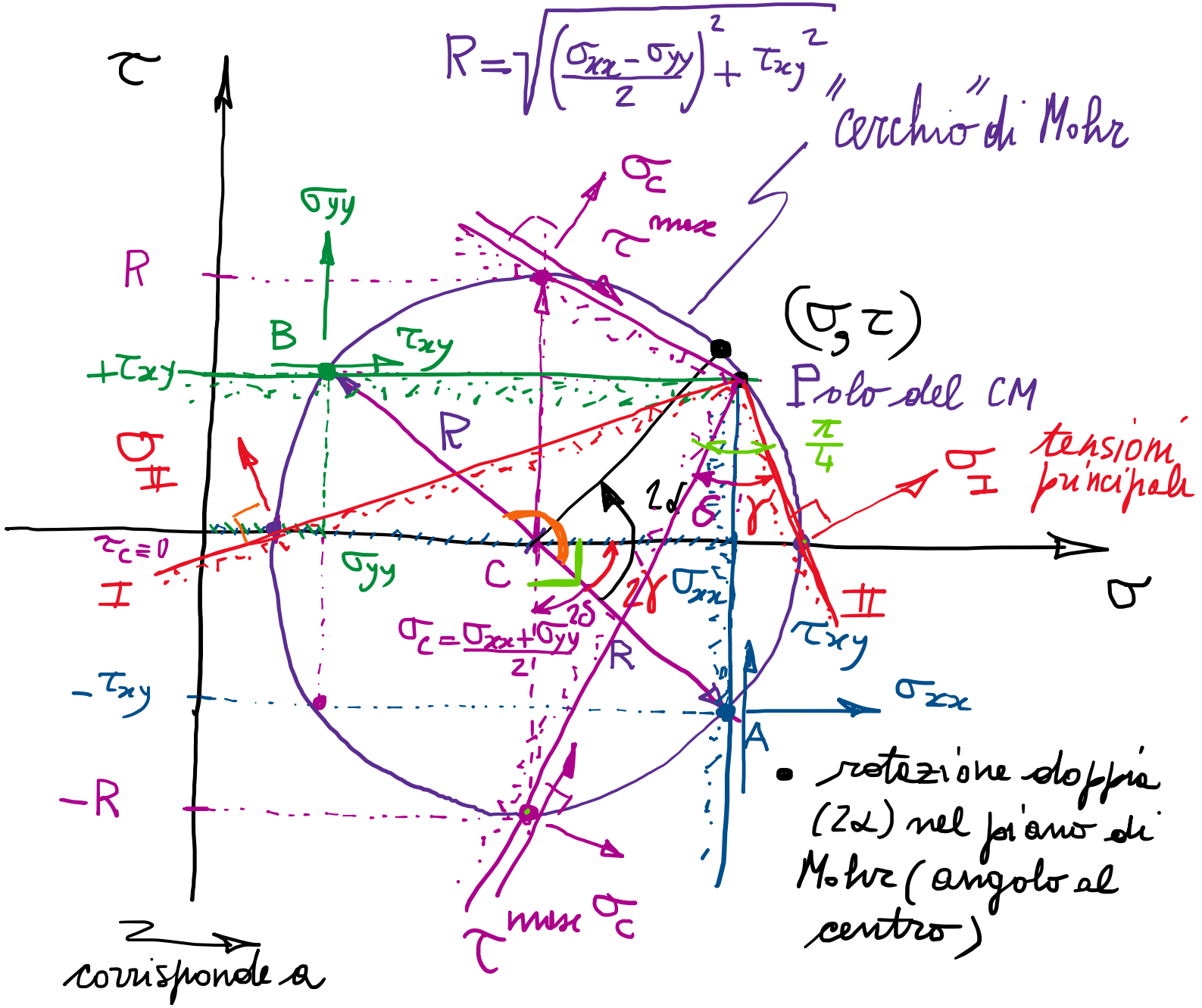
$$(\sigma-\sigma_c)^2 + (\tau - \underbrace{\tau_c}_{\tau_c=0})^2 = R^2 \iff (X-X_c)^2 + (Y-Y_c)^2 = R^2$$

Equazione di circonferenza nel piano X, Y



Rappresentazione grafica nel piano di Mohr (σ, τ):





- giacitura con rotazione α nel piano fisico (nel sovrapporre la faccia verticale a quella inclinata)

- rotazione doppia (2α) nel piano di Mohr (angolo al centro)

Commenti:

- Rotazioni α nel piano fisico corrispondono a rotazioni doppie (2α) nel piano di Mohr (piano delle componenti σ, τ).
- I punti A e B del Cerchio di Mohr (CM) corrispondenti a componenti σ, τ su facce ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) mutuamente $\perp$, risultano diametralmente opposti sul CM ($2\alpha = \pi$)
- le tensioni principali nel piano $\sigma_{I,II}$ sono agevolmente individuate dalle intersezioni del CM con l'asse σ ($\tau = 0$) e rappresentano i valori max e min dello sforzo normale al variare di tutte le giaciture nel piano:

$$\sigma_{I,II} = \sigma_c \pm R = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$\leftrightarrow$ sol. eq.ne caratteristica $\sigma_{III} = 0 \rightarrow I_3 = 0$

- la tensione tangenziale max in valore assoluto è individuata in corrispondenza di σ_c ed è rappresentata dal raggio del CM:

$$\tau^{max} = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

[N.B.: essa si accompagna a $\sigma = \sigma_c$; punti del CM $(\sigma_c, \pm \tau^{max})$]

- Polo del CM, avente la seguente proprietà: la retta per esso (P) e il generico p.to (σ, τ) del CM rappresenta la giacitura della faccia su cui insistono tali componenti σ, τ
[possibilità di rappresentare il piano "fisico" sovrapposto al piano di Mohr] → vedi costruzione su CM

- Tramite P sono pertanto individuabili specifiche direzioni caratteristiche del piano, es.:
  - direzioni principali I, II, inclinate di γ tale che:

$$\tan 2\gamma = \frac{\tau_{xy}}{\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}} = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2}\operatorname{atan}\frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}$$

  - direzioni secondo cui agisce la τ^{max} (misurate a σ_c), inclinate di angolo δ tale che:

$$2\delta + 2\gamma = \pi/2 \;(90^\circ) \longrightarrow \delta + \gamma = \pi/4 \;(45^\circ) \longrightarrow \delta = \frac{\pi}{4} - \gamma$$

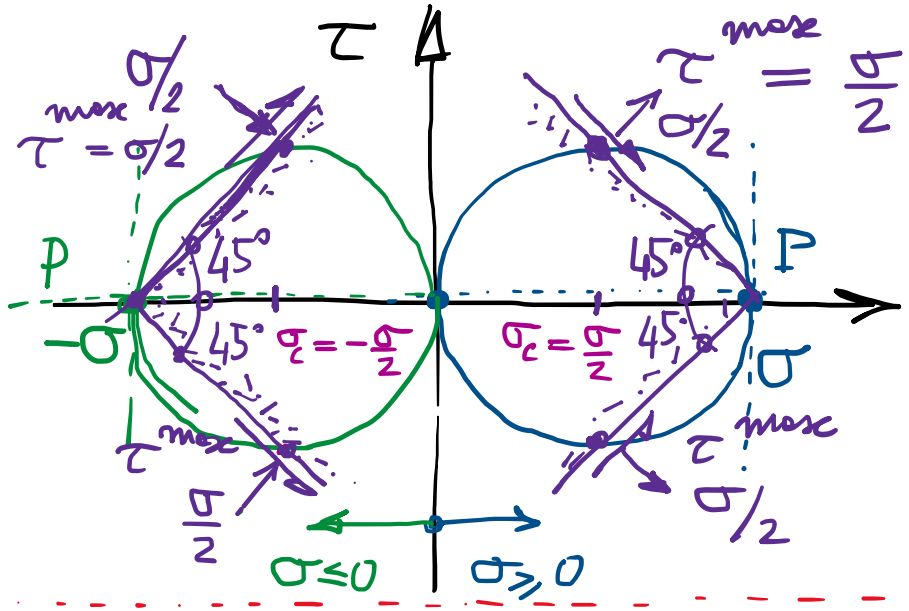
  - pertanto, le direzioni secondo cui agisce la τ^{max} risultano sempre inclinate a 45° rispetto alle direzioni principali.

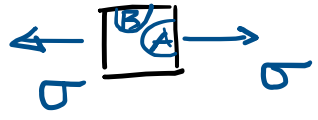
Esempi tipici:

- Stato di sforzo monoassiale di trazione o compressione



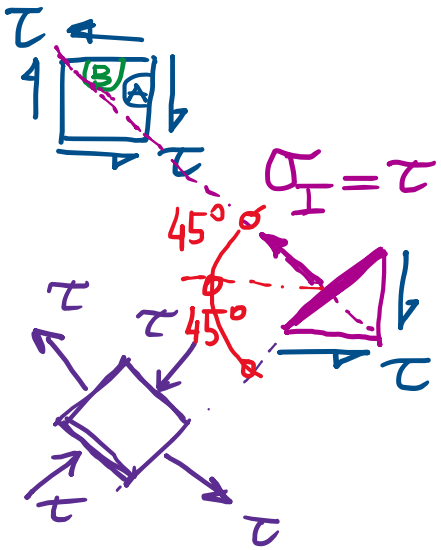
CM tangente all'asse τ, tutto nel semipiano $\sigma \leq 0$

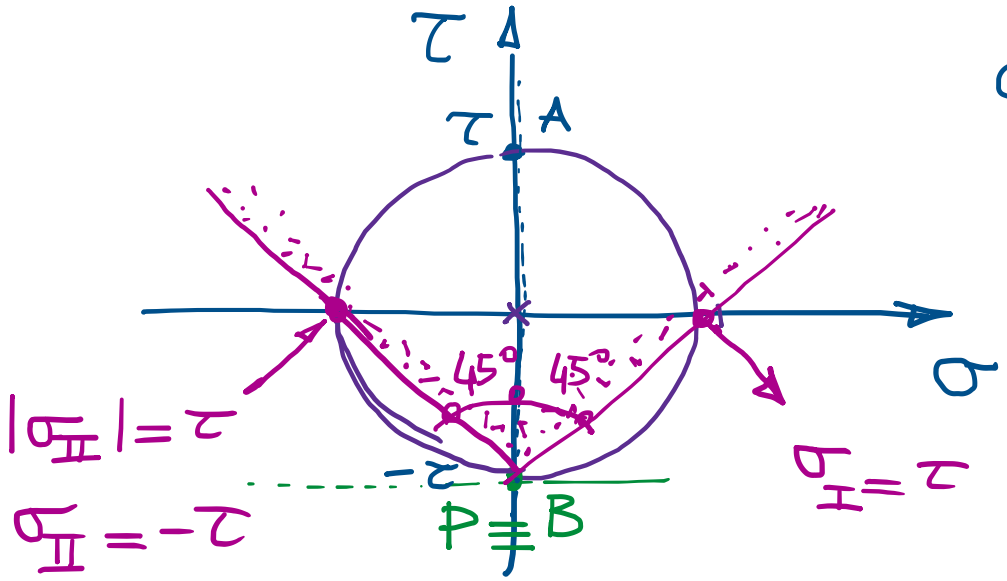




CM tangente all'asse τ, tutto nel semipiano $\sigma \geq 0$

- Stato di sforzo di taglio puro





CM centrato sull'origine degli assi del piano di Mohr

tensioni principali uguali e di segno opposto:

$\sigma_{II} = -\sigma_I$ $(\sigma_I = -\sigma_{II})$