Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Componenti Volumetrica e Deviatorica

$v = I_1$ deformazione volumetrica — deviatori

Deformazione: $\mathcal{E} = \mathcal{E}_V + \mathcal{E}_D = \underbrace{\frac{tr\mathcal{E}}{3}}_{I_1}\mathbb{I} + \mathcal{e} = \frac{v}{3}\mathbb{I} + \mathcal{e} \Rightarrow \mathcal{e} = \mathcal{E} - \frac{tr\mathcal{E}}{3}\mathbb{I}$ di deformaz.

Sforzo: $\sigma = \sigma_V + \sigma_D = \underbrace{\frac{tr\sigma}{3}}_{p}\mathbb{I} + \mathcal{s} = p\mathbb{I} + \mathcal{s} \Rightarrow \mathcal{s} = \sigma - \frac{tr\sigma}{3}\mathbb{I}$ di sforzo

$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & \cdot & \cdot \\ \cdot & 1 & \cdot \\ \cdot & \cdot & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ord. $\left(I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}\right)$

$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}}{3} = \frac{tr\sigma}{3} = \frac{\mathbb{I}:\sigma}{3}$ tensione media

"traceless tensors"

$tr\mathbb{I} = \mathbb{I}:\mathbb{I} = \delta_{ij}\delta_{ij} = 3$

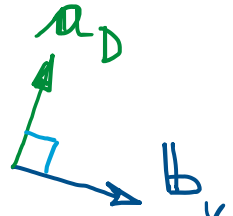
$tr\sigma = I_{ij}\sigma_{ij} = \delta_{ij}\sigma_{ij} = \sigma_{ii}$

Invarianti del deviatore di deformazione $\mathcal{e}$ o di sforzo:

$$\begin{cases} J_1 = tr\mathcal{s} = s_{ii} = \mathbb{I}:\mathcal{s} = tr\sigma - \frac{tr\sigma}{3}tr\mathbb{I} \equiv 0 \text{ per definizione} \\ J_2 = \frac{1}{2}tr\mathcal{s}^2 = \frac{1}{2}tr(\mathcal{s}\cdot\mathcal{s}) = \frac{1}{2}\delta_{ij}s_{ik}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{kj} = \frac{1}{2}s_{jk}s_{kj} = \frac{1}{2}\mathcal{s}:\mathcal{s} = J_2 \\ J_3 = \frac{1}{3}tr\mathcal{s}^3 \end{cases}$$

N.B.: $a_V : b_D = a_D : b_V \equiv 0$

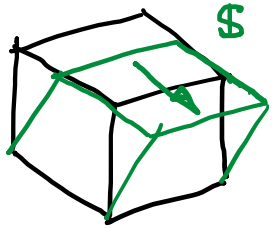
$\frac{tra}{3}\mathbb{I} : b_D = a_D : \frac{trb}{3}\mathbb{I}$ $tra_D = trb_D \equiv 0$



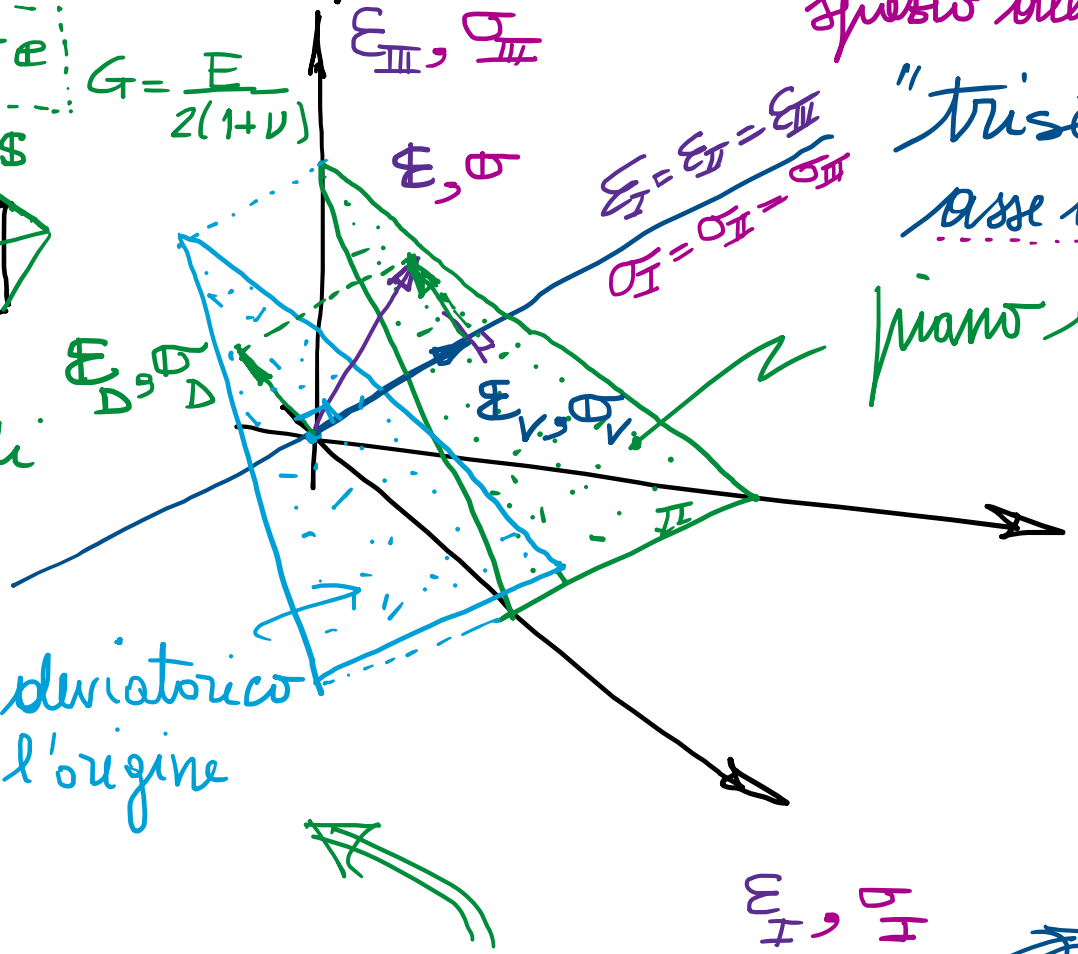
Rappresentazione nello "spazio principale" (spazio delle deformazioni principali / spazio delle tensioni principali)

$e = \frac{\$}{2G}$; $\$ = 2Ge$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$



("deviazione") variazione di forma a volume costante



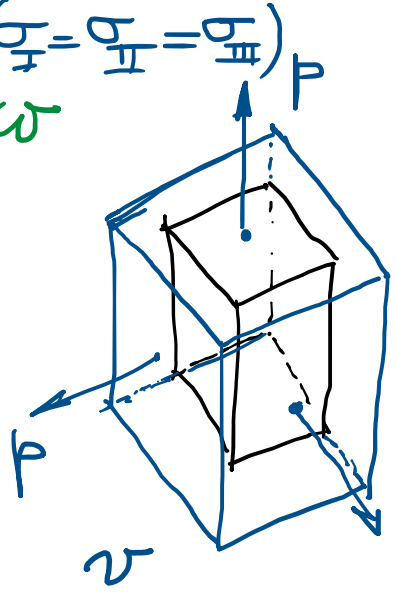
piano deviatorico per l'origine

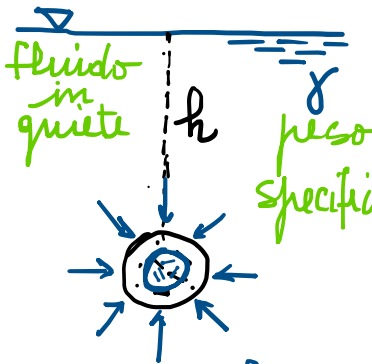
"trisettrice del 1° ottante"

asse idrostatico ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)

piano deviatorico

pallina di materiale isotropo





sforzo idrostatico o sferico o isotropo

variazione di volume a forma costante (omotetica)

$v = \frac{1}{K} p$; $p = Kv$

$K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$ modulo di volume

Disaccoppiamento della risposta volumetrica e deviatorica per materiale isotropo

$\varepsilon_V \leftrightarrow \sigma_V$ $\quad e \leftrightarrow \$$

Risposta deviatorica

$\mathbf{E}(\boldsymbol{\sigma})$ legge di Hooke generalizzato (materiale elastico, lineare, isotropo)

E, ν [K, G]

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} - \frac{\operatorname{tr}\mathbf{E}}{3}\mathbf{I} = -\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}\,\mathbf{I} + \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\operatorname{tr}\mathbf{E}}{3}\mathbf{I}$$

$$= \frac{1+\nu}{E}\boldsymbol{\sigma} - \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3}\frac{\mathbf{I}}{E}\underbrace{(3\nu + 1 - 2\nu)}_{1+\nu}$$

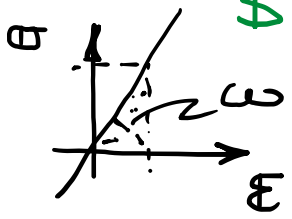
$$= \frac{2(1+\nu)}{2E}\underbrace{\left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3}\mathbf{I}\right)}_{\mathbf{s}} = \frac{1}{2G}\,\mathbf{s} = \mathbf{e} \;;\; \mathbf{s} = 2G\,\mathbf{e}$$

$\frac{\upsilon}{3} = \frac{1}{K}\frac{p}{3} = \frac{3(1-2\nu)}{E\,3}\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\Phi}}{3}$

$2\mathbf{e} = \frac{1}{G}\mathbf{s}$; $\mathbf{s} = G\,2\mathbf{e}$ $\quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$

$\mathbf{e} \leftrightarrow \mathbf{s}$ disaccoppiata della risposta volumetrica

Energia di deformazione:



$$\omega = \frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\sigma}_v + \boldsymbol{\sigma}_d) : (\mathbf{E}_v + \mathbf{E}_d) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_v : \mathbf{E}_v}_{\omega_v} + \underbrace{\frac{1}{2}\boldsymbol{\sigma}_d : \mathbf{E}_d}_{\omega_d}$$

ove

ω_v energia volumetrica

ω_d energia deviatorica

$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$; $G \to \infty$, $\nu \to -1$ deformazione senza variazione di forma

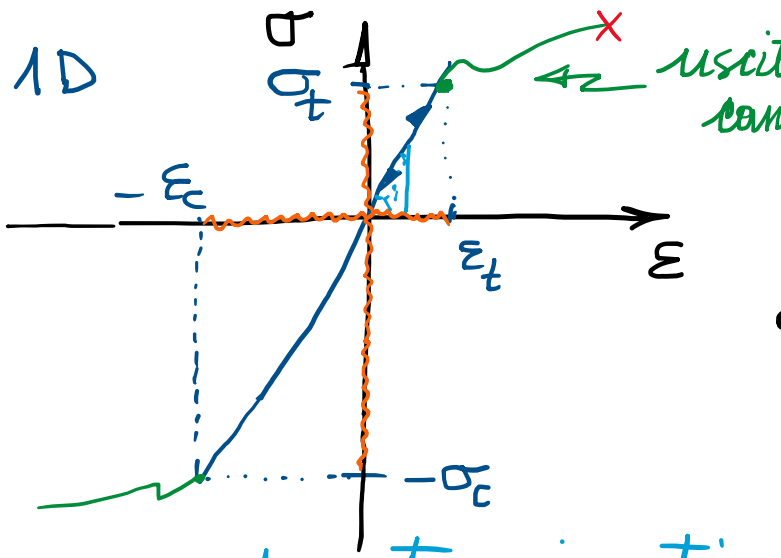
- $\omega_v = \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\operatorname{tr}\boldsymbol{\sigma}}{3}}_{p}\mathbf{I} : \underbrace{\frac{\operatorname{tr}\mathbf{E}}{3}}_{\upsilon}\mathbf{I} = \frac{1}{2}p\,\upsilon$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}K\upsilon^2 = \frac{1}{2}K I_1^{p\,2} \\ \frac{1}{2}\frac{1}{K}p^2 = \frac{1}{2}\frac{1}{9K}I_1^2 \end{cases} > 0$$

- $\omega_d = \frac{1}{2}\mathbf{s} : \mathbf{e}$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}2G\mathbf{e} : \mathbf{e} = 2G\,J_2^p \\ \frac{1}{2}\frac{\mathbf{s}:\mathbf{s}}{2G} = \frac{J_2}{2G} \end{cases} > 0$$

Verifica di resistenza (elastica)



uscita del campo elastico

ev. comportamento asimmetrico trazione/compressione

sforzo di snervamento

$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{f} \rightarrow \sigma_0$

fattore di sicurezza 2÷5(10)

- Un dato materiale, in relazione alla propria natura e allo stato tenso-deformativo cui è sottoposto, può manifestare determinate risorse di "resistenza" (ad es., "elastica", cioè rispetto all'uscita del campo elastico, per giungere poi a "rottura"), definite tramite opportuni criteri di resistenza, idonei allo scopo.

- Verifica di resistenza $G.I.P.(\sigma, \varepsilon) \leq R$

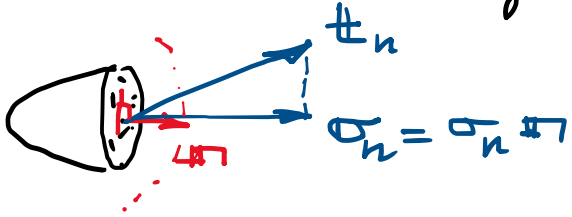
  Grandezza indice del pericolo — Resistenza (elastica)

- Nel dominio degli sforzi: $\sigma_{eq}(\sigma, \varepsilon) \leq \sigma_0$

  "tensione equivalente" (quantità scalare) — Tensione ammissibile

1) Criterio di Galileo – Rankine – Navier (vedi "mensole di Galileo")

Assume come G.I.P. lo sforzo normale (max, min)

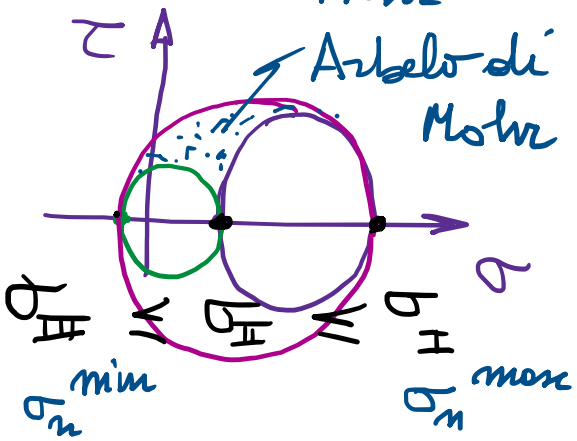


$$-\sigma_c \leq \underbrace{\sigma_n^{min} \; ; \; \sigma_n^{max}}_{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}} \leq \sigma_t$$

tensioni principali

Cerchi di Mohr

Arbelo di Mohr



6 diseguaglianze

$$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_t$$
$$-\sigma_c \leq \sigma_{II} \leq \sigma_t$$
$$-\sigma_c \leq \sigma_{III} \leq \sigma_t$$

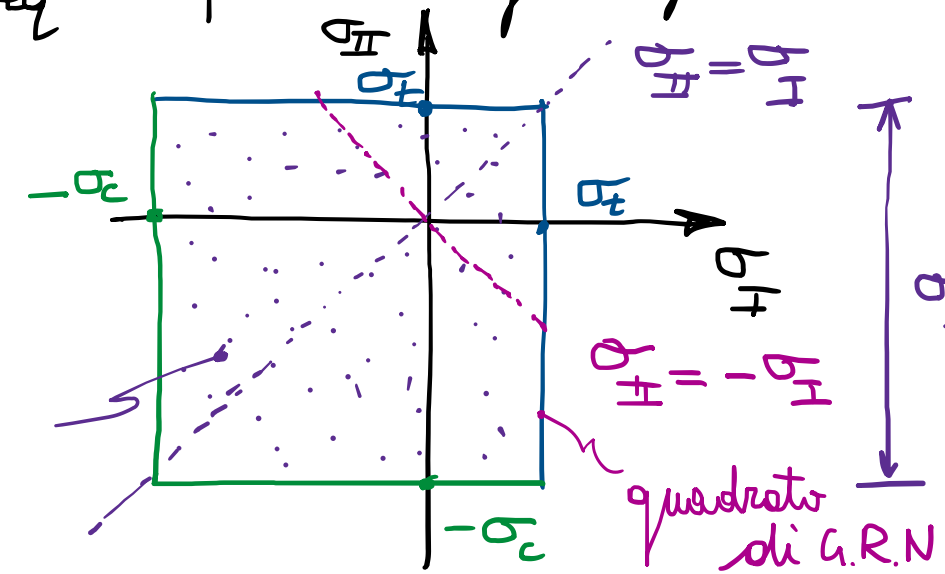
"cubo" di G.R.N. (nello spazio delle tensioni principali)

4 diseguaglianze per sforzo piano ($\sigma_{III} = 0$)

$$-\sigma_c \leq \sigma_I \leq \sigma_t$$

$I = I, II, III$

$\sigma_{eq} = \sigma_I$ tensioni principali

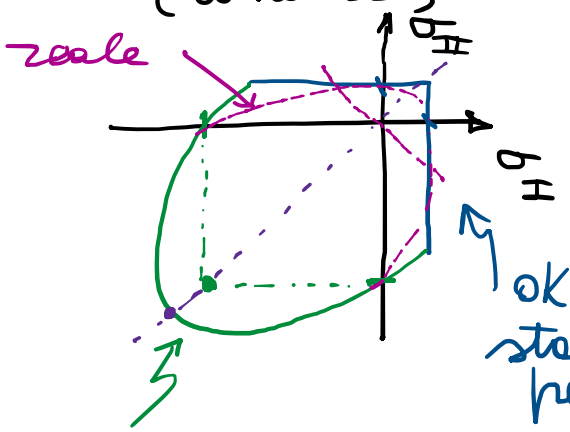


dominio di resistenza di G.R.N.

- Idoneo per materiali a comportamento non simmetrico a trazione/compressione (in particolare per stati di prevalente trazione, in materiali "lapidei")

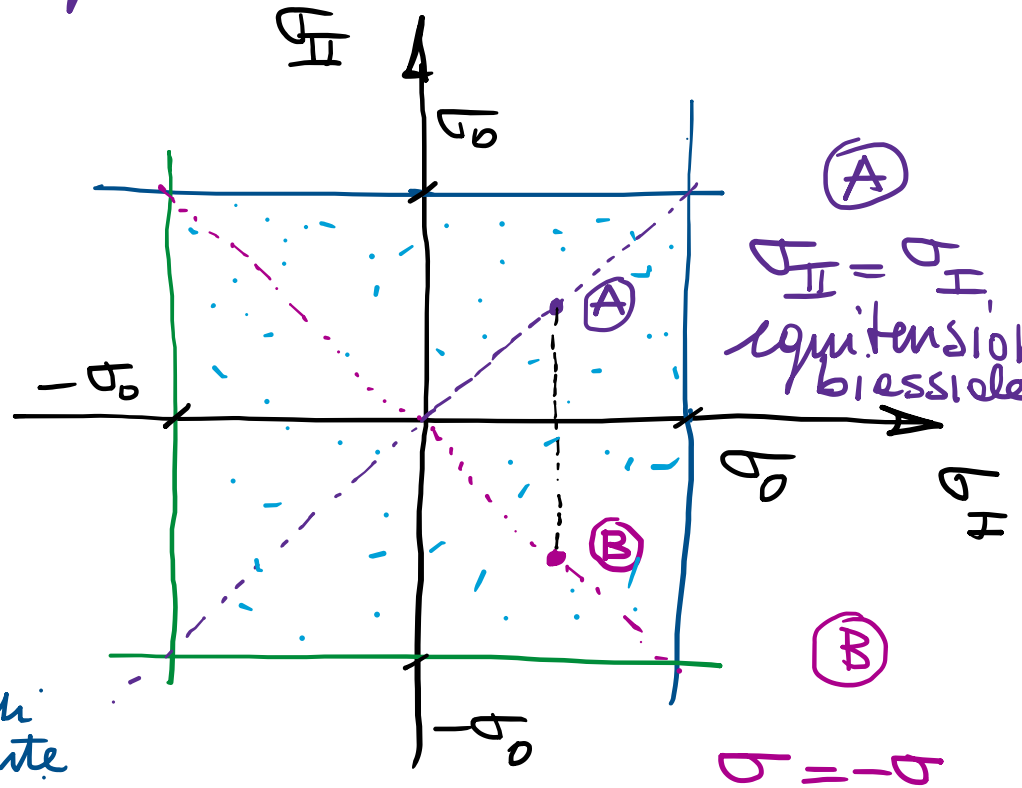
- Per materiali a comportamento simmetrico t/c, non idoneo a distinguere il diverso livello di pericolosità di stati A ($\sigma_{II} = \sigma_I$) e B ($\sigma_{II} = -\sigma_I$)

materiale "lapideo" (come CLS)



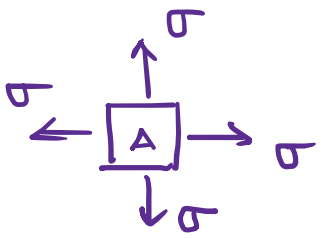
OK per stati di prevalente trazione

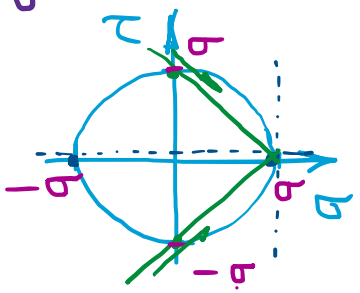
"zero" delle tensioni (con resistenza maggiore in compressione)



$\sigma_t = \sigma_c = \sigma_0$

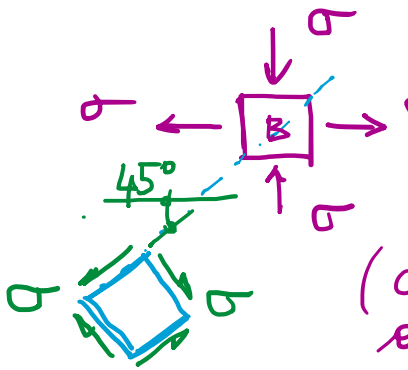
(A) $\sigma_{II} = \sigma_I$, equitensione biassiale





maggiore livello di pericolosità (contorazione dominio lungo $\sigma_{II} = -\sigma_I$)

(B) $\sigma_{II} = -\sigma_I$ taglio puro



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuoue scienze

Attenenti alla

MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;

del Signor

GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.

Con vna Appendice del centro di grauità d' alcuni Solidi.



IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

