Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 18

2) Criterio di resistenza di de Saint Venant - Grashof

- Concetto: duale rispetto a G.-R.-N., assume come G.I.P. la deformazione normale massima (e minima):

$$-\varepsilon_c \le \varepsilon_n^{min}, \quad \varepsilon_n^{max} \le \varepsilon_T$$

$$\Updownarrow$$

"traduzione" ↓

$$-\varepsilon_c \le \varepsilon_1 \le \varepsilon_T$$

- Traslazione del criterio nel dominio degli sforzi ↓ tramite legge costit. (Hooke generalizzata)

$$-\frac{\sigma_c}{E} = -\varepsilon_c \le \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\nu}{E}(\sigma_J + \sigma_K) \le \varepsilon_T = \frac{\sigma_T}{E}$$

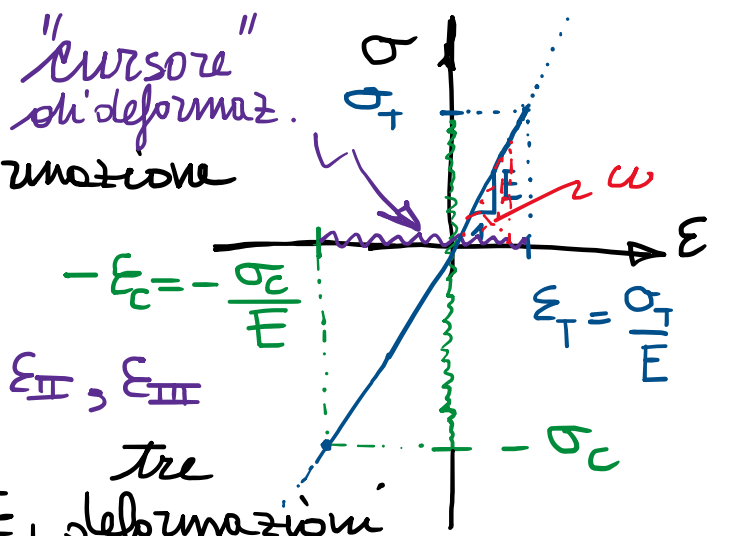
$$-\sigma_c \le \underbrace{\sigma_1 - \nu(\sigma_J + \sigma_K)}_{\sigma_{eq}(\sigma,\nu)} \le \sigma_T$$

↑ dipendente da ν (coefficiente di contrazione trasversale o di Poisson)

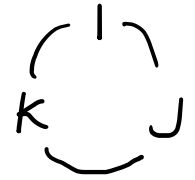
N.B. $-1 < 0 \le \nu < \frac{1}{2}$ materiali ingegneristici

N.B.: criterio fondato sulla deformazione, dipendente da parametri elastici (un parametro elastico: ν)

6 diseguaglianze nello spazio degli sforzi principali $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$



$\sigma \rightarrow \varepsilon_I, \varepsilon_{II}, \varepsilon_{III}$


I
K
J

tre ε_1 deformazioni principali

$$\varepsilon_n^{min} = \varepsilon_{III} \le \varepsilon_{II} \le \varepsilon_I = \varepsilon_n^{max}$$

- Per stato di sforzo piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$), le 6 disequazioni divengono:

$$-\sigma_c \leq \sigma_I - \nu\sigma_{II} \leq \sigma_T$$

$$-\sigma_c \leq \sigma_{II} - \nu\sigma_I \leq \sigma_T$$

$$-\sigma_c \leq -\nu(\sigma_I + \sigma_{II}) \leq \sigma_T$$

- Dominio di resistenza: intersezione di due triangoli isosceli, dipendenti da σ_T, σ_c, ν.

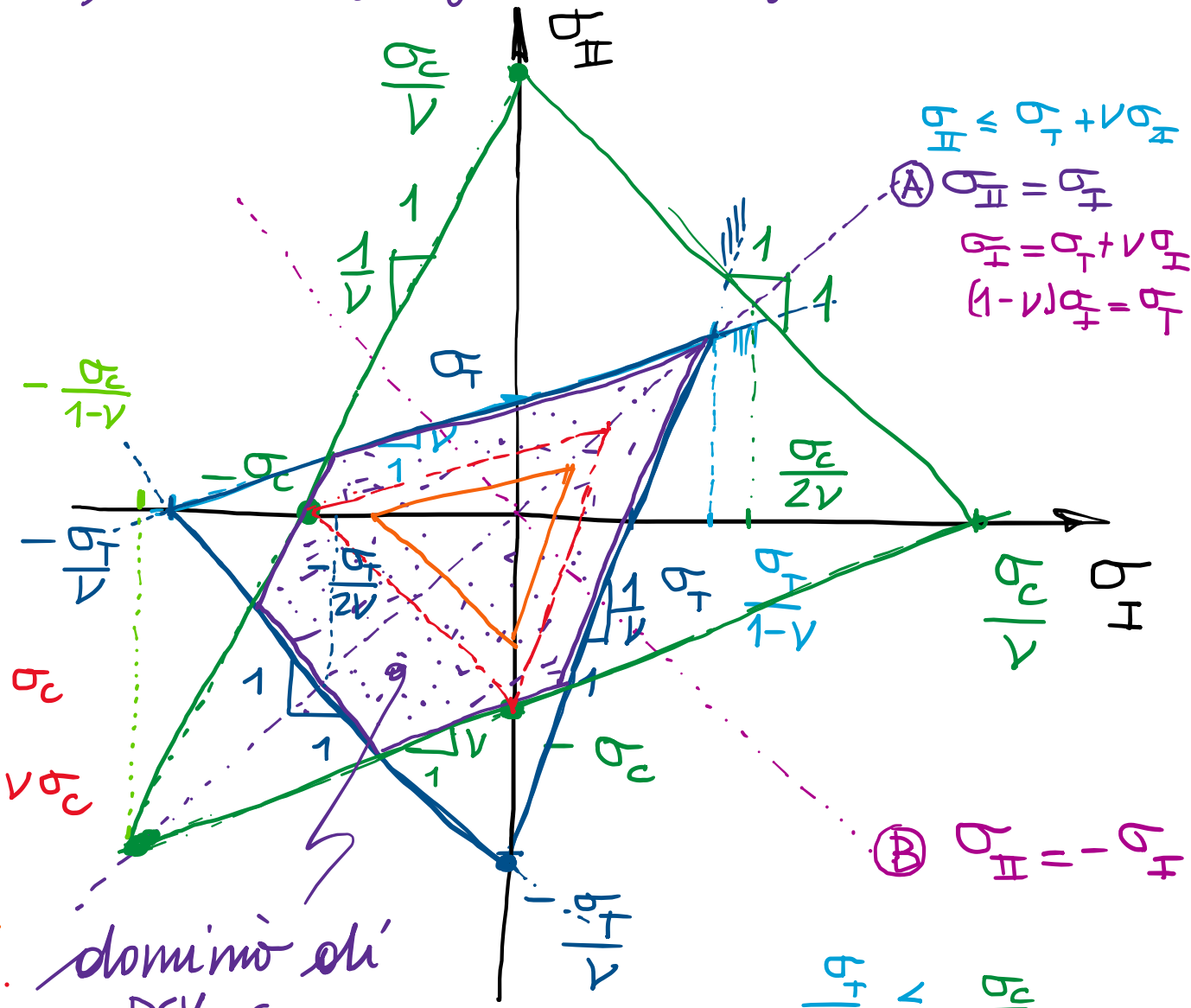
- Forma rombica se:

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

$$\frac{\sigma_T}{\nu} = \sigma_c$$

$$\sigma_T = \nu\sigma_c$$

- Può cadere in difetto se $\sigma_T < \nu\sigma_c$, per materiali con marcato comportam. asimmetrico a trazione/compressione - (non raggiungibile la resist. a compressione).



dominio di DSV-G

(qui, forma pentagonale)

$\sigma_{II} \leq \sigma_T + \nu\sigma_I$

(A) $\sigma_{II} = \sigma_I$

$\sigma_I = \sigma_T + \nu\sigma_I$

$(1-\nu)\sigma_I = \sigma_T$

(B) $\sigma_{II} = -\sigma_I$

$$\frac{\sigma_I}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{2\nu}$$

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq \frac{\sigma_c}{\sigma_T} \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

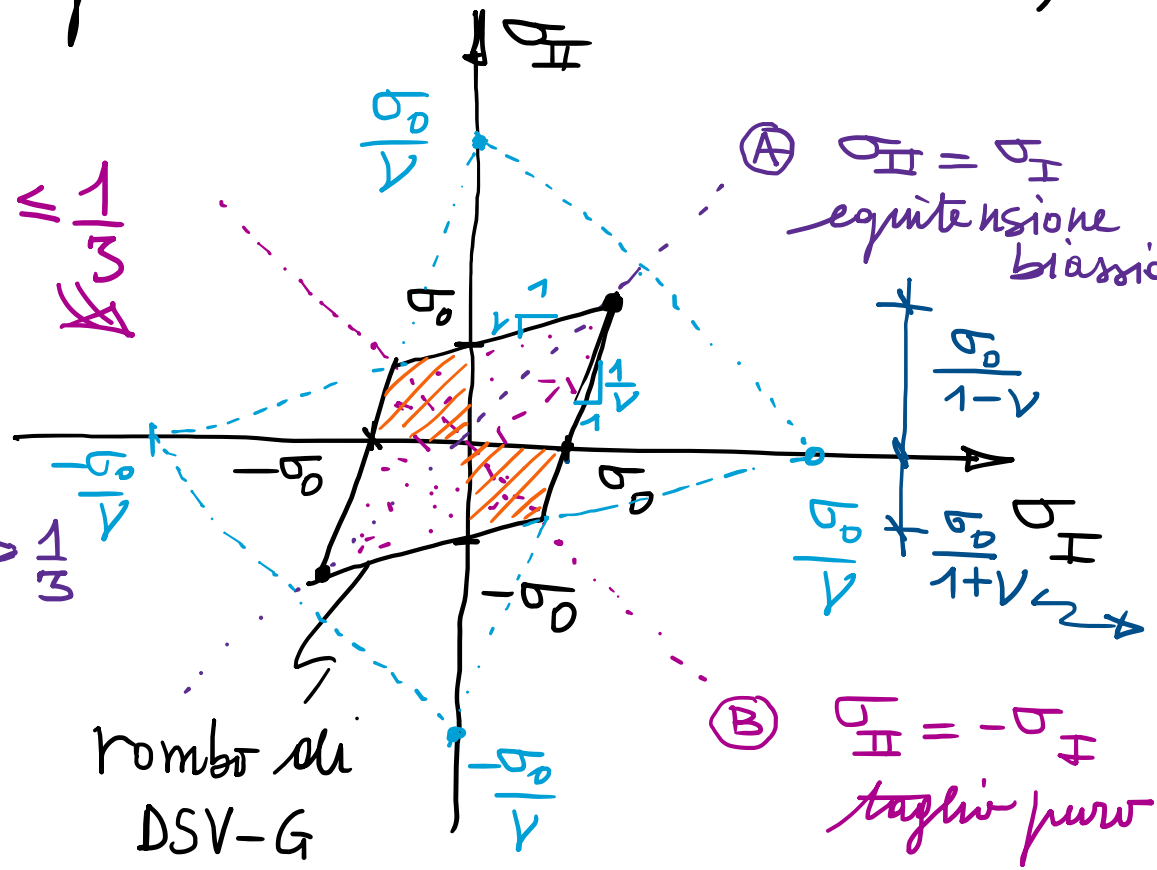
- Per materiali a comportamento simmetrico a trazione/compressione, cioè con

$$\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_C$$

- Forma rombica: $\nu \leq \frac{1}{3}$

$$\frac{2\nu}{1-\nu} \leq 1 \leq \frac{1-\nu}{2\nu}$$

- Forma esagonale: $\nu > \frac{1}{3}$



rombo di DSV-G

(A) $\sigma_{II} = \sigma_I$ equitensione biassiale

$\nu \to 0 \Rightarrow$ G.R.N.

(B) $\sigma_{II} = -\sigma_I$ taglio puro

resistenza a taglio secondo DSV-G (dipend. da ν)

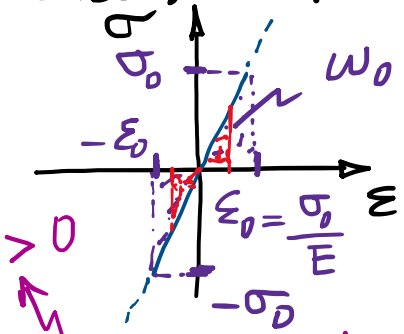
- Utilizzato per la verifica di resistenza in presenza di stati di sforzo piano alle de Saint Venant (vedi pb. di DSV), caratterizzati da tensioni principali di segno opposto: $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$.
- Recepisce il diverso (maggiore) livello di pericolosità di stati (B) vs. (A).

3) Criterio di Beltrami (per materiali a comportamento simmetrico trz./compz.)

- Di significato energetico, assume come G.I.P. l'energia di deformazione elastica:

$$\omega = \frac{1}{2}\sigma : \varepsilon \le \omega_0 = \text{valore ammissibile a limite elastico}$$

$$= \frac{1}{2}\sigma_0\varepsilon_0 \quad (\text{da prova monoassiale}) = \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E} > 0$$



indipendentemente dal segno dello stato di sforzo

- Nel dominio degli sforzi, esprimendo ε tramite legge costitutiva: [legge di Hooke generalizzata]

$$\varepsilon = -\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma\, \mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E}\sigma$$

quadratica in σ

$$\omega = \frac{1}{2}\left(-\frac{\nu}{E}\operatorname{tr}\sigma\ \underbrace{\sigma : \mathbb{I}}_{\operatorname{tr}\sigma} + \frac{1+\nu}{E}\underbrace{\sigma : \sigma}_{\sigma_{ij}\sigma_{ij}}\right)$$

rif. princ. $[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_I & & \\ & \sigma_{II} & \\ & & \sigma_{III} \end{bmatrix}$

$$(\operatorname{tr}\sigma)^2 = (\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2 = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 2(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}) \sim \sigma^2$$

$$\sigma : \sigma = \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{E}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})\right] \le \frac{1}{2}\frac{\sigma_0^2}{E}$$

insensibili al segno dello stato di sforzo

ellissoide nello spazio $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$

Tensione equivalente di Beltrami σ_{eq}^B

$$\sigma_{eq} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - 2\nu(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})} \le \sigma_0$$

(dipendente da ν)

– Nel caso di stato di sforzo piano (ad es. $\sigma_{III} = 0$)

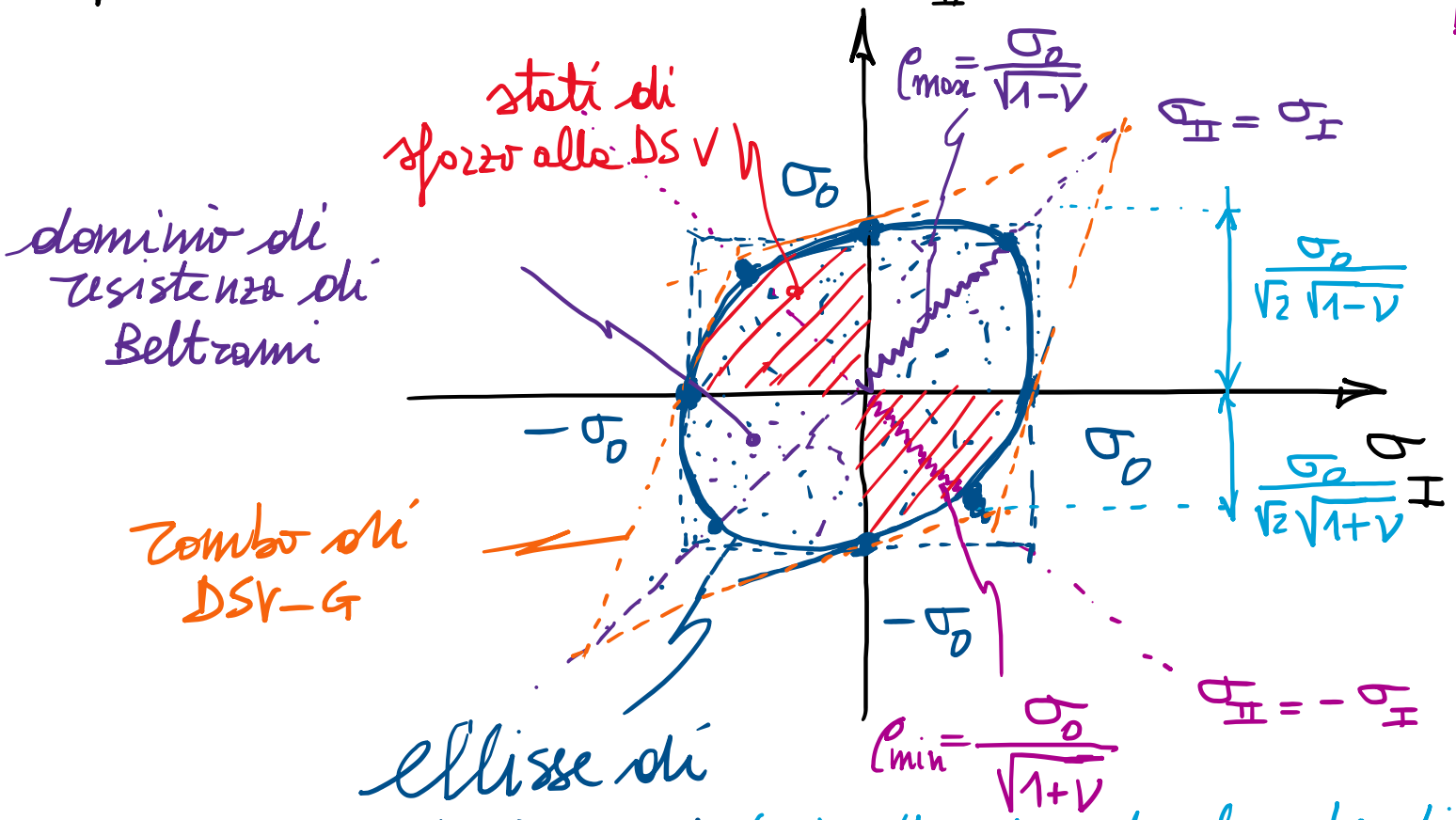
$$\sigma_{eq}^{B} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\,\sigma_I\sigma_{II}} \leq \sigma_0 \qquad \sigma_{II}$$

$\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - 2\nu\,\sigma_I\sigma_{II} = \sigma_0^2$

eq.ne di ellisse ruotata di 45° simmetrica rispetto alle bisettrici, di semiassi ρ_{max} e ρ_{min}

$\nu \leq 1/3$

per $\nu \to 1/2$ (→ vM): $\rho_{max}^{max} = \sqrt{2}\,\sigma_0$, $\rho_{min}^{min} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\sigma_0$



$= \tau_0$ resistenza a taglio secondo Beltrami

(iscritto e tangente al rombo di DSV–G)

– Utile a rappresentare la verifica di resistenza per materiali e compost. simmetrici, per stato di sforzo piano (non adatto per stati di sforzo triassiali ~ idrostatici), in particolare alle DSV, con $\sigma_I \cdot \sigma_{II} \leq 0$.

4) Criterio di Huber-Hencky-von Mises ⟸ per materiali metallici ($\sigma_0 = \sigma_T = \sigma_c$)

- Ancora di significato energetico ma considera la sola energia deviatorica ai fini del raggiungimento (dell'uscita dal) del limite elastico del materiale (osservazione sperimentale) [celle triassiali]

- Assume come G.I.P. l'energia deviatorica: (Beltrami: $w = w_v + w_D$; von Mises)

$$w_D = \frac{1}{2}\, \$: e \leq w_D^0$$ (per es. con rif. ad una prova monoassiale di trazione)

- Nel dominio degli sforzi, da legge cost. (deviatorica) $e = \frac{\$}{2G}$; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

$$w_D = \frac{1}{2}\, \$: \frac{\$}{2G} = \frac{3J_2}{32G} = \frac{3J_2}{6G} \leq \frac{3J_2^0}{6G} \rightarrow \sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} \leq \sqrt{3J_2^0}$$

ove:

$$\$ = \sigma - \frac{\mathrm{tr}\sigma}{3} I$$

deviatore di sforzo

$$p = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$ tensione media

$$[\$]^2 = \begin{bmatrix} (\sigma_I - p)^2 & & \\ & (\sigma_{II} - p)^2 & \\ & & (\sigma_{III} - p)^2 \end{bmatrix}$$ rif. princ.

invariante secondo del deviatore $J_2 = \frac{1}{2}\, \$: \$ = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{2} \mathrm{tr}\, \$^2 = \frac{1}{2} \sum_i s_i^2$ ..... $s_1 = \sigma_1 - p$

- Sviluppando, si ottiene:

$$3J_2 = \frac{3}{2}\left[(\sigma_I - p)^2 + (\sigma_{II} - p)^2 + (\sigma_{III} - p)^2\right] \qquad p = \frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\left[\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 + 3p^2 - 3\cdot 2p\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)\right]$$

$$-3p^2 = -3\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III}}{3}\right)^2 = -\frac{(\sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III})^2}{3}$$

$$= \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{3}\left[3(\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - (\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2) - 2(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})\right]$$

$$= \sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})$$

$\Rightarrow$ $\sigma_I = \sigma_0$; $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

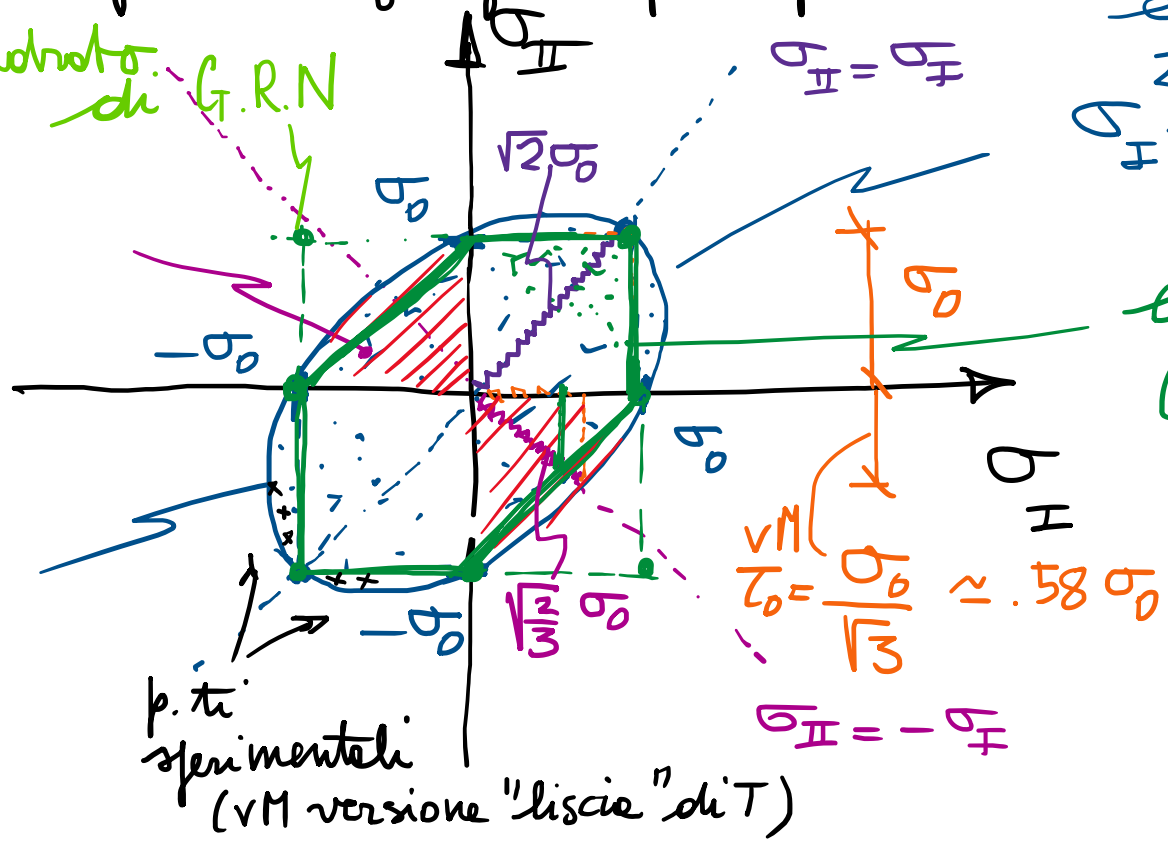
$3J_2^0 = \sigma_0$ (coincide con $|\sigma_I|$ nel caso monoassiale)

tensione equivalente di von Mises

$$\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{3J_2} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 + \sigma_{III}^2 - (\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III})} \leq \sigma_0$$

- Simile a Beltrami, con $\nu \to 1/2$, corrisponde ad annullare ω_V, $\omega = \omega_D$, per materiale incomprimibile (come se fosse).
- Indipendente dai parametri elastici ($\nu \simeq 0.3$ per mat. metallici). (ν è assegnato ma σ_{eq}^{vM} è indip. da ν)
- Caso piano ($\sigma_{III} = 0$): $\sigma_{eq}^{vM} = \sqrt{\sigma_I^2 + \sigma_{II}^2 - \sigma_I\sigma_{II}} \leq \sigma_0$

- Rappresentazione nel piano degli sforzi principali:



dominio di resistenza di von Mises

ellisse di von Mises

ellisse di von Mises

$$\sigma_I^2+\sigma_{II}^2-\sigma_I\sigma_{II}=\sigma_0^2$$

esagono di Tresca (iscritto nell'ellisse di von Mises – per parametrizzazione su prova di trazione)

$$\tau_0^T=\frac{\sigma_0}{2}=.5\,\sigma_0$$

- Idoneo a rappresentare la verifica di resistenza (e il criterio di plasticità) per materiali metallici, sottoposti a stati di sforzo generici, anche triassiali, nonché per sforzi piani, in particolare alle DSV ($\sigma_I\cdot\sigma_{II}\leq 0$) – Interpreta correttamente l'uscita del campo elastico per stati tenso-deformativi deviatorici.

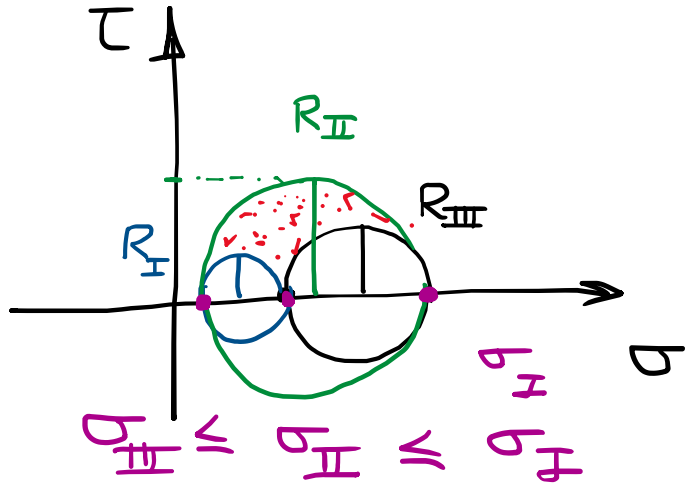
5) Criterio di Guest-Tresca (materiali metallici)

- Deriva da G.R.N., sempre nel dominio degli sforzi, ma individuando come critici gli sforzi taglianti, cioè la τ^{max} ⇒ G.I.P.

$$\tau^{max} \leq \tau_0$$ resist. a taglio del materiale

- Cerchi di Mohr (e Arbelo di Mohr)

$$\tau^{max} = \max\left\{ R_1 = \frac{|\sigma_I - \sigma_{III}|}{2} \right\} \leq \tau_0 = \frac{\sigma_0}{2}$$



$$-\sigma_0 \leq \sigma_I - \sigma_{II} \leq \sigma_0$$

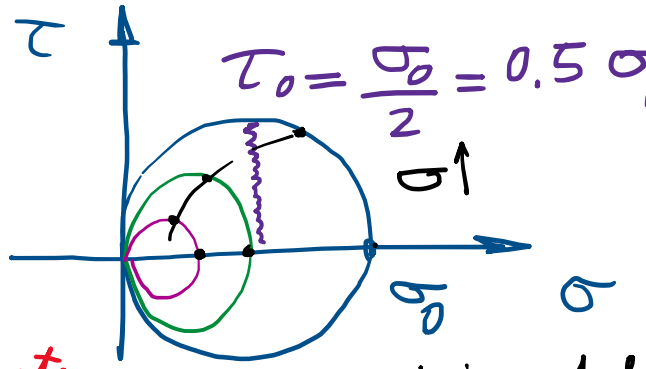
$$-\sigma_0 \leq \sigma_{II} - \sigma_{III} \leq \sigma_0$$

$$-\sigma_0 \leq \sigma_{III} - \sigma_I \leq \sigma_0$$

6 disequaglianze

↑ Vedi G.R.N.

σ_{eq}^{T}



- Caso piano $\sigma_{III} = 0$

⇒ rappresentazione a pagina precedente (esagono di Tresca)

- Criterio più cautelativo.

Osservaz. sperimentale: p.ti σ_I, σ_{II} tra σ_M e T