Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)
CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

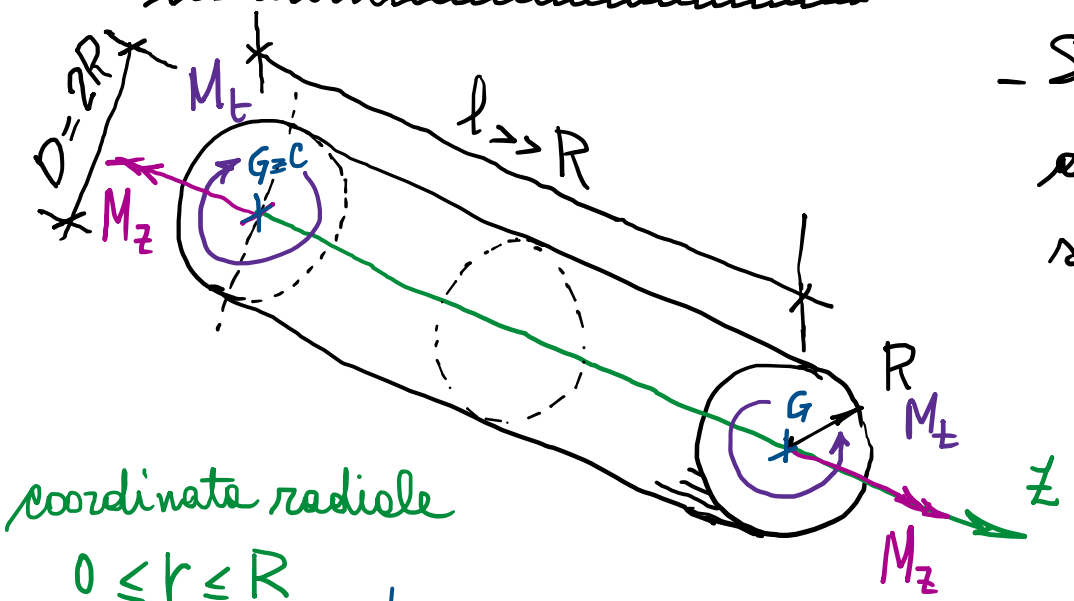
(ICAR/08 - SdC ; 9 CFU)

A.A. 2020/2021

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 25

4) Azione torcente o torsione (circolare)



- Si consideri un prisma di DSV di sezione circolare, di raggio R (diametro $D = 2R$, area $A = \pi R^2 = \frac{\pi D^2}{4}$) soggetto a momento torcente costante $M_t = M_z$.

- In analogia coi casi di DSV precedentemente visti, in particolare al caso della flessione retta, si procede con approccio seminverso agli sforzi, ipotizzando, in base a considerazioni di simmetria (polare rispetto a $G \equiv C$), il seguente campo di sforzo:

$$\left(\sigma_{ij} \equiv 0 \;;\; \tau_{zr} \equiv 0\right);\quad \tau_{zt} = K\,r \quad (K = \text{cost})$$

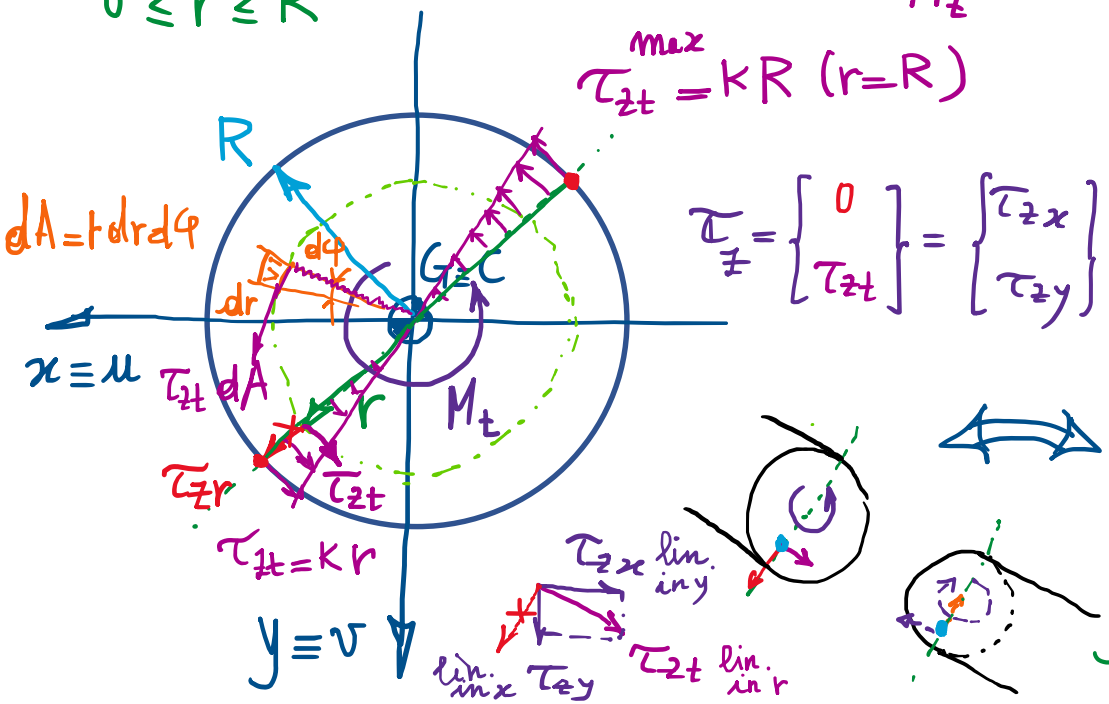
τ_{zr} uguale e di segno opposto → nulla

lineare a farfalla lungo qualsiasi diametro (con valore nullo in $G \equiv C$)

coordinata radiale

$0 \le r \le R$

$\tau_{zt}^{max} = KR \quad (r = R)$



$$\underline{\tau}_z = \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{zt} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}$$

- Si verifica che tutte le eq.ni governanti del pb. elastico lineare risultino soddisfatte. ✓
- Resta da imporre la condizione di equivalenza statica tra il campo ipotizzato delle τ_{zt} e il momento torcente M_t che le ha generate:

$$\int_A \tau_{zt}\, dA\, r = M_t$$

$\tau_{zt} = kr$

$$k \int_A r^2 dA = M_t \quad \Rightarrow \quad k = \frac{M_t}{J_G}$$

J_G momento d'inerzia polare rispetto a $G \equiv C$

$$\Rightarrow \quad \tau_{zt} = kr = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$$

Analogia con flessione retta

$\sigma_{zz} = ky = \frac{M_x}{J_x} y$

$\sigma^{max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4M_x}{\pi R^3}$

W_x (modulo di res. a fless.) $= \frac{\pi R^3}{4} = \frac{W_t}{2}$

$$[L]^4 \quad J_G = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 \, r\, dr\, d\varphi = \int_0^{2\pi} \frac{r^4}{4}\Big|_0^R d\varphi$$

r^3

$$= \frac{R^4}{4_2} 2\pi = \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$r^2 = x^2 + y^2$

$J_G = J_x + J_y = 2J_r$

$J_r = \frac{J_G}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$

⇒ flessione (retta)

$$\tau^{max} = \tau_{zt}^{max} = \tau_{zt}(r=R) = \frac{M_t R}{J_G} = \frac{M_t}{J_G/R} = \frac{M_t}{W_t}$$

Modulo di resistenza a torsione

$$W_t = \frac{J_G}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} \quad [L]^3$$

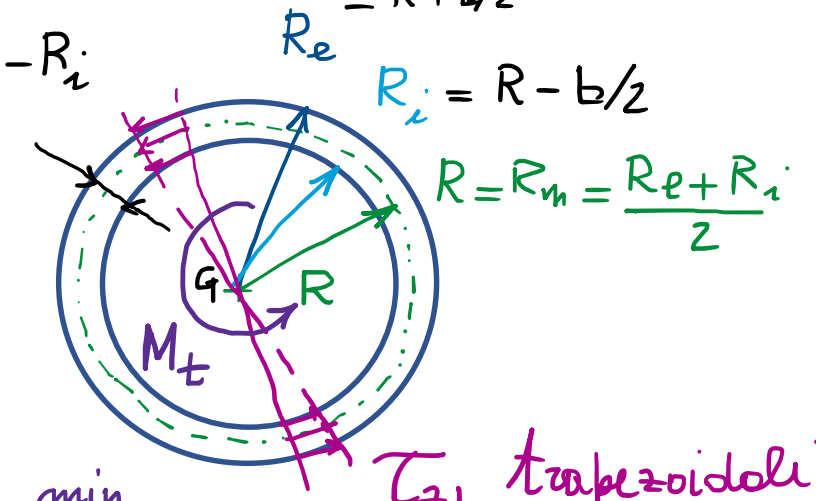
(parametro per cui dividere M_t per trovare la τ^{max})

$$= \frac{2M_t}{\pi R^3} = \tau^{max}$$

– Sezione circolare cava

$= R + b/2$

$b = R_e - R_i$



τ_{zt} trapezoidali sullo spessore

$R_i \le r \le R_e$

$r = R_i : \tau^{min}$

$r = R_m : \tau^{m}$

$r = R_e : \tau^{max}$

$$\tau^m = \frac{M_t}{2\pi R^2 b \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]}$$

$b \sim \frac{1}{10} R$ parete sottile

$\cdots\cdots\rightarrow$ se $\frac{b}{R} \to 0$

2 CdSdC

Torsione nei profili sottili chiusi

Bredt

$$\tau \simeq \frac{M_t}{2\pi R^2 b}$$

τ cost. sullo spessore

Ω area racchiusa all'interno della linea media

$$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r$$

$$J_G = \frac{\pi}{2}\left(R_e^4 - R_i^4\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(R_e^2 + R_i^2\right)\left(R_e^2 - R_i^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2\right)\left(\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{b}{2}\right)^2\right)$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb + R^2 + \frac{b^2}{4} - Rb\right) \cdot$$

$$\left(R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb - R^2 - \frac{b^2}{4} + Rb\right)$$

$$= \frac{\pi}{2} 2\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right) 2Rb = 2\pi Rb\left(R^2 + \frac{b^2}{4}\right)$$

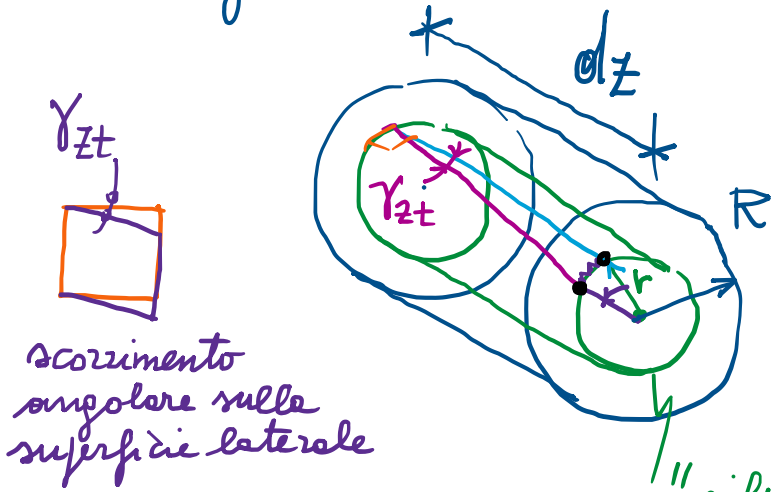
$$= 2\pi R^3 b\left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right] = J_G$$

- Campo di deformazione:

$\varepsilon_{ij} = 0$ tranne $\quad \gamma_{zt} = \dfrac{\tau_{zt}}{G} = \dfrac{M_t}{G J_{G_c}}\, r$

G: modulo di elasticità tangenziale o " " taglio $\quad G = \dfrac{E}{2(1+\nu)}$

- Deformazione del concio di prisma di lunghezza dz:



scorrimento angolare sulla superficie laterale

"cilindretto" interno con superficie laterale e distanza radiale r

rotazione rigida nel piano della sezione, di entità $d\vartheta$ su base dz (rotaz. relativa tra sez. a distanza dz)

$d\vartheta \;\; \tan\gamma_{zt}\, dz = r\, d\vartheta$

$\dfrac{M_t}{G J_G}\, r\, dz = r\, d\vartheta \quad \forall r$

$\Rightarrow \boxed{d\vartheta = \dfrac{M_t\, dz}{G \cdot J_G}}$ rigidezza torsionale

$d\varphi = \dfrac{M_x\, dz}{E \cdot J_x}$ flessione — rigidezza flessionale

- Generalizzazione per sezioni di forma generica: → CdSdC

$d\vartheta = \dfrac{M_t}{G J_t}\, dz = \eta\, \dfrac{M_t}{G J_G}\, dz$

$J_t = \dfrac{J_G}{\eta} \le J_G$

J_t: momento d'inerzia torsionale; $\eta = \dfrac{J_G}{J_t} \ge 1$ fattore di torsione (proprietà geom. sez. trasv.)

Intero prisma:

$\boxed{\Delta\vartheta = \dfrac{M_t\, \ell}{G \cdot J_G}}$ rotaz. relativa tra le basi del prisma