Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

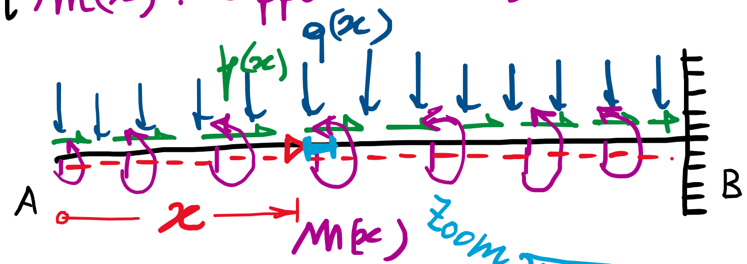
A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 07

Equazioni indefinite di equilibrio delle travi (rettilinee)

$$\begin{cases} p(x): \text{carico assiale distribuito} \\ q(x): \text{carico trasversale distribuito} \\ m(x): \text{coppie distribuite} \end{cases} \qquad \frac{[F]}{[L]} \qquad \frac{[F]\cancel{[L]}}{\cancel{[L]}}$$

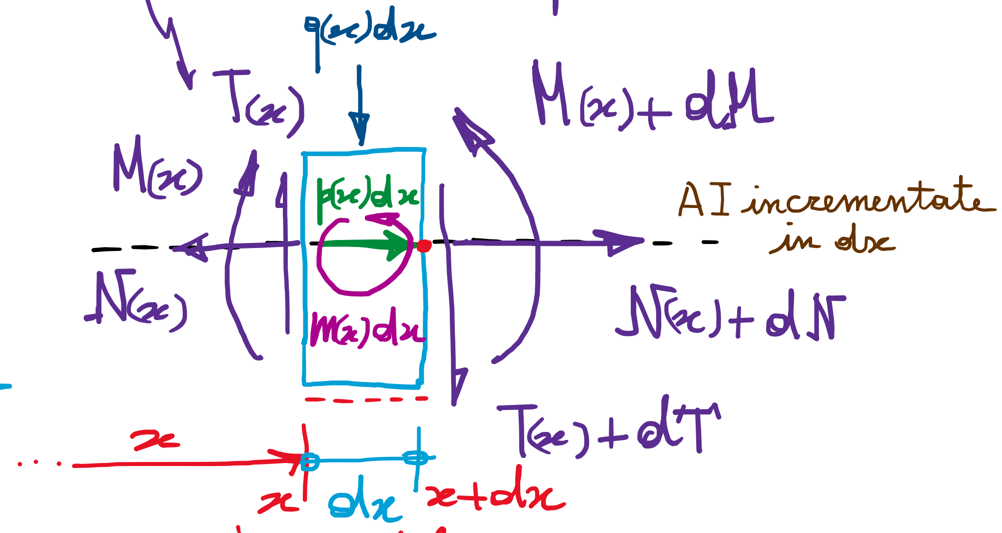


zoom

$\lim_{\Delta x \to 0}$

enucleiamo un concio di trave in sede indefinita ($\forall x, dx$)

Vedi convenzioni assunte per le AI



rapporto incrementale

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta x} = A'(x) \quad \text{(concetto di derivata prima)}$$

Equazioni di equilibrio del concio:

- $\sum F_t^{dx} = \sum F_x^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{N(x)} + \frac{dN}{dx} - \cancel{N(x)} + p(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{N'(x) = \frac{dN(x)}{dx} = -p(x)}$

- $\sum F_n^{dx} = \sum F_y^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{T(x)} + \frac{dT}{dx} - \cancel{T(x)} + q(x)\cancel{dx} = 0 \Rightarrow \boxed{T'(x) = \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)}$

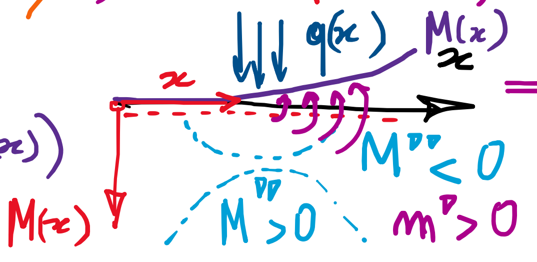
- $\sum M_{x+dx}^{dx} = 0 \Rightarrow \cancel{M(x)} + \frac{dM}{dx} - \cancel{M(x)} + m(x)\cancel{dx} - T(x)\cancel{dx} + \cancel{q\frac{dx^2}{2}} = 0 \Rightarrow \boxed{M'(x) = \frac{dM(x)}{dx} = -m(x) + T(x)}$

infinitesimo di ordine superiore

Inoltre, per ulteriore derivazione:

$$M''(x) = \frac{d^2M(x)}{dx^2} = -m'(x) + T'(x) = -(m'(x) + q(x))$$

concavità di $M(x)$ nel verso di $q(x)$



accoppiamento tra azione tagliante e flettente (se c'è taglio, c'è momento)

Casi tipici di interesse:

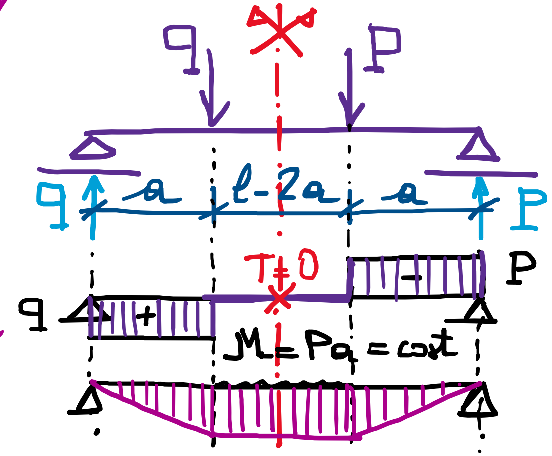
tratto con carico ...		$N(x)$	$T(x)$	$M(x)$
$p=0$ $q=0$ $m=0$	nullo (tratto "scarico")	costante	costante	lineare * costante
$p=\text{cost}$ $q=\text{cost}$ $m=\text{cost}$	uniformemente distribuito o ripartito	lineare	lineare	quadratico lineare
$p=\text{lin}$ $q=\text{lin}$ $m=\text{lin}$	linearmente distribuito	quadratica	quadratico	cubico quadratico

$M'(x) = T(x)$

* N.B.: il caso lineare contiene anche il caso costante, come istanza particolare.

Esempio:

Prova di flessione su quattro punti (tratto centrale con pura flessione)

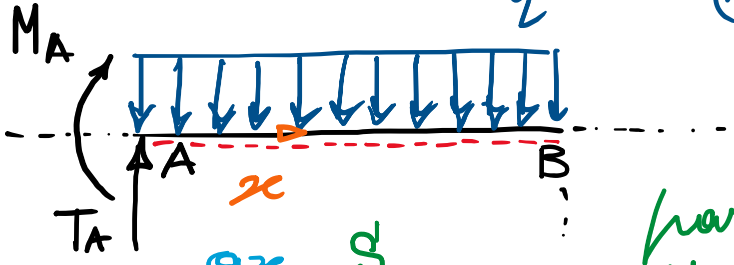


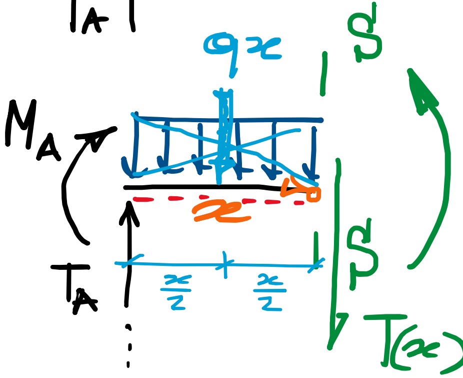
T antisim.

M simm.

Andamenti di T e M per $q = \text{cost}$ (e calcolo di M_{max}):

$q = \text{cost}$ (carico uniformemente ripartito)





parabolico

$$M(x) = M_A + T_A x - \frac{q x^2}{2}$$

per equilibrio del tratto Ax

lineare

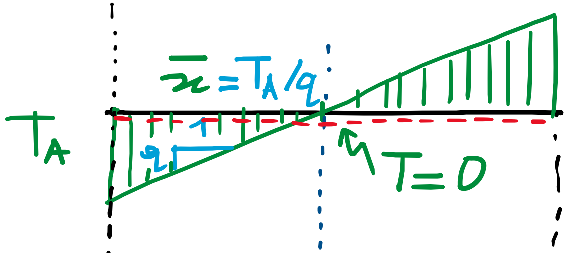
$$T(x) = T_A - q x = 0 \Rightarrow \boxed{\bar{x} = \frac{T_A}{q}}$$

m = 0

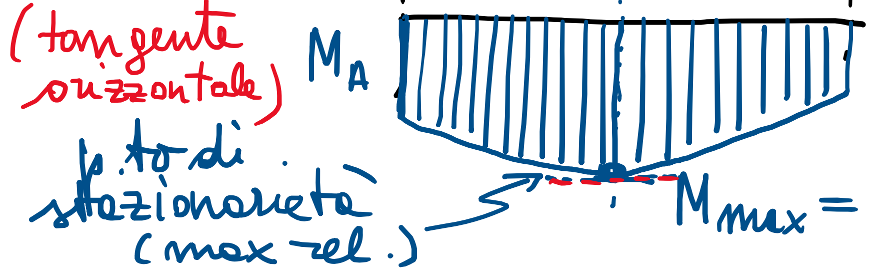
$$\boxed{M'(x) = T(x)} \Rightarrow$$

Infatti: $M' = T_A - \frac{q}{\cancel{2}} \cancel{2} x = T_A - q x = T(x)$

$$M_{max} = M\left(\bar{x} = T_A/q\right) = M_A + T_A \frac{T_A}{q} - \frac{q}{2}\left(\frac{T_A}{q}\right)^2 = \boxed{M_A + \frac{T_A^2}{2q} = M_{max}}$$



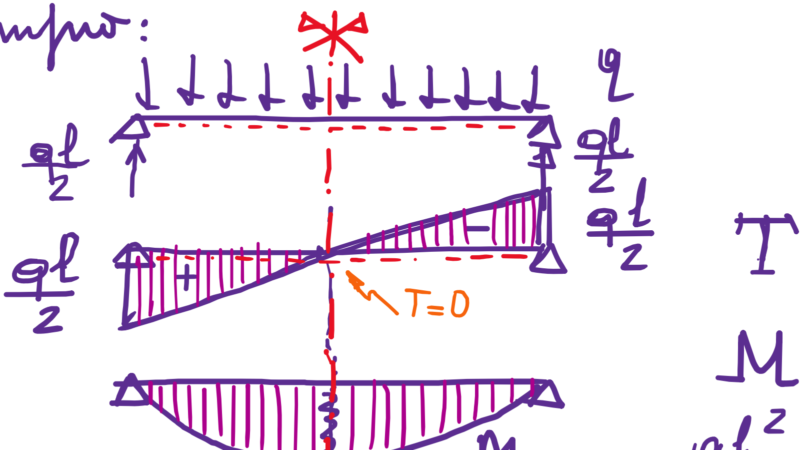
N.B.: M massimo (relativo) ove si annulla il taglio



$$M_{max} = M_A + \frac{T_A^2}{2q}$$

Concavità di M nel verso di q

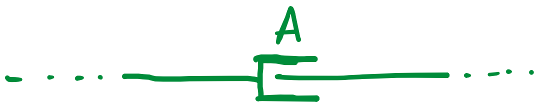
Esempio:



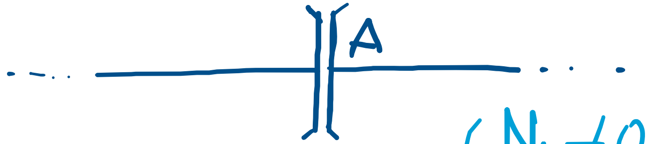
$$M_{max} = \frac{ql^2}{8}$$

Commenti sulle AI nei sistemi articolati di corpi rigidi

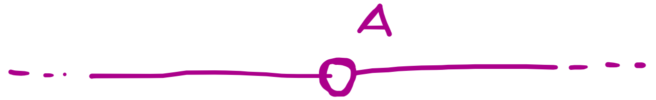
– Relazione tra AI e vincoli (svincoli) presenti



$N_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} T_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

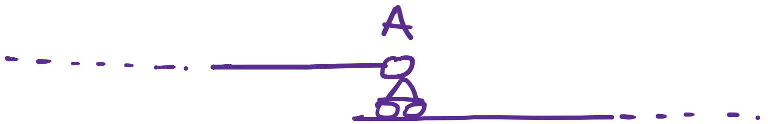


$T_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} N_A \neq 0 \\ M_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

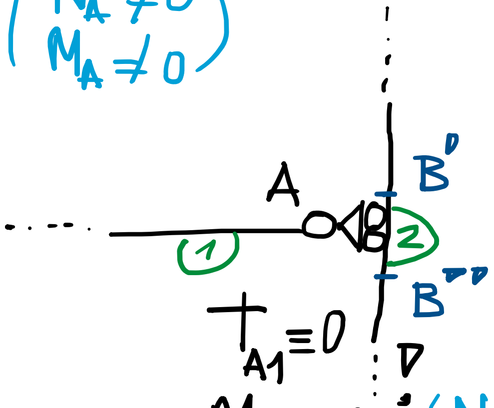


$M_A \equiv 0$! $\left(\begin{matrix} N_A \neq 0 \\ T_A \neq 0 \end{matrix}\right)$

vincoli doppi (svincoli semplici)



$N_A \equiv 0$
$M_A \equiv 0$! $(T_A \neq 0)$



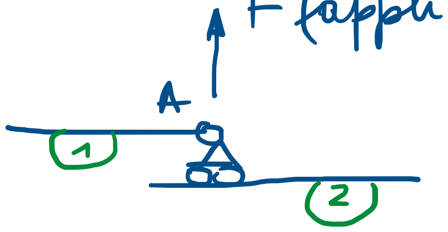
$T_{A1} \equiv 0$
$M_{A_1} \equiv 0$! $(N_{A1} \neq 0)$

$N_{B'_2} = N_{B''_2}$
$M_{B'_2} = M_{B''_2}$
$(T_{B'_2} \neq T_{B''_2})$

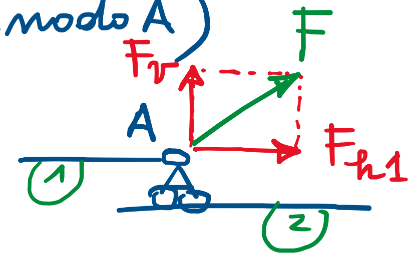
vincoli semplici (svincoli doppi)

– Azioni concentrate ai nodi

F (applicato al nodo A)



$\neq$

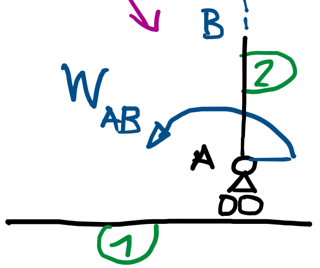


$N_{A1} = F_{h1}$, $N_{A2} \equiv 0$

applicate al nodo A dell'asta 1

– Verifica di tutti gli equilibri nodali!

azioni con componente nella direz. dello svincolo (sconnessione)



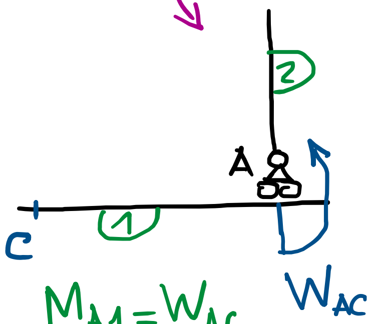
$M_{A2} \equiv W_{AB}$

$N_{A1} = 0$
$T_{A2} = 0$

$M_{A1} \equiv 0$

$\neq$

$M_{A2} \equiv 0$



$M_{A1} = W_{AC}$