Università degli studi di Bergamo

Scuola di Ingegneria (Dolmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni

(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

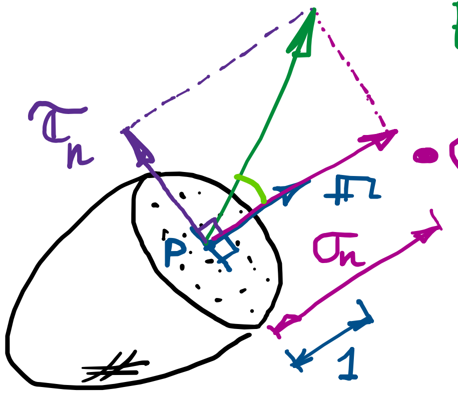
prof. Egidio RIZZI

egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 13

Tensioni principali e direzioni principali di sforzo

$\mathbf{t}_n = \underbrace{\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}}_{} = \boldsymbol{\sigma}^{(T)}\cdot\mathbf{n} =$ vettore sforzo di Cauchy $= \boldsymbol{\sigma}_n + \boldsymbol{\tau}_n$



• $\boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n\,\mathbf{n}$ ove $\sigma_n = \mathbf{t}_n\cdot\mathbf{n} = t_n \cdot 1 \cdot \cos\widehat{t_n n}$ vettore sforzo normale

$= \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{n} = n_i\,\sigma_{ij}\,n_j$ componente di sforzo normale (scalare)

• $\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{t}_n - \boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{\sigma}^T\cdot\mathbf{n} - \sigma_n\,\underbrace{\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}}_{\mathbf{n}}$ vettore sforzo tangenziale o tagliante

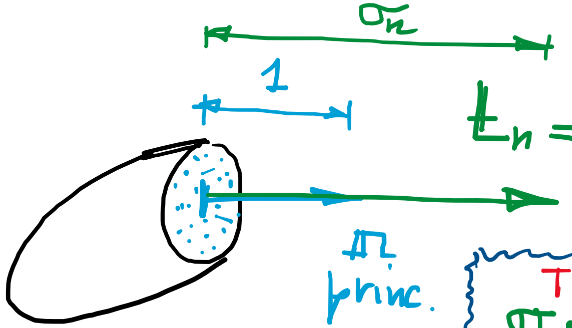
$= (\boldsymbol{\sigma}^T - \sigma_n\,\mathbf{I})\cdot\mathbf{n}$

$\mathbf{I}$: tensore identità del 2° ordine

$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 1\end{bmatrix}$, $I_{ij} = \delta_{ij} \begin{cases} 1 \text{ se } i=j \\ 0 \text{ se } i\neq j \end{cases}$

Simbolo di Kronecker

Direzione principale di sforzo: (solo sforzo normale e no sforzo tagliante)



$\mathbf{t}_n = \boldsymbol{\sigma}_n = \sigma_n\,\mathbf{n}$ $\quad (\underbrace{\boldsymbol{\tau}_n = \mathbf{0}}_{})$

$(\boldsymbol{\sigma}^T - \sigma_n\,\mathbf{I})\cdot\mathbf{n} = \mathbf{0}$

$\boxed{\boldsymbol{\sigma}^T\cdot\mathbf{n} = \sigma_n\,\mathbf{n}} = \sigma_n\,\mathbf{I}\cdot\mathbf{n}$

Problema agli autovalori associato al tensore sforzo $\boldsymbol{\sigma}$

$\mathbb{A}\cdot\mathbf{x} = \lambda\,\mathbf{x}$

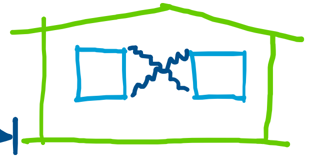
matrice ($\mathbb{A}$)

$\mathbf{x}$: autovettore => direzioni principali

λ: autovalore => tensioni principali

Valenze pratiche: implicazioni della resistenza dei materiali sul comportamento strutturale (es. materiali lapidei, non resistenti a trazione)

Azione sismica $\ddot{u}_g$ →



fratture a 45°

Il pb. agli autovalori associato al tensore sforzo di Cauchy ammette soluzioni non banali ($n \neq 0$) sse:

$$\tau_n = (\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) \cdot n = 0 \Rightarrow -\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = -\begin{vmatrix} \sigma_{11}-\sigma_n & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\sigma_n & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\sigma_n \end{vmatrix} =$$

eq.ne caratteristica (di 3° grado)

Coefficienti del polinomio caratteristico I_i:

Invarianti di sforzo (al variare del sistema di riferimento): [poichè σ_n devono esserlo] └ radici dell'eq.ne

$$= \underbrace{\sigma_n^3 - I_1 \sigma_n^2 - I_2 \sigma_n^1 - I_3 \sigma_n^0}_{\text{polinomio caratteristico}} = 0$$

$\Rightarrow$ 3 radici: autovalori $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$ tensioni principali

$\Updownarrow$

autovettori n_I, n_{II}, n_{III} direzioni principali di sforzo

- primo (lineare)

$$I_1 = \operatorname{tr}\sigma \sim \sigma^1$$
$$= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = \sum \sigma_{ii} = \mathbb{I} : \sigma = \delta_{ij}\sigma_{ij}$$

l'operatore traccia è invariante

- secondo (quadratico)

$$I_2 = \frac{1}{2}\left(\operatorname{tr}(\sigma^2) - (\operatorname{tr}^2\sigma)\right) \sim \sigma^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\sigma_{ij}\cdot\sigma_{ij} - (\sigma_{kk})^2\right)$$
$$= -\left(\begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{13} \\ \sigma_{13} & \sigma_{33} \end{vmatrix}\right) = \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{13}^2 - (\sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{11}\sigma_{33})$$

- terzo (cubico)

$$I_3 = \det\sigma \sim \sigma^3$$

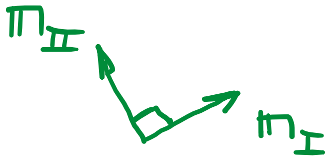
$\Leftarrow$ poichè $-\det(\sigma - \sigma_n \mathbb{I}) = -I_3$ per $\sigma_n = 0$

$$= \frac{1}{3}\operatorname{tr}\sigma^3 - \frac{\operatorname{tr}\sigma}{2}\left(\operatorname{tr}\sigma^2 - \frac{1}{3}\operatorname{tr}^2\sigma\right)$$
$$= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{11} - \sigma_{13}^2\sigma_{22}$$

- Poiché σ è reale ($\sigma \in \mathbb{R}$) e simmetrico ($\sigma^T = \sigma$), gli autovalori sono reali: $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \in \mathbb{R}$
- A due autovalori distinti corrispondono due autovettori mutuamente ortogonali:

$$\sigma_I \neq \sigma_{II} \Rightarrow \begin{array}{l} n_{II} \cdot (\sigma \cdot n_I = \sigma_I \, n_I) \\ n_I \cdot (\sigma \cdot n_{II} = \sigma_{II} \, n_{II}) \end{array} \; -$$

$$n_{II} \cdot \sigma \cdot n_I - n_I \cdot \sigma \cdot n_{II} = \sigma_I \underbrace{n_{II} \cdot n_I} - \sigma_{II} \underbrace{n_I \cdot n_{II}}$$

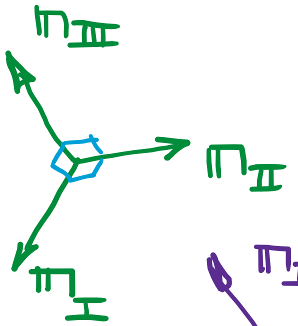


$n_I \perp n_{II}$

$\sigma^T = \sigma$

$$0 = n_I \cdot \sigma^T \cdot n_{II} - n_I \cdot \sigma \cdot n_{II} = \underbrace{(\sigma_I - \sigma_{II})}_{\neq 0} \underbrace{\boxed{n_I \cdot n_{II}}}_{=0} \Rightarrow n_I \cdot n_{II} = 0$$

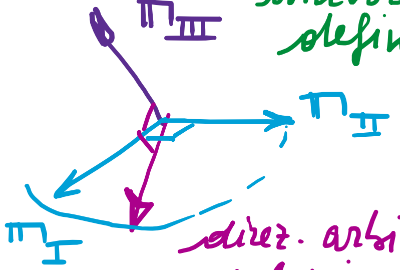
- Molteplicità delle radici



terna principale univocamente definita

+ 3 radici distinte $\sigma_I \neq \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow$ 3 dir. princ. mutuam. $\perp$

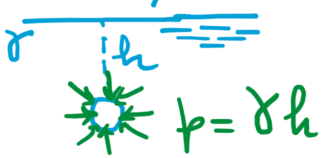
+ 2 radici distinte, es. $\sigma_I = \sigma_{II} \neq \sigma_{III} \Rightarrow$ ogni direz. $\perp$ a n_{III} è principale nel piano (I, II)
(" " coincidenti)

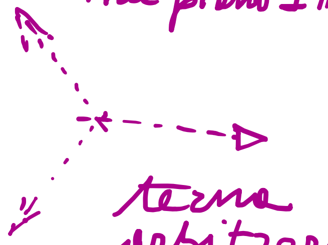


direz. arbitraria nel piano $\perp n_{III}$

+ 3 radici coincidenti $\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III} \Rightarrow$ ogni direz. è principale
(stato di sforzo sferico o idrostatico)
"uguale in tutte le direzioni"
(solo sforzo normale)

es. liquido

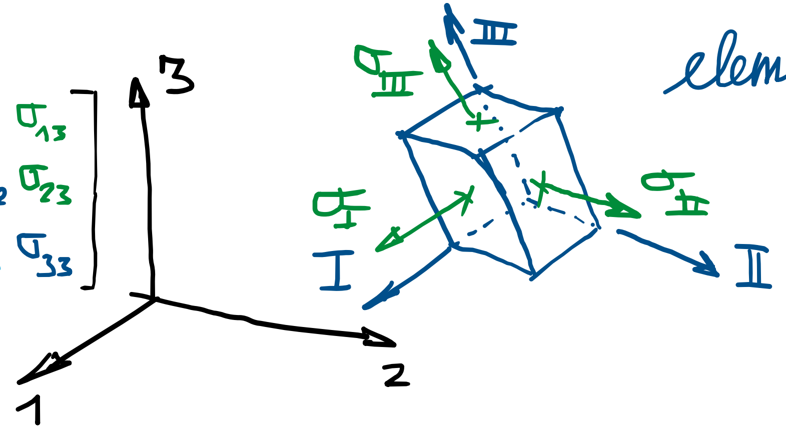




terna arbitraria

– Diagonalizzazione di σ nelle direzioni principali

$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$



elementino in terna principale

$$[\sigma]_{\substack{\text{rif.}\\\text{princ.}}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \cdot & \cdot \\ \cdot & \sigma_{II} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

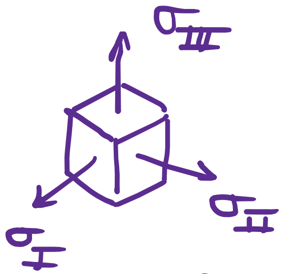
matrice diagonale

$$\begin{cases} I_1 = \sigma_I + \sigma_{II} + \sigma_{III} \\ I_2 = -(\sigma_I\sigma_{II} + \sigma_{II}\sigma_{III} + \sigma_I\sigma_{III}) \\ I_3 = \sigma_I\sigma_{II}\sigma_{III} \end{cases}$$

Invarianti espressi nel riferimento principale

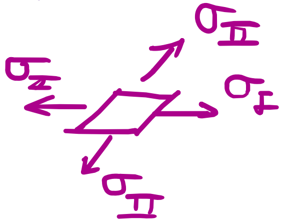
– Classificazione dello stato di sforzo:

+ triassiale (3D): $\sigma_I \neq 0$, $\sigma_{II} \neq 0$, $\sigma_{III} \neq 0$



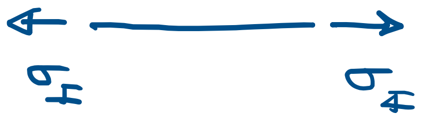
sforzo tridimensionale (es. diga)

+ biassiale (2D): " " , $\sigma_{III} = 0$



sforzo piano (es. lastra, trave)

+ monoassiale (1D): " , $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$

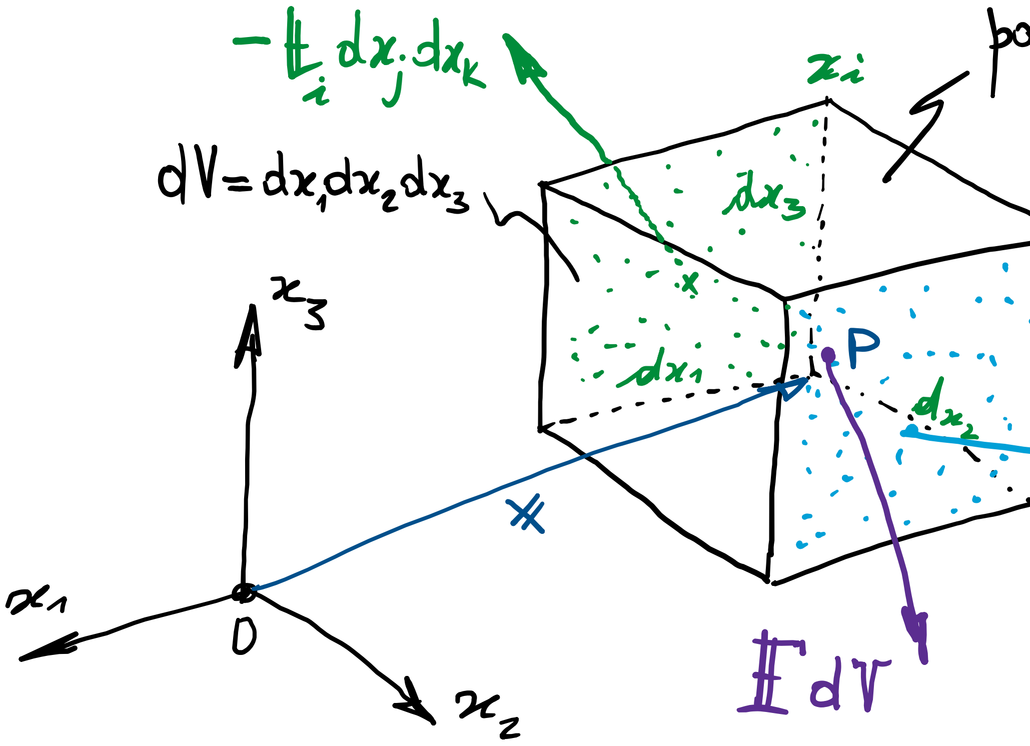


sforzo monodimensionale (es. filo teso)

(vedi es. stato di sforzo nella prova monoassiale di trazione)

Equazioni indefinite di equilibrio dei continui: $\forall \underline{x}, dV$

sulla variazione spaziale del campo di sforzo $\sigma(\underline{x}), \underline{t}_n(\underline{x})$



$x_i + dx_i$

$$\Big(\underbrace{\underline{t}_i + \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i} dx_i}_{d\underline{t}_i}\Big) dx_j dx_k$$

$i \to j \to k$

es. nelle travi

$N'(x) = -p(x)$

$T'(x) = -q(x)$

Equilibrio alla traslazione:

$$\sum_i \Big(\cancel{\underline{t}_i} + \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i} \underbrace{dx_i\Big) dx_j dx_k}_{\cancel{dV}} - \cancel{\underline{t}_i} dx_j dx_k + \mathbb{F} \cancel{dV} = 0$$

eq.ne vettoriale $\quad \displaystyle\sum_i \frac{\partial \underline{t}_i}{\partial x_i} + \mathbb{F} = 0 \quad \text{in } V$

$\dfrac{\partial}{\partial \underline{x}}$ gradiente

$\text{div} = \nabla \cdot (\ )$ operatore divergenza

3 eq.ni scalari, $j = 1,2,3 \Rightarrow \sigma_{ij,i} + F_j = \dfrac{\partial \overbrace{t_{ij}}^{\sigma_{ij}}}{\partial x_i} + F_j = 0_j \iff \boxed{\underbrace{\text{div}\,\sigma}_{\nabla\cdot\sigma} + \mathbb{F} = 0 \quad \text{in } V}$

$$\frac{\partial (\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i}$$

[Equil. alla rotaz. $\Rightarrow \sigma^T = \sigma$]

$\text{div}\,\sigma = -\mathbb{F}$