

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 17

Componenti Volumetrica e Deviatorica

$v = I_1^v$ deformazione volumetrica

deviatori

Deformazione: $\mathbb{E} = \mathbb{E}_v + \mathbb{E}_D = \underbrace{\frac{\text{tr} \mathbb{E}}{3} \mathbb{I}}_{I_1^v} + \mathbb{e} = \frac{v}{3} \mathbb{I} + \mathbb{e} \Rightarrow \mathbb{e} = \mathbb{E} - \frac{\text{tr} \mathbb{E}}{3} \mathbb{I}$ di deformaz.

Sforzo: $\sigma = \sigma_v + \sigma_D = \underbrace{\frac{\text{tr} \sigma}{3} \mathbb{I}}_{I_1^s} + \mathbb{s} = p \mathbb{I} + \mathbb{s} \Rightarrow \mathbb{s} = \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} \mathbb{I}$ di sforzo

$[\mathbb{I}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\mathbb{I}$ tensore identità del 2° ord. ($I_{ij} = \delta_{ij}$ $\begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$)

$\text{tr} \mathbb{I} = \mathbb{I} : \mathbb{I} = \delta_{ij} \delta_{ij} = 3$

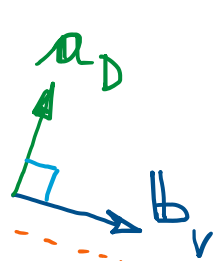
$p = \frac{\sigma_{ii}}{3} = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}}{3} = \frac{\text{tr} \sigma}{3} = \frac{\mathbb{I} : \sigma}{3} = \frac{I_1}{3}$ "traceless tensors"

tensione media

$\text{tr} \sigma = I_{ij} \sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_{ij} = \sigma_{ii}$

N.B.: $a_v : b_D = a_D : b_v = 0$
 $\frac{\text{tr} a}{3} \mathbb{I} : b_D = a_D : \frac{\text{tr} b}{3} \mathbb{I} = 0$

$\text{tr} b_D = \text{tr} a_D = 0$



Invarianti del deviatore di deformazione $\mathbb{e}$ di sforzo $\mathbb{s}$:

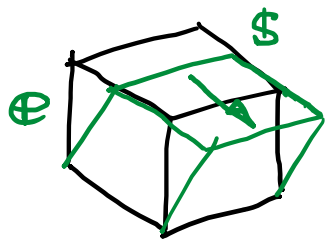
$J_1^v = \text{tr} \mathbb{e} = s_{ii} = \mathbb{I} : \mathbb{s} = \text{tr} \sigma - \frac{\text{tr} \sigma}{3} \text{tr} \mathbb{I} = 0$ per definizione

$J_2^v = \frac{1}{2} \text{tr} \mathbb{e}^2 = \frac{1}{2} \text{tr} (\mathbb{e} \cdot \mathbb{e}) = \frac{1}{2} \delta_{ij} s_{ik} s_{kj} = \frac{1}{2} s_{jk} s_{kj} = \frac{1}{2} s_{jk} s_{jk} = \frac{1}{2} \mathbb{s} : \mathbb{s} = J_2$

$J_3^v = \frac{1}{3} \text{tr} \mathbb{e}^3$

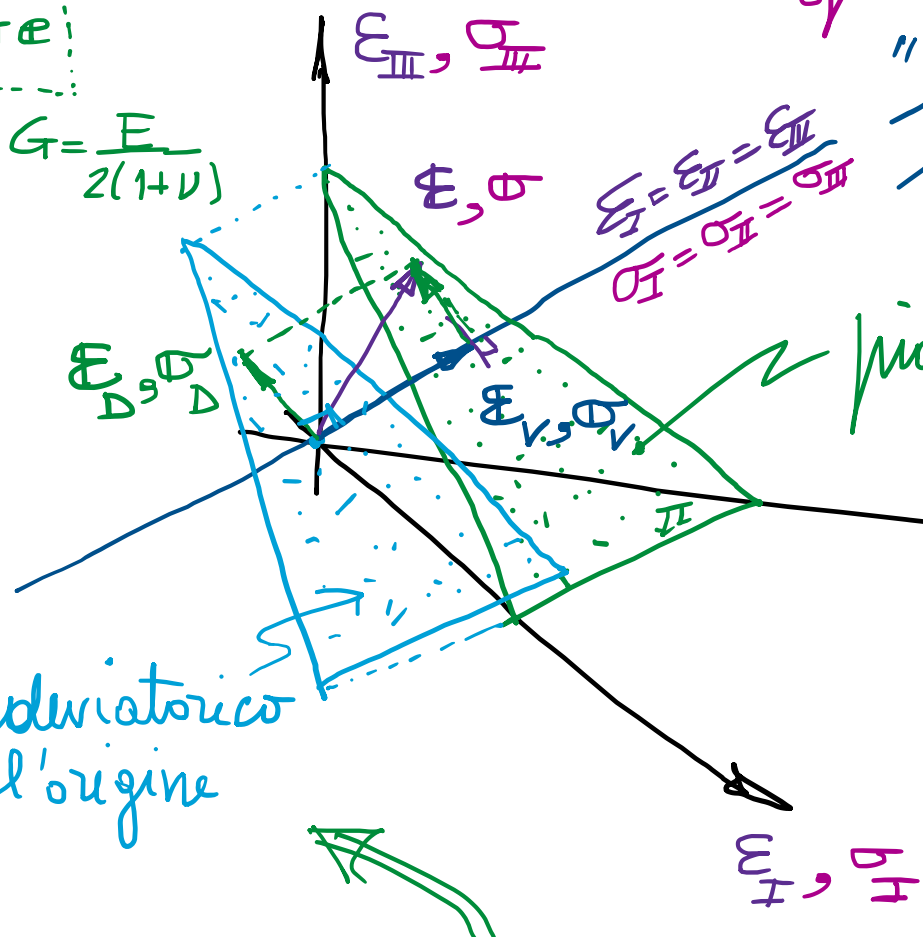
Rappresentazione nello "spazio principale" (spazio delle deformazioni principali)
 spazio delle tensioni principali

$$e = \frac{s}{2G} ; s = 2Ge$$



("deviazione")
 variazione
 di forma
 a volume
 costante

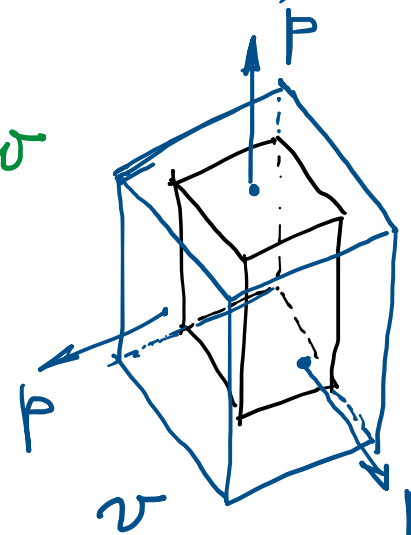
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$



"trisettrice del 1° ottante"
 asse idrostatico ($\sigma_I = \sigma_{II} = \sigma_{III}$)

piano deviatorico

piano deviatorico
 per l'origine



variazione di volume
 a forma costante
 (omotetica)

$$v = \frac{1}{K} p ; p = K v$$

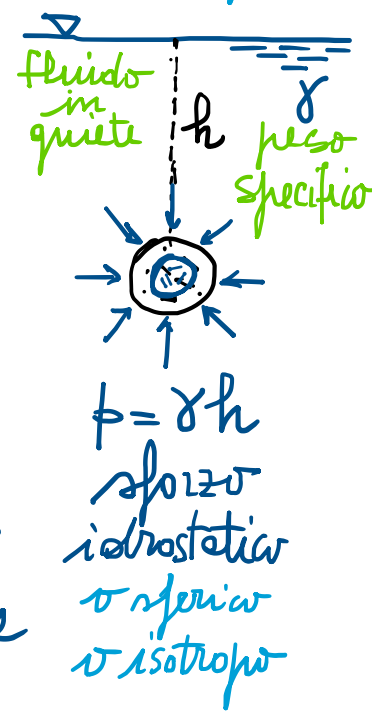
$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \text{ modulo di volume}$$

Disaccoppiamento della risposta
 volumetrica e deviatorica per materiale isotropo

$$\epsilon_v \leftrightarrow \sigma_v$$

$$e \leftrightarrow s$$

polino di
 materiale
 isotropo



$p = \gamma h$
 sforzo
 idrostatico
 o sferico
 o isotropo

Risposta deviatorica

$\mathbb{E}(\sigma)$ legge di Hooke generalizzata (materiale elastico, lineare, isotropo)
 E, ν [K, G]

$$\mathbb{e} = \mathbb{E} - \frac{\text{tr} \mathbb{E}}{3} \mathbb{I} = -\frac{\nu}{E} \text{tr} \sigma \mathbb{I} + \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\text{tr} \mathbb{E}}{3} \mathbb{I}$$

$$= \frac{1+\nu}{E} \sigma - \frac{\text{tr} \sigma \mathbb{I}}{3} \frac{1}{E} \underbrace{(3\nu + 1 - 2\nu)}_{1+\nu}$$

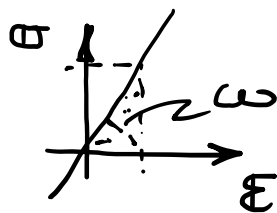
$$\frac{\nu}{3} = \frac{1}{K} \frac{p}{3} = \frac{3(1-2\nu)}{E} \frac{\text{tr} \sigma}{3}$$

$$2\mathbb{e} = \frac{1}{G} \mathbb{s} ; \quad \mathbb{s} = G 2\mathbb{e} \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)}$$

$$= \frac{2(1+\nu)}{2E} \underbrace{\left(\sigma - \frac{\text{tr} \sigma \mathbb{I}}{3} \right)}_{\mathbb{s}} = \left[\frac{1}{2G} \mathbb{s} = \mathbb{e} ; \quad \mathbb{s} = 2G \mathbb{e} \right]$$

$\mathbb{e} \leftrightarrow \mathbb{s}$
 disaccoppiata della
 risposta volumetrica

Energia di deformazione:



$$\omega = \frac{1}{2} \sigma : \mathbb{E} = \frac{1}{2} (\sigma_V + \sigma_D) : (\mathbb{E}_V + \mathbb{E}_D) =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2} \sigma_V : \mathbb{E}_V}_{\omega_V} + \underbrace{\frac{1}{2} \sigma_D : \mathbb{E}_D}_{\omega_D} \quad \text{ove:}$$

energia volumetrica energia deviatorica

$$[\sigma_V : \mathbb{E}_D = \sigma_D : \mathbb{E}_V = 0]$$

$G = \frac{E}{2(1+\nu)} ; \quad G \rightarrow \infty, \nu \rightarrow -1$
 deformazione senza
 variazione di forma

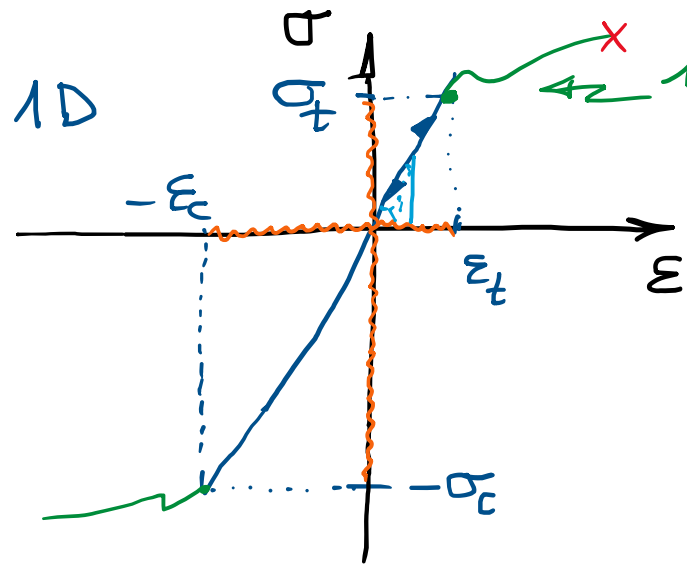
$$\bullet \omega_V = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\text{tr} \sigma \mathbb{I}}{3}}_p : \underbrace{\frac{\text{tr} \mathbb{E} \mathbb{I}}{3}}_\nu = \frac{1}{2} p \nu = \left\langle \frac{1}{2} K \nu^2 = \frac{1}{2} K I_1^2 \right\rangle > 0$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \frac{1}{K} p^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{9K} I_1^2 \right\rangle > 0$$

$$\bullet \omega_D = \frac{1}{2} \mathbb{s} : \mathbb{e} = \left\langle \frac{1}{2} 2G \mathbb{e} : \mathbb{e} = 2G J_2 \right\rangle > 0$$

$$= \left\langle \frac{1}{2} \frac{\mathbb{s} : \mathbb{s}}{2G} = \frac{1}{2G} J_2 \right\rangle > 0$$

Verifica di resistenza (elastica)



ex. comportamento asimmetrico
trazione/compressione

sforzo di snervamento

$$\sigma_t = \frac{\sigma_y}{f} \rightarrow \sigma_0$$

fattore di sicurezza 2÷5 (10)

- Un dato materiale, in relazione alla propria natura e allo stato tenso-deformativo cui è sottoposto, può manifestare determinate risorse di "resistenza" (ad es., "elastica", cioè rispetto all'uscita del campo elastico, per giungere poi a "rottura"), definite tramite opportuni "criteri di resistenza", idonei allo scopo.

- Verifica di resistenza:

$$G.I.P. (\sigma, \epsilon) \leq R$$

"Grandezza indice del pericolo" Resistenza (elastica)

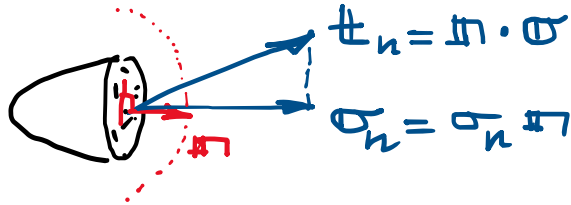
- Nel dominio degli sforzi:

$$\sigma_{eq} (\sigma, \epsilon) \leq \sigma_0$$

"tensione equivalente" (quantità scalare) Tensione ammissibile

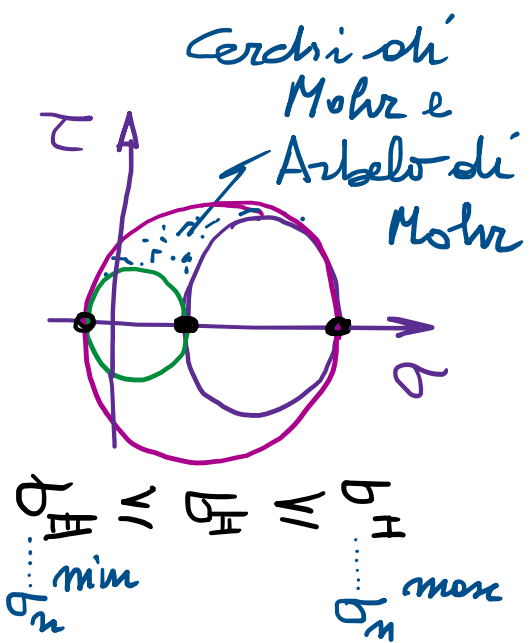
1) Criterio di Galileo - Rankine - Navier (vedi "mensola di Galileo")

Assume come G.I.P. lo sforzo normale (max, min)



$$-\sigma_c \leq \underbrace{\sigma_n^{\min} ; \sigma_n^{\max}}_{\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}} \leq \sigma_t$$

tensioni principali



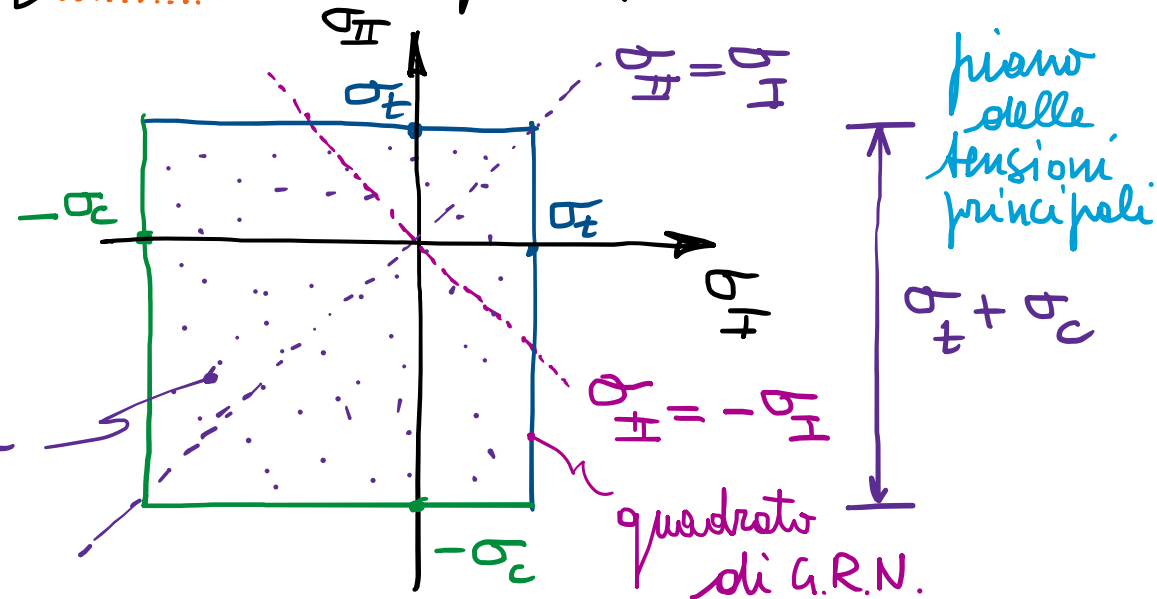
6 disuguaglianze

$$\begin{aligned} -\sigma_c &\leq \sigma_I \leq \sigma_t \\ -\sigma_c &\leq \sigma_{II} \leq \sigma_t \\ -\sigma_c &\leq \sigma_{III} \leq \sigma_t \end{aligned}$$

4 disuguaglianze
per sforzo piano
($\sigma_{III} = 0$)

$$\sigma_I \leq \sigma_t$$

$I = I, II, III$
 $\sigma_{eq} = \sigma_I$ tensioni principali

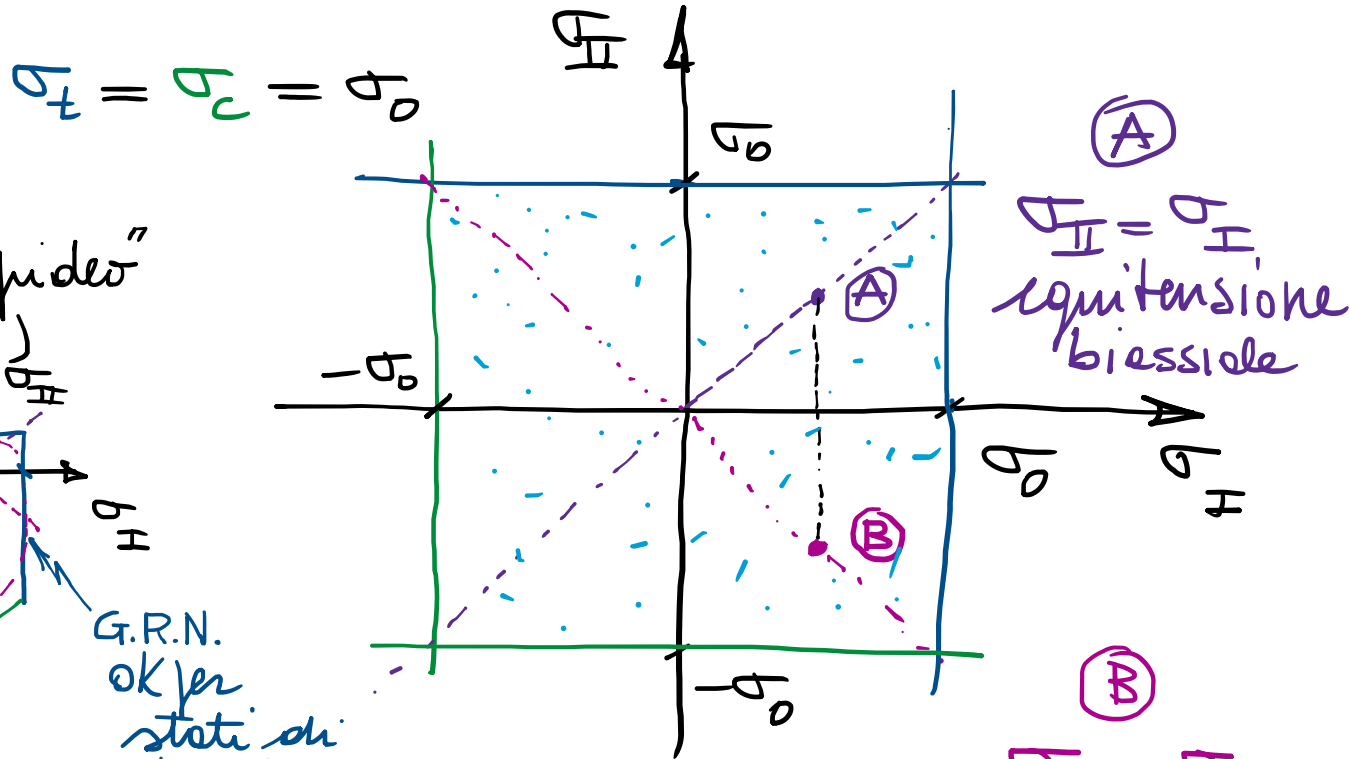


"cubo" di G.R.N.
(nello spazio delle
tensioni principali)

dominio
di resistenza
di G.R.N.

- Isolono per materiali a comportamento non simmetrico a trazione/compressione
(in particolare per stati di prevalente trazione, in materiali lapidei)

- Per materiali a comportamento simmetrico t/c, non isolono e distinguere il diverso livello di pericolosità di stati A ($\sigma_{II} = \sigma_I$) e B ($\sigma_{II} = -\sigma_I$)



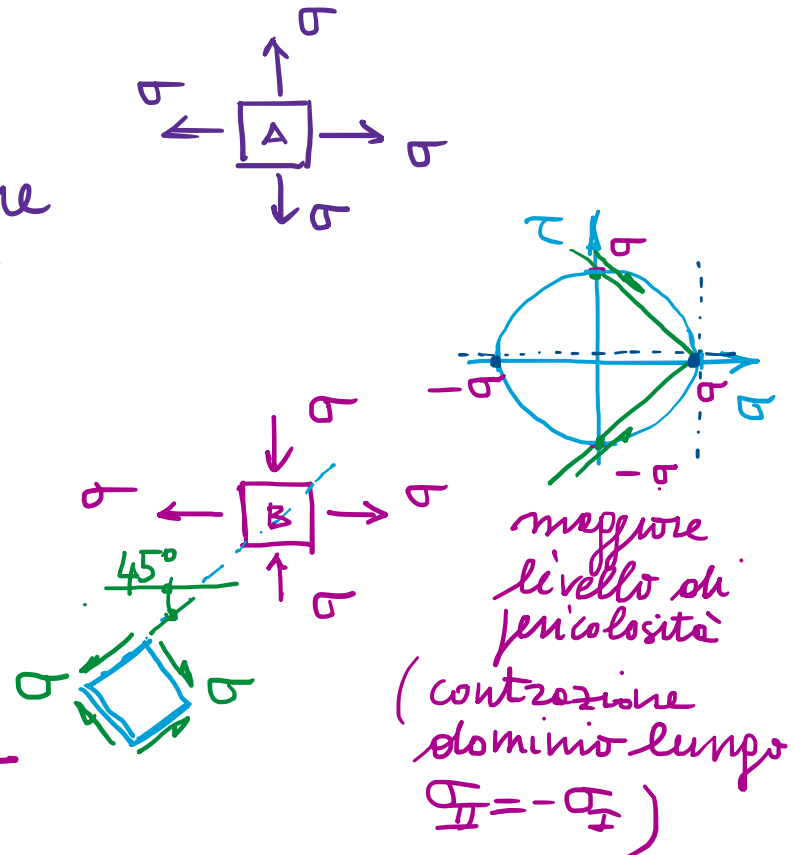
materiale "lapiideo"
(come CLS)

scale

G.R.N.
OK per
stati di
prevalente
trazione

"però" delle tensioni
(con resistenza maggiore in compressione)

②
 $\sigma_{II} = -\sigma_I$
taglio puro



DISCORSI
E
DIMOSTRAZIONI
MATEMATICHE,
intorno à due nuove scienze

Attenenti alla
MECANICA & i MOVIMENTI LOCALI;

del Signor
GALILEO GALILEI LINCEO,
Filosofo e Matematico primario del Serenissimo
Grand Duca di Toscana.

Con una Appendice del centro di gravità à' alcuni Solidi.



IN LEIDA,
Appresso gli Elsevirii. M. D. C. XXXVIII.

