

Università degli studi di Bergamo
Scuola di Ingegneria (Dalmine)

CCS Ingegneria Edile

L-23 Ingegneria delle Tecnologie per l'Edilizia

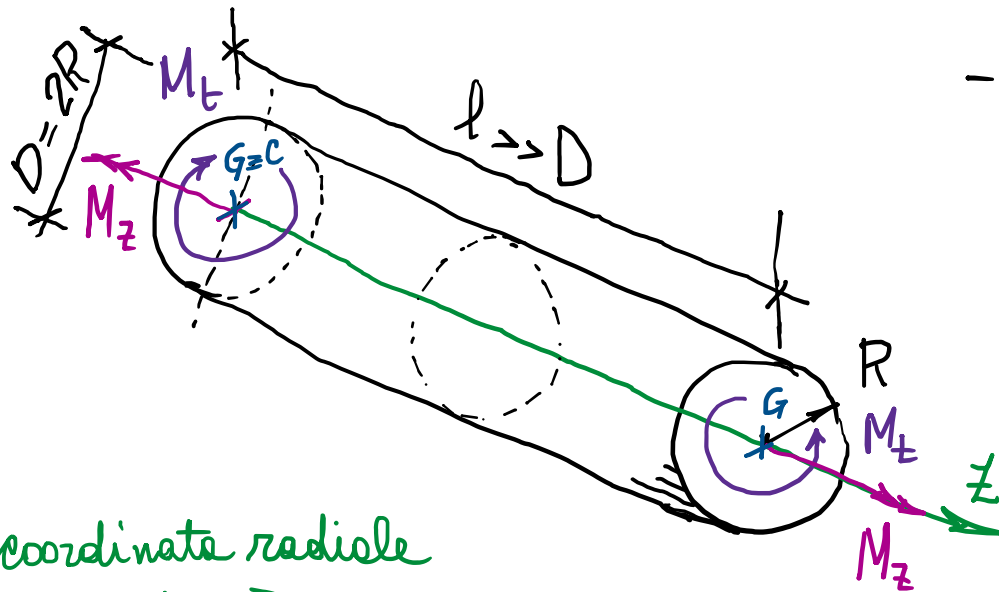
Scienza delle Costruzioni
(ICAR/08 - SdC; 9 CFU)

A.A. 2021/2022

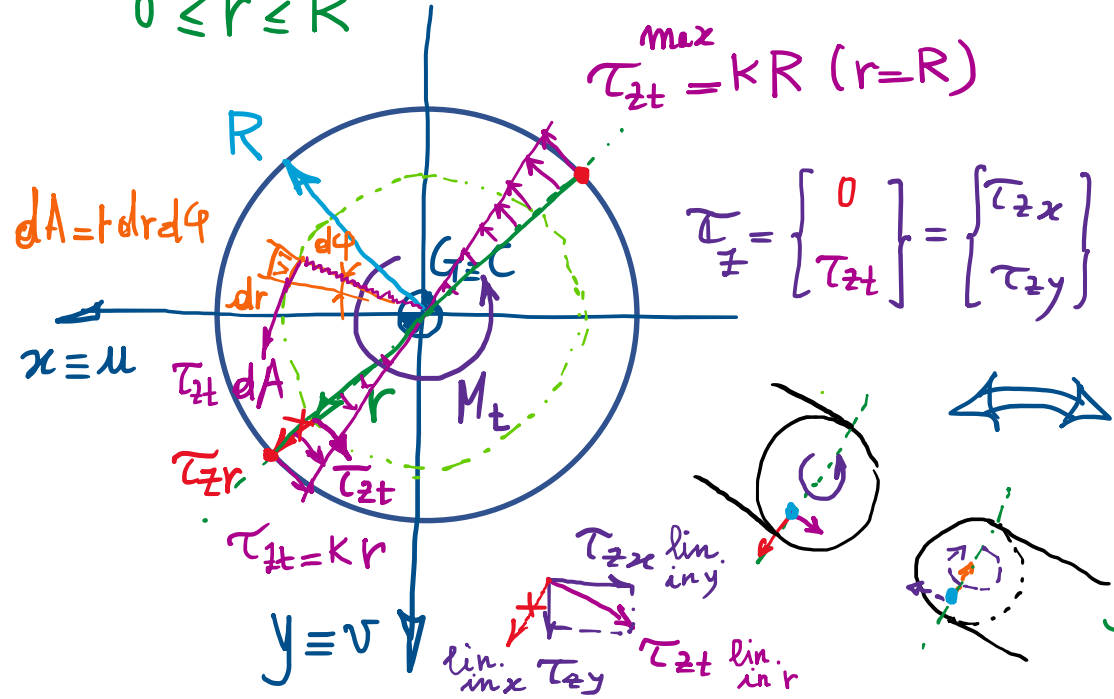
prof. Egidio RIZZI
egidio.rizzi@unibg.it

LEZIONE 24

4) Azione torcente o torsione (circolare)



coordinate radiale
 $0 \leq r \leq R$



$$\tau_z = \begin{bmatrix} 0 \\ \tau_{zt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{zx} \\ \tau_{zy} \end{bmatrix}$$

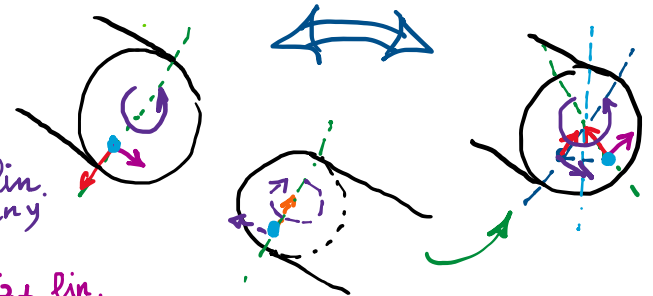
- Si consideri un prisma di DSV di sezione circolare, di raggio R (diametro $D=2R$, area $A=\pi R^2=\frac{\pi D^2}{4}$) soggetto a momento torcente costante $M_t = M_z$.

- In analogia coi casi di DSV precedentemente visti, in particolare al caso della flessione retta, si procede con approccio seminverso agli sforzi, ipotizzando, in base a considerazioni di simmetria (polare rispetto a $G \equiv C$), il seguente campo di sforzo:

$$(\sigma_{ij} \equiv 0; \tau_{zr} \equiv 0); \tau_{zt} = Kr$$

τ_{zr} uguale e di segno opposto $\rightarrow$ nulla

— cost
 lineare a farfalle lungo qualsiasi diametro (con valore nullo in $G \equiv C$)



- Si verifica che tutte le eq. in governanti il pb. elastico lineare risultino soddisfatte. ✓
- Resta da imporre la condizione di equivalenza statica tra il campo ipotizzato delle $\tau_{zt} = Kr$ e il momento torcente M_t che le ha generate:

$$\int_A \underbrace{\tau_{zt}}_{Kr} dA \cdot r = M_t$$

$$K \underbrace{\int_A r^2 dA}_{J_G} = M_t \Rightarrow K = \frac{M_t}{J_G}$$

J_G momento d'inerzia polare rispetto a $G \equiv C$

$$K = \frac{M_t}{J_G}$$

$$\tau_{zt} = Kr = \frac{M_t}{J_G} r = \frac{2M_t}{\pi R^4} r$$

Analogia con flessione retta

$$\sigma_{zz} = Ky = \frac{M_x}{J_x} y$$

$\sigma^{\max} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{4M_x}{\pi R^3}$

W_x (modulo di res. e fless.) = $\frac{\pi R^3}{4} = \frac{W_t}{2}$

$$[L]^4 \quad J_G = \int_0^{2\pi} \int_0^R \underbrace{r^2}_{r^3} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R d\varphi$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$J_G = J_x + J_y = 2J_r$$

$$J_r = \frac{J_G}{2} = \frac{\pi R^4}{4} = \frac{\pi D^4}{64}$$

→ flessione (retta)

$$= \frac{R^4}{4} 2\pi$$

$$= \frac{\pi R^4}{2} = \frac{\pi D^4}{32}$$

$$\tau^{\max} = \tau_{zt}^{\max} = \tau_{zt}(r=R) = \frac{M_t}{J_G} R$$

modulo di resistenza a torsione

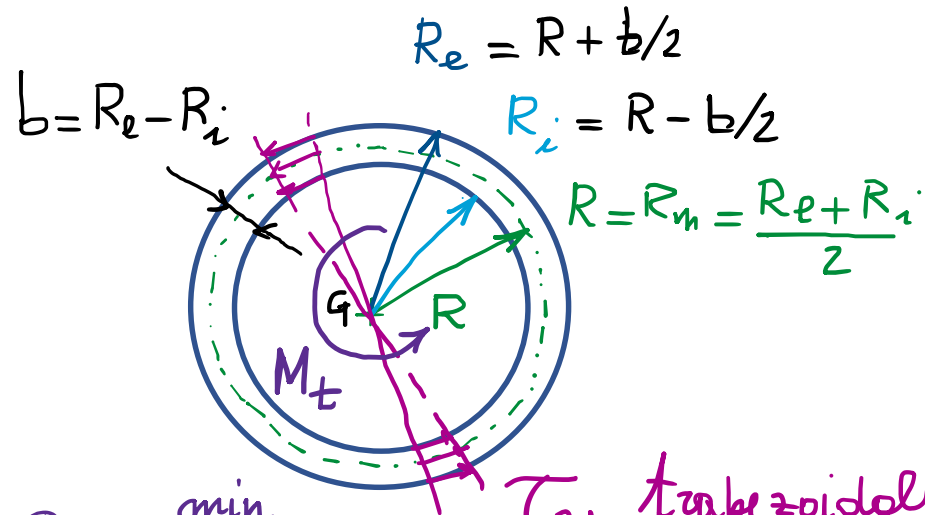
$$W_t = \frac{J_G}{R} = \frac{\pi R^4}{2R} = \frac{\pi R^3}{2} \quad [L]^3$$

(parametro per cui dividere M_t per trovare la $\tau^{\max}$)

$$= \frac{M_t}{J_G/R} = \frac{M_t}{W_t}$$

$$= \frac{2M_t}{\pi R^3} = \tau^{\max}$$

- Sezione circolare cava



$$\begin{aligned} r = R_i &: \tau^{\min} \\ r = R_m &: \tau^m \\ r = R_e &: \tau^{\max} \end{aligned}$$

τ_{zt} trapezoidali
sullo spessore
 $R_i \leq r \leq R_e$

2, CdSdC
torsione nei
profili rotondi
chiusi

Bredt

$$\tau^m = \frac{M_t}{2\pi R^2 b \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right]}$$

se $\frac{b}{R} \rightarrow 0$

$$\tau \approx \frac{M_t}{2\pi R^2 b}$$

$\tau_{\text{cost. sullo spessore}}$

Ω area racchiusa all'interno della linea media

$$\tau_{zt} = \frac{M_t}{J_G} r$$

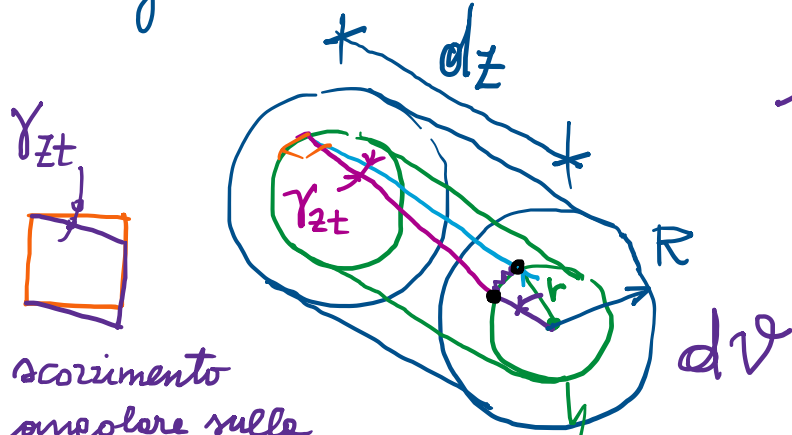
$$\begin{aligned} J_G &= \frac{\pi}{2} (R_e^4 - R_i^4) \\ &= \frac{\pi}{2} (R_e^2 + R_i^2)(R_e^2 - R_i^2) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(R - \frac{b}{2}\right)^2 \right) \left(\left(R + \frac{b}{2}\right)^2 - \left(R - \frac{b}{2}\right)^2 \right) \\ &= \frac{\pi}{2} \left(R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb + R^2 + \frac{b^2}{4} - Rb \right) \cdot \left(R^2 + \frac{b^2}{4} + Rb - R^2 - \frac{b^2}{4} + Rb \right) \\ &= \frac{\pi}{2} 2(R^2 + \frac{b^2}{4}) 2Rb = 2\pi Rb \left(R^2 + \frac{b^2}{4} \right) \\ &= 2\pi R^3 b \left[1 + \frac{1}{4}\left(\frac{b}{R}\right)^2 \right] = J_G \end{aligned}$$

- Campo di deformazione:

$$\varepsilon_{ij} = 0 \text{ tranne } \gamma_{zt} = \frac{\tau_{zt}}{G} = \frac{M_t}{G J_{Gc}} r$$

G : modulo di elasticità tangenziale o
" " taglio $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$

- Deformazione del concio di prisma di lunghezza dz :



rotazione rigida nel piano delle sezioni, di entità $d\vartheta$ su base dz (rotaz. relative tra sez. a distanza dz)

$$\tan \gamma_{zt} dz = r d\vartheta$$

$$\frac{M_t}{G J_{Gc}} r dz = r d\vartheta$$

"cilindretto"
interno con superficie
laterale a distanza radiale r

$$d\vartheta = \frac{M_t dz}{G J_{Gc}}$$

rigidezza
torsionale

$$d\varphi \equiv \frac{M_x dz}{E J_x}$$

flessione
rigidezza
flessionale

- Generalizzazione per sezioni di forme generica: $\Rightarrow$ ColSdC

$$d\vartheta = \frac{M_t}{G J_t} dz = \eta \frac{M_t}{G J_{Gc}} dz$$

$$J_t = \frac{J_{Gc}}{\eta} \leq J_{Gc}$$

J_t : momento d'inerzia
torsionale; $\eta = \frac{J_{Gc}}{J_t} \geq 1$ fattore di torsione
(proprietà geom. sez. trasv.)

Intero prisma:

$$\Delta\vartheta = \frac{M_t L}{G J_{Gc}}$$

rotaz. relative
tra le
basi del prisma

- Programma indicativo del corso di SolC

- 1. Statica dei corpi rigidi (AC, calcolo di RV, AI: N, T, M ; solut. di strutt. i'sostatiche)
- ▼ 2. Statica e cinematica dei continui (sforzo σ ; deformazione ϵ)
- ▼ 3. Legame costitutivo (comport. meccanico del materiale, legame $\sigma \leftrightarrow \epsilon$, parametri elastici ν, E, G, K ; verifica di resistenza (elastica))
- 4. Analisi dei sistemi di travi deformabili (PLV, LE $\Rightarrow$ risolvere strutt. iperstatiche)
- ▼ 5. Problema di de Saint Venant (Azione assiale, tagliante, flettente, torzionale; verifica di sezioni di travi)

• Meccanica delle Strutture

▼ Meccanica dei Solidi

(due parti interagenti,
proposte in parallelo)

Conclusioni sul Corso di SdC (da Indice delle Lezioni)

ARCHIVIO LEZIONI ONLINE SdC Edili 2021

Meccanica delle Strutture

- Lezione 01. Introduzione al corso/Analisi Cinematica: vincoli e gradi di vincolo
- Lezione 02. Computo gdv/classificazione e approcci/schemi isostatici fondamentali del corpo rigido
- Lezione 03. Schemi isostatici fondamentali dei sistemi articolati di corpi rigidi/sequenza di montaggio (schemi elementari)
- Lezione 04. Analisi Statica: calcolo delle Reazioni Vincolari (corpo rigido)
- Lezione 05. Calcolo delle Reazioni Vincolari dei sistemi articolati
- Lezione 06. Azioni Interne e loro rappresentazione (diagrammi N, T, M)
- Lezione 07. Equazioni indefinite di equilibrio delle travi (rettilinee)/andamenti tipici/considerazioni sulle AI nei sistemi articolati
- Lezione 08. Meccanica dei Solidi: Introduzione ai concetti di sforzo, deformazione e legame costitutivo
- Lezione 09. Analisi dei sistemi di travi deformabili. Metodo della Linea Elastica (LE)
- Lezione 10. Risoluzione di strutture iperstatiche mediante LE
- Lezione 11. Principio dei Lavori Virtuali (PLV). Calcolo di componenti di spostamento e risoluzione di strutture iperstatiche mediante PLV

Meccanica dei Solidi

- Lezione 12. Meccanica dei Solidi. Statica dei continui. Sforzo di Cauchy
- Lezione 13. Tensioni principali; problema agli autovalori; proprietà e classificazione. Equazioni indefinite di equilibrio dei continui
- Lezione 14. Cerchio di Mohr: derivazione analitica e rappresentazione grafica. Cerchi e Arbelo di Mohr
- Lezione 15. Cinematica dei continui: tensore di deformazione; deformazioni principali; deformazione volumetrica
- Lezione 16. Problema elastico lineare: bilancio equazioni/incognite. Legame costitutivo elastico (lineare, isotropo)
- Lezione 17. Risposte volumetrica e deviatorica. Verifica di resistenza; criterio di Galileo-Rankine-Navier
- Lezione 18. Criteri di resistenza di de Saint Venant-Grashof; Beltrami; Huber-Hencky-von Mises; Guest-Tresca
- Lezione 19. Problema di de Saint Venant: ipotesi e definizioni. Richiami sulla geometria delle aree
- Lezione 20. Casi di de Saint Venant: azione assiale; flessione (retta)
- Lezione 21. Sollecitazioni composte: flessione deviata; tenso-flessione
- Lezione 22. Caso di DSV del taglio (flessione composta); trattazione approssimata di Jourawsky
- Lezione 23. Deformazione a taglio; fattore di taglio; sezione rettangolare; sezioni composte. Formule di verifica per stati di sforzo alla dSV
- Lezione 24. Torsione circolare. Conclusioni sul corso