Statica di aste autoportanti

prof. Egidio Rizzi

Università di Bergamo, Facoltà di Ingegneria (Dalmine)

25 ottobre 2005

Lezione tenuta all'interno del corso di

"Tecnologie innovative per l'edilizia"

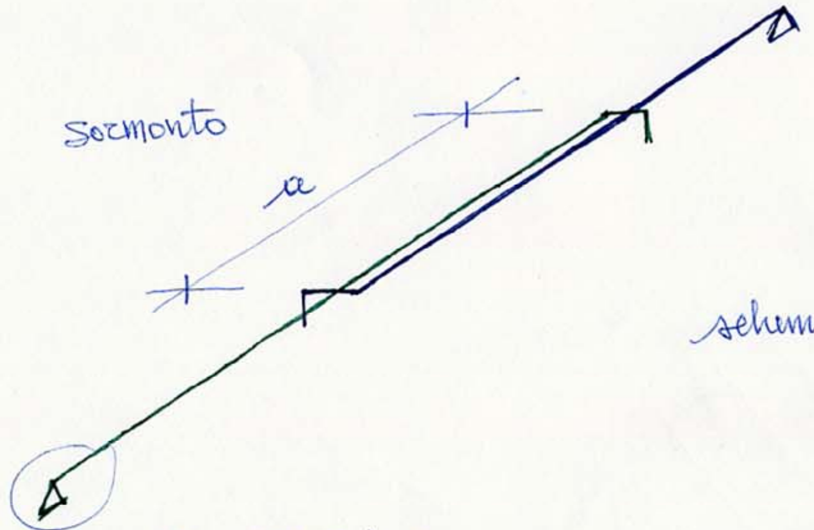
prof. Attilio Pizzigoni

Tematica: nodo "leonardesco" o "serliano" di aste che si sostengono vicendevolmente

Obiettivo: individuare lo schema statico.

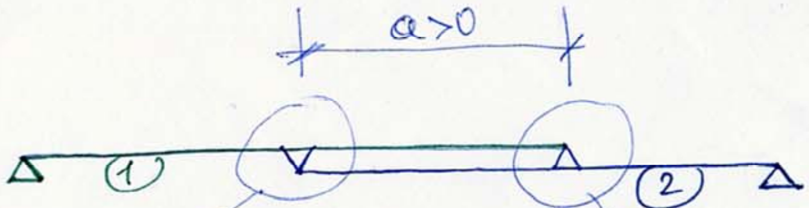
NODO CON DUE ASTE

Consideriamo inizialmente due aste che si appoggiano l'una sull'altra, oltre che, singolarmente, a terra. Le aste siano soggette al solo peso proprio.



semplice appoggio a terra (ad es.)

⟹ schema statico



semplice appoggio dell'asta 2 sull'asta 1

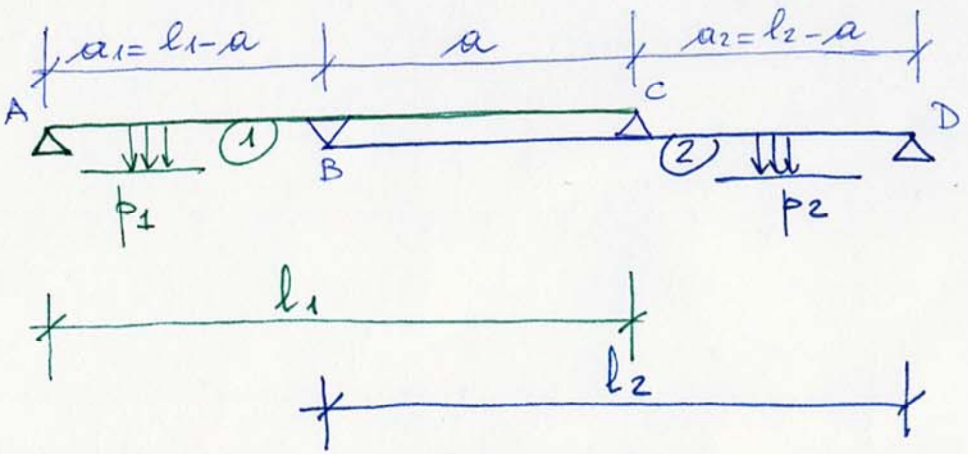
semplice appoggio dell'asta 1 sull'asta 2

[vincoli mono lateri]

N.B. Sia a>0 al fine di evitare labilità strutturale per carichi verticali

$a=0$

Studio dello schema statico



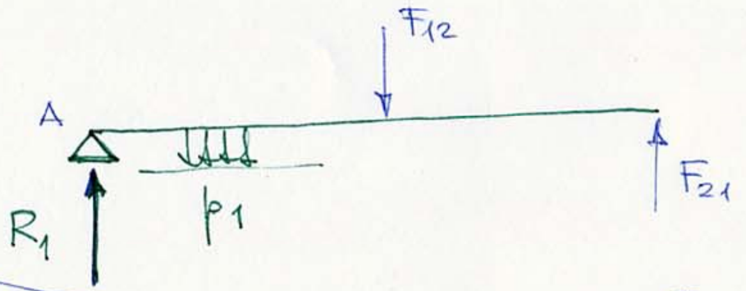
Strutturalmente:

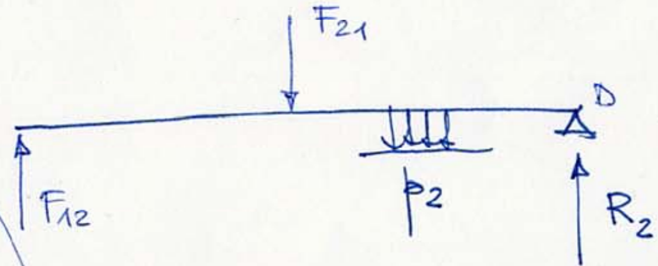
$a_1 = l_1 - a > 0$
$a_2 = l_2 - a > 0$ $\rightarrow$ $a < \min\{l_1, l_2\}$

$p_1 > 0$, $p_2 > 0$ uniform. distribuiti

4 gdv < 6 gdl (2 gdl alla traslaz. orizzontale residui)

Esploso delle due aste:





N.B.:
Si noti come le forze mutue F_{12} e F_{21} siano in grado di produrre l'equilibrio fornendo momento uguale ed opposto a quello prodotto dal carico distribuito

Eq. di equilibrio alla rotazione:

$$\begin{cases} \sum M_A^{①} = 0 \Rightarrow F_{21} l_1 - F_{12} a_1 - p_1 \frac{l_1^2}{2} = 0 \\ \sum M_D^{②} = 0 \Rightarrow F_{12} l_2 - F_{21} a_2 - p_2 \frac{l_2^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & -a_1 \\ -a_2 & l_2 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} p_1 l_1^2 \\ p_2 l_2^2 \end{Bmatrix}$$

N.B.: $\det \mathbb{A} = l_1 l_2 - a_1 a_2$

$$= l_1 l_2 - (l_1 - a)(l_2 - a) =$$

$$= \cancel{l_1 l_2} - \cancel{l_1 l_2} + a l_1 + a l_2 - a^2$$

$$= \underbrace{a}_{>0} \underbrace{(l_1 + l_2 - a)}_{>0} > 0$$

($\det \mathbb{A} = 0$ se $a = 0$!)

Soluzione del sistema

Regola di Cramer: $F_{21} = \dfrac{\begin{vmatrix} \frac{1}{2} p_1 l_1^2 & -a_1 \\ \frac{1}{2} p_2 l_2^2 & l_2 \end{vmatrix}}{\det A} = \dfrac{1}{2} \dfrac{p_1 l_1^2 l_2 + p_2 l_2^2 a_1}{a(l_1+l_2-a)} =$

$$= \frac{1}{2} \frac{l_2}{a} \frac{p_1 l_1^2 + p_2 a_1 l_2}{l_1 + l_2 - a}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{l_2}{a} \frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_1 l_2 + p_2 a l_2}{l_1 + l_2 - a}$$

$$\boxed{F_{21} = \frac{1}{2} \frac{l_2}{a} \frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2) l_1 - p_2 l_2 a}{l_1 + l_2 - a}}$$

Quindi

peso complessivo dell'asta 1

peso compl. dell'asta 2

$$F_{21} = \frac{1}{2} \frac{l_2}{a} \frac{(P_1 + P_2) l_1 - P_2 a}{l_1 + l_2 - a}$$

$\Rightarrow \quad F_{21} \geq 0$ per $(P_1 + P_2) l_1 \geq P_2 a$

$$a \leq \frac{P_1 + P_2}{P_2} l_1 = \left(\frac{P_1}{P_2} + 1\right) l_1 = l_1 + \underbrace{\frac{P_1}{P_2} l_1}_{>0 \text{ se } P_1 e P_2 \text{ hanno lo stesso segno}}$$

verificata in quanto $a < l_1$

Quindi $F_{12} > 0$ sempre per carichi equiversi.

Analogamente, ruotando gli indici:

$$\boxed{F_{12} = \frac{1}{2} \frac{l_1}{a} \frac{(p_1 l_1 + p_2 l_2) l_2 - p_1 l_1 a}{l_1 + l_2 - a}}$$

Controllo per soluzione diretta del sistema:

dalla 1ª eq.: $F_{21} = F_{12}\,\dfrac{a_1}{l_1} + \dfrac{p_1 l_1}{2}$

sost. nella 2ª eq.: $F_{12}\, l_2 - F_{12}\,\dfrac{a_1 a_2}{l_1} - p_1 \dfrac{l_1}{2}\, a_2 - p_2 \dfrac{l_2^2}{2} = 0$

$$F_{12}\left(\frac{l_1 l_2 - a_1 a_2}{l_1}\right) = \frac{1}{2}\left(p_2 l_2^2 + p_1 l_1 a_2\right) \Rightarrow \boxed{F_{12} = \frac{1}{2}\, l_1\, \frac{p_2 l_2^2 + p_1 l_1 a_2}{\underbrace{l_1 l_2 - a_1 a_2}_{\text{è } \det A}}}$$

Sostituendo:

$$F_{21} = \frac{1}{2}\, \cancel{l_1}\, \frac{p_2 l_2^2 + p_1 l_1 a_2}{l_1 l_2 - a_1 a_2}\, \frac{a_1}{\cancel{l_1}} + \frac{p_1 l_1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{p_2 l_2^2 a_1 + p_1 l_1 a_1 a_2 + p_1 l_1 (l_1 l_2 - a_1 a_2)}{l_1 l_2 - a_1 a_2}$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{p_2 l_2^2 a_1 + \cancel{p_1 l_1 a_1 a_2} + p_1 l_1^2 l_2 - \cancel{p_1 l_1 a_1 a_2}}{l_1 l_2 - a_1 a_2}$$

$$\boxed{F_{21} = \frac{1}{2}\, l_2\, \frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_2 a_1}{l_1 l_2 - a_1 a_2}}$$ ok

Condizione per avere $F_{21} = F_{12}$

Sia $\Delta F = F_{21} - F_{12} \Rightarrow 2\,\Delta F (l_1 l_2 - a_1 a_2) = p_1 l_1^2 l_2 + p_2 l_2^2 a_1 - p_2 l_2^2 l_1 - p_1 l_1^2 a_2 =$

$$= p_1 l_1^2 \underbrace{(l_2 - a_2)}_{a} - p_2 l_2^2 \underbrace{(l_1 - a_1)}_{a} =$$

$$= a\,(p_1 l_1^2 - p_2 l_2^2) = 0 \ (\text{per } a \neq 0) \text{ se } \boxed{p_1 l_1^2 = p_2 l_2^2}$$

Le reazioni degli appoggi a terra possono essere determinate dagli equilibri globali:

$$\Sigma' M_D^{①+②} = 0 \Rightarrow \quad R_1 (l_1 + l_2 - a) - p_1 l_1 \left(l_2 - a + \frac{l_1}{2}\right) - p_2 \frac{l_2^2}{2} = 0$$

$$R_1 (l_1 + l_2 - a) = p_1 \frac{l_1^2}{2} + p_2 \frac{l_2^2}{2} + p_1 l_1 (l_2 - a)$$

$$\boxed{R_1 = \frac{1}{2} \; \frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + 2 p_1 l_1 (l_2 - a)}{l_1 + l_2 - a}}$$

Analogamente:

$$\Sigma' M_A^{①+②} = 0 \Rightarrow \quad R_2 (l_1 + l_2 - a) - p_2 l_2 \left(l_1 - a + \frac{l_2}{2}\right) - p_1 \frac{l_1^2}{2} = 0$$

$$R_2 (l_1 + l_2 - a) = p_1 \frac{l_1^2}{2} + p_2 \frac{l_2^2}{2} + p_2 l_2 (l_1 - a)$$

$$\boxed{R_2 = \frac{1}{2} \; \frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + 2 p_2 l_2 (l_1 - a)}{l_1 + l_2 - a}}$$

Controllo: $\Sigma F_y^{①+②} = 0$?

$$R_1 + R_2 = \frac{1}{2} \frac{1}{(l_1 + l_2 - a)} \left(2 p_1 l_1^2 + 2 p_2 l_2^2 + 2 p_1 l_1 l_2 - 2 p_1 l_1 a + 2 p_2 l_1 l_2 - 2 p_2 l_2 a \right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{l_1 + l_2 - a}} \left(p_1 l_1 (\cancel{l_1 + l_2 - a}) + p_2 l_2 (\cancel{l_1 + l_2 - a}) \right) = p_1 l_1 + p_2 l_2 \quad ! \ \underline{ok}$$

Dall'equilibrio alla traslazione verticale di una singola asta è possibile verificare il valore di ΔF:

$$\sum F_y^{\oplus}=0 \Rightarrow \quad R_1 + F_{21} - F_{12} - p_1 l_1 = 0$$

$$\Delta F = F_{21} - F_{12} = p_1 l_1 - R_1$$

$$= p_1 l_1 - \frac{1}{2}\,\frac{p_1 l_1^2 + p_2 l_2^2 + 2 p_1 l_1 (l_2 - a)}{l_1 + l_2 - a}$$

$$= \frac{2p_1 l_1^2 + \cancel{2p_1 l_1 l_2} - \cancel{2p_1 l_1 a} - p_1 l_1^2 - p_2 l_2^2 - \cancel{2p_1 l_1 l_2} + \cancel{2p_1 l_1 a}}{2(l_1 + l_2 - a)}$$

[Viceversa, noto ΔF si potrebbe determinare R_1]

$$\boxed{\Delta F = \frac{p_1 l_1^2 - p_2 l_2^2}{2(l_1 + l_2 - a)}} \quad \text{ok}$$

$$\Delta F = 0 \Rightarrow \boxed{p_1 l_1^2 = p_2 l_2^2}$$

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2} = \frac{l_2^2}{l_1^2}}$$

Nota:

- in presenza di appoggi mutui <u>mono</u> lateri il sistema non può funzionare per $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$.
- se si realizzano appoggi <u>bi</u>lateri tramite fissaggio (es. imbullonatura) il sistema funziona, in maniera analoga a quella qui vista, anche per $p_1 < 0$ e $p_2 < 0$.
- se p_1 e p_2 hanno verso opposto occorre verificare se i vincoli monolateri sono in grado di imporre l'equilibrio (eventualmente sotto delimitazioni per il sormonto a).

Casi notevoli

- $l_1 = l_2 = l$ (aste di eguale lunghezza)

$$F_{21} = \frac{1}{2}\frac{l^2}{a}\frac{p_1 l + p_2 l - p_2 a}{2l-a} \qquad (\Delta F = 0 \text{ se } p_1 = p_2)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} l \frac{p_1 l + p_2 l + 2p_1(l-a)}{2l-a} = \frac{l}{2}\frac{3p_1 l + p_2 l - 2p_1 a}{2l-a}$$

- $p_1 = p_2 = p$ (aste di egual peso)

$$F_{21} = \frac{1}{2} p \frac{l_2}{a}\frac{(l_1+l_2)l_1 - l_2 a}{l_1+l_2-a} \qquad (\Delta F = 0 \text{ se } l_1 = l_2)$$

$$R_1 = \frac{1}{2} p \frac{l_1^2 + l_2^2 + 2l_1(l_2-a)}{l_1+l_2-a} = \frac{1}{2} p \frac{(l_1+l_2)^2 - 2l_1 a}{l_1+l_2-a}$$

- $p_1 = 0$ (un'asta non pesante)

$$F_{21} = \frac{1}{2}\frac{l_2}{a}\frac{p_2 l_1 l_2 - p_2 l_2 a}{l_1+l_2-a} = \frac{1}{2}\frac{p_2 l_2^2}{a}\frac{l_1-a}{l_1+l_2-a}$$

$$F_{12} = \frac{1}{2}\frac{l_1}{a}\frac{p_2 l_2^2}{l_1+l_2-a} = \frac{1}{2}\frac{p_2 l_2^2}{a}\frac{l_1}{l_1+l_2-a}$$

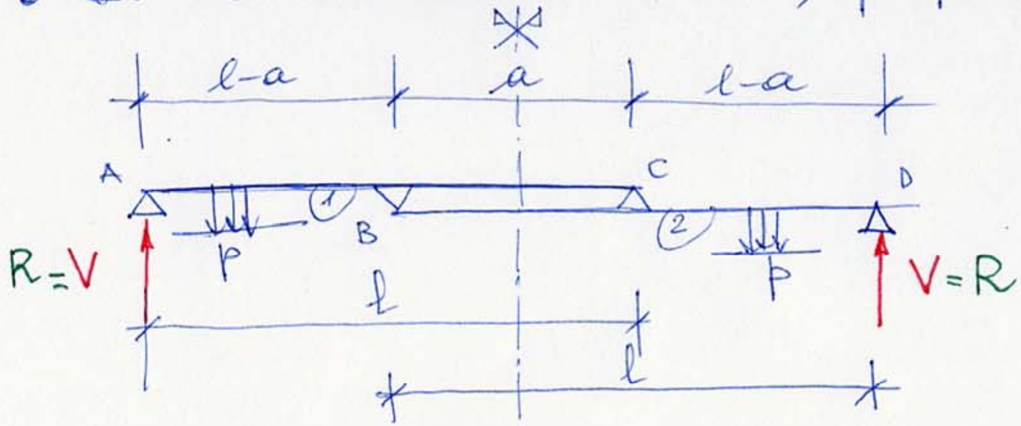
$$\Delta F = \frac{1}{2}\frac{p_2 l_2^2}{\cancel{a}}\frac{-\cancel{a}}{l_1+l_2-a} = -\frac{1}{2}\frac{p_2 l_2^2}{l_1+l_2-a}$$

(necessariamente $\neq 0$ per $p_2 \neq 0$)

$$R_1 = \frac{1}{2}\frac{p_2 l_2^2}{l_1+l_2-a}$$

$$R_2 = \frac{1}{2} p_2 l_2 \frac{l_2 + 2(l_1-a)}{l_1+l_2-a}$$

- Il caso simmetrico: $l_1 = l_2 = l$, $p_1 = p_2 = p$



Per simmetria le reaz. a terra sono presto determinate:

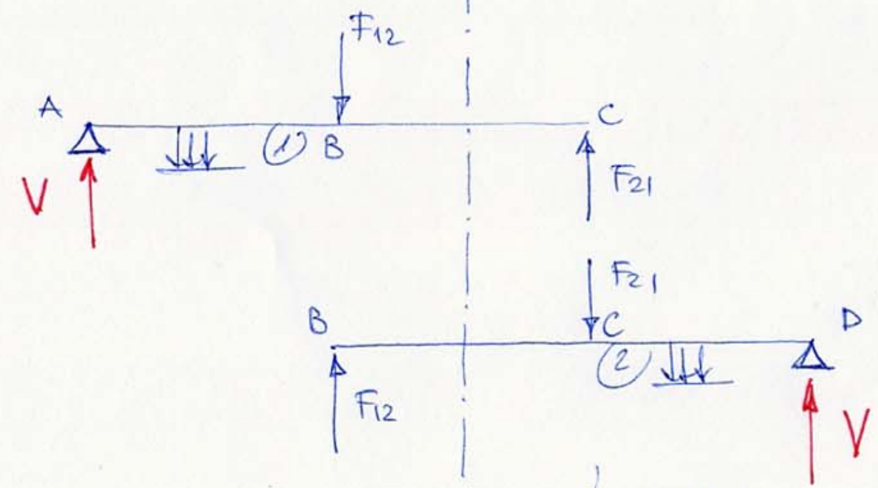
$V_1 = V_2 = V$

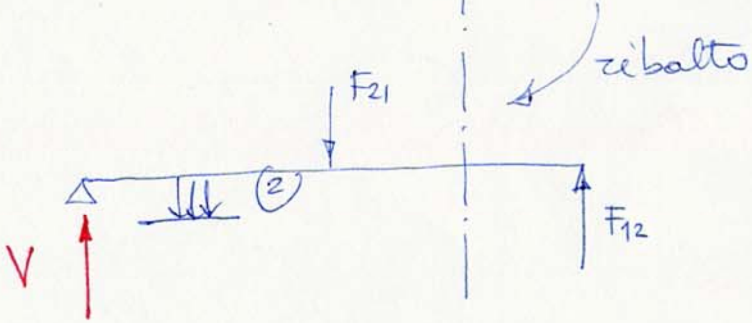
$$\sum F_y^{1+2} = 0 \Rightarrow 2V = 2pl \Rightarrow \boxed{V = pl}$$

Nota V, come procedimento alternativo:

$$\sum M_B^{(1)} = 0 \Rightarrow -V(l-a) + F_{21}\,a + \frac{pa^2}{2} + p\frac{(l-a)^2}{2} = 0$$

$$\begin{aligned} F_{21}\,a &= pl(l-a) + p\frac{a^2}{2} - p\frac{(l-a)^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}p(l-a)(2l-l+a) + p\frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}p(l^2-a^2) + p\frac{a^2}{2} \\ &= \frac{1}{2}pl^2 \Rightarrow \boxed{F_{21} = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a}} \end{aligned}$$





poichè ② indistinguibile da ①, segue che

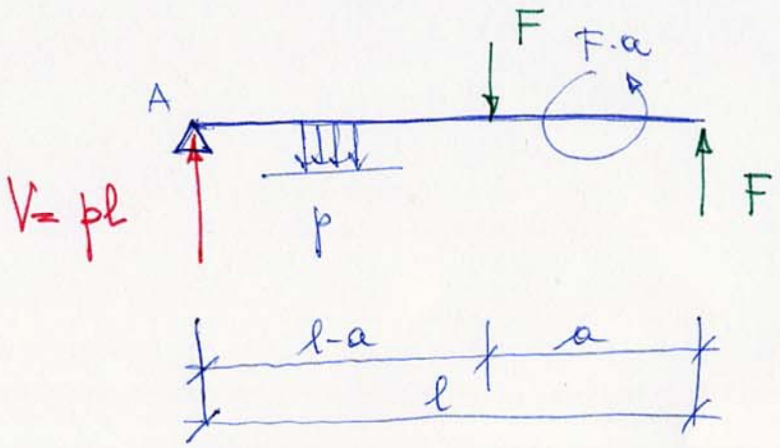
$F_{12} = F_{21}$

$(\Delta F = 0)$

Poichè l'eq. simile $\sum M_D^{(2)} = 0$ porta a scrivere la stessa eq. nell'incognita F_{12} si ottiene:

$$\boxed{F_{12} = F_{21} = F = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a}}$$

Si noti come l'equilibrio sia garantito dalla coppia formata dalle due forze F:



Eq. dei momenti rispetto ad A:

$$F \cdot a = \frac{pl^2}{2} \Rightarrow F = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a}$$

Come già notato, l'equilibrio si può ristaurare solo se $a \neq 0$, altrimenti la coppia F.a non può formarsi ($a=0$ richiederebbe $F \to \infty$)

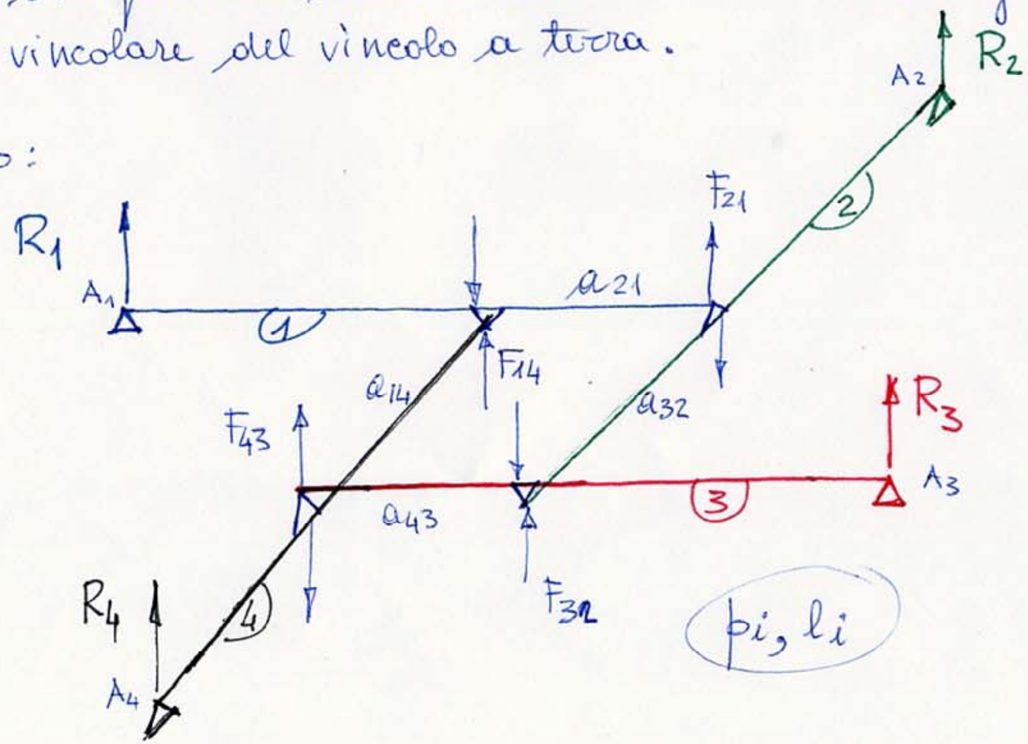
Conferme dalla soluzione generale:

$$\begin{cases} F_{21} = \frac{1}{2}\frac{l}{a} pl \frac{\cancel{2l-a}}{\cancel{2l-a}} = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a} & \text{ok} \\ F_{12} = \frac{1}{2}\frac{l}{a} pl \frac{\cancel{2l-a}}{\cancel{2l-a}} = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a} & \text{ok} \\ R_1 = \frac{1}{2} \frac{2pl^2 + 2pl(l-a)}{2l-a} = \frac{1}{\cancel{2}} \cancel{2} pl \frac{\cancel{2l-a}}{\cancel{2l-a}} = pl & \text{ok} \\ R_2 = \frac{1}{2} \frac{2pl^2 + 2pl(l-a)}{2l-a} = pl & \text{ok} \end{cases}$$

NODO CON QUATTRO ASTE

- L'analisi ora vista può essere convenientemente estesa a sistemi formati da tre o più aste.
- Supponendo, come sin qui fatto, di avere ogni asta appoggiata ad un estremo a terra e all'altro estremo su di un'altra asta del sistema, si ottengono, per n aste, n appoggi a terra ed n appoggi interni.
- Realizzato l'esploso del sistema evidenziando le reazioni mutue negli appoggi interni, si studia l'equilibrio di ognuna delle n aste nel suo piano, imponendo l'equilibrio alla rotazione rispetto all'appoggio a terra. Si genera così un sistema di n equazioni in n incognite che, risolto, fornisce le reazioni vincolari nei vincoli interni.
- L'equaz. di equilibrio alla traslazione verticale di ogni asta fornisce poi la reazione vincolare del vincolo a terra.

Esempio:



Incognite:

4 : $F_{21}, F_{32}, F_{43}, F_{14}$

4 : R_1, R_2, R_3, R_4

Analisi cinematica:

gdv = 8

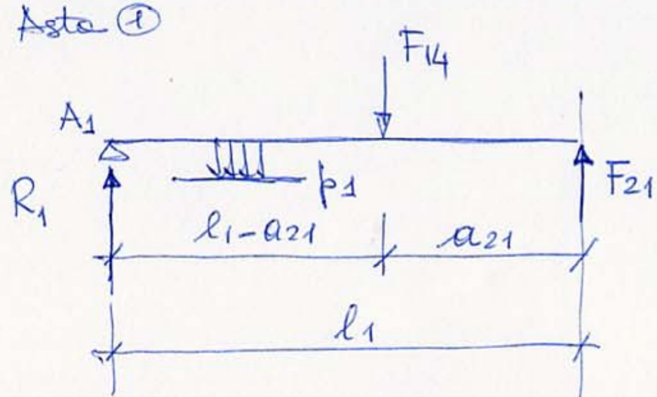
gdl = $6 \cdot 4 = 24$ (in 3D)

n° gdl residui:

- $2 \cdot 4 = 8$ traslazioni nel piano
- 4 rotazioni nel piano
- 4 rotazioni rispetto agli assi delle aste

Equazioni di equilibrio alla rotazione rispetto all'appoggio a terra:

Asta ①



$$\sum M_{A_1}^{①} = 0 \Rightarrow F_{21}\, l_1 - F_{14}(l_1 - a_{21}) - p_1 \frac{l_1^2}{2} = 0$$

$$\sum F_y^{①} = 0 \Rightarrow R_1 = F_{14} - F_{21} + p_1 l_1$$

Analogamente per le altre aste.

Sistema risolvente nelle F_{ij} (4 eq. in 4 inc.):

$$\begin{cases} F_{21}\, l_1 - F_{14}(l_1 - a_{21}) - p_1 \frac{l_1^2}{2} = 0 \\ F_{32}\, l_2 - F_{21}(l_2 - a_{32}) - p_2 \frac{l_2^2}{2} = 0 \\ F_{43}\, l_3 - F_{32}(l_3 - a_{43}) - p_3 \frac{l_3^2}{2} = 0 \\ F_{14}\, l_4 - F_{43}(l_4 - a_{14}) - p_4 \frac{l_4^2}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 & a_{21} - l_1 \\ a_{32} - l_2 & l_2 & 0 & 0 \\ 0 & a_{43} - l_3 & l_3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{14} - l_4 & l_4 \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{32} \\ F_{43} \\ F_{14} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} p_1 l_1^2 \\ p_2 l_2^2 \\ p_3 l_3^2 \\ p_4 l_4^2 \end{Bmatrix}$$

Mentre $\sum F_y^{(i)} = 0$ pongono:

$$\begin{cases} R_1 = p_1 l_1 - (F_{21} - F_{14}) \\ R_2 = p_2 l_2 - (F_{32} - F_{21}) \\ R_3 = p_3 l_3 - (F_{43} - F_{32}) \\ R_4 = p_4 l_4 - (F_{14} - F_{43}) \end{cases}$$

$$\det \mathbb{A} = l_1 l_2 l_3 l_4 - (a_{32} - l_2)(a_{21} - l_1)(a_{43} - l_3)(a_{14} - l_4)$$
$$= l_1 l_2 l_3 l_4 - (l_2 - a_{32})(l_1 - a_{21})(l_3 - a_{43})(l_4 - a_{14})$$

(si noti l'analogia con l'espressione ottenuta per due aste).

Il caso simmetrico:

$$l_i = l$$

$$p_i = p$$

$$a_{21} = a_{32} = a_{43} = a_{14} = a$$

In base a quanto visto nel caso di due aste, per considerazioni di simmetria, l'equazione di equilibrio di ogni asta è indistinguibile dalle altre.

La soluzione è pertanto:

$$F_{21} = F_{32} = F_{43} = F_{14} = F$$

Inoltre, come visto: $F \cdot a = \frac{pl^2}{2} \Rightarrow \boxed{F = \frac{1}{2}\frac{pl^2}{a}}$

La reazione agli appoggi a terra è inoltre sempre pari al peso totale di ogni singola asta:

$$R_1 = R_2 = R_3 = R_4 = V = pl.$$

Conferma analitica dal sistema 4x4:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} l & 0 & 0 & a-l \\ a-l & l & 0 & 0 \\ 0 & a-l & l & 0 \\ 0 & 0 & a-l & l \end{bmatrix}}_{\mathbb{A}} \cdot \begin{Bmatrix} F_{21} \\ F_{32} \\ F_{43} \\ F_{14} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} p l^2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\det \mathbb{A} = l^4 - (l-a)^4 =$$
$$= l^4 - (l^2+a^2-2al)(l^2+a^2-2al) =$$
$$= \cancel{l^4} - \cancel{l^4} - l^2a^2 + 2al^3 - a^2l^2 - a^4 + 2a^3l + 2al^3 + 2a^3l - 4a^2l^2$$
$$= -a^4 + 4a^3l - 6a^2l^2 + 4al^3$$
$$= a(-a^3 + 4a^2l - 6al^2 + 4l^3)$$
$$= a(2l-a)(a^2-2al+2l^2)$$

Infatti: $(2l-a)(a^2-2al+2l^2) =$
$= 2la^2 - 4al^2 + 4l^3 - a^3 + 2a^2l - 2al^2$
$= -a^3 + 4a^2l - 6al^2 + 4l^3$ ok

N.B.: ancora $\det \mathbb{A} = 0$ $\begin{cases} \boxed{a=0} \\ a = 2l \text{ (impossibile)} \end{cases}$

mentre $(a^2-2al+2l^2) > 0$ sempre

Si ritrova labilità per $a=0 \rightarrow$ impossibilità di imporre l'equilibrio

Dalle regole di Cramer:

$$\det \mathbb{A} \; F_{21} = \frac{1}{2} p\ell^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & a-\ell \\ 1 & \ell & 0 & 0 \\ 1 & a-\ell & \ell & 0 \\ 1 & 0 & a-\ell & \ell \end{vmatrix} \leftarrow$$

$$\cancel{(2\ell-a)}\cancel{(a^2-2a\ell+2\ell^2)} \frac{F_{21}}{\frac{1}{2}\frac{p\ell^2}{a}} = 1 \cdot \begin{vmatrix} \ell & 0 & 0 \\ a-\ell & \ell & 0 \\ 0 & a-\ell & \ell \end{vmatrix} - (a-\ell) \begin{vmatrix} 1 & \ell & 0 \\ 1 & a-\ell & \ell \\ 1 & 0 & a-\ell \end{vmatrix}$$

$$= \ell^3 - (a-\ell)\left[1\cdot(a-\ell)^2 - \ell\left(a-\ell-\ell\right)\right]$$

$$= \ell^3 - (a-\ell)\left[(a-\ell)^2 + \ell(2\ell-a)\right]$$

$$= \ell^3 - (a-\ell)\left[a^2+\ell^2-2a\ell+2\ell^2-a\ell\right]$$

$$= \ell^3 - (a-\ell)(a^2-3a\ell+3\ell^2)$$

$$= \ell^3 - (a-\ell)(a^2-2a\ell+2\ell^2) - (a-\ell)(-a\ell+\ell^2)$$

$$= \ell^3 + a^2\ell - a\ell^2 - a\ell^2 + \ell^3 - (a-\ell)(a^2-2a\ell+2\ell^2)$$

$$= 2\ell^3 + a^2\ell - 2a\ell^2 - (a-\ell)(a^2-2a\ell+2\ell^2)$$

$$= \ell(a^2-2a\ell+2\ell^2) - (a-\ell)(a^2-2a\ell+2\ell^2)$$

$$= (\ell-a+\ell)(a^2-2a\ell+2\ell^2)$$

$$= \cancel{(2\ell-a)}\cancel{(a^2-2a\ell+2\ell^2)} \quad \text{ok} \rightarrow \boxed{F_{21} = \frac{1}{2}\frac{p\ell^2}{a}} \;!$$

Idem per F_{14}:

$$\det A \; F_{14} = \frac{1}{2} p l^2 \begin{vmatrix} l & 0 & 0 & 1 \\ a-l & l & 0 & 1 \\ 0 & a-l & l & 1 \\ 0 & 0 & a-l & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\det A \; \frac{F_{14}}{\frac{1}{2} p l^2} = 1 \cdot \begin{vmatrix} l & 0 & 0 \\ a-l & l & 0 \\ 0 & a-l & l \end{vmatrix} - (a-l) \begin{vmatrix} l & 0 & 1 \\ a-l & l & 1 \\ 0 & a-l & 1 \end{vmatrix}$$

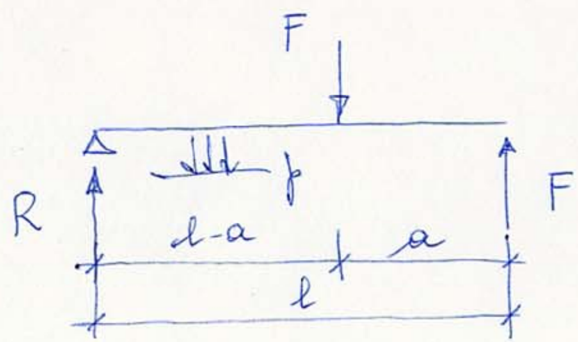
permutando le colonne origina lo stesso determinante di prima.

$$= \frac{\det A}{a}$$

quindi $\boxed{F_{14} = \frac{1}{2} \frac{p l^2}{a}}$ come atteso

Analogamente per F_{32} e F_{43}.

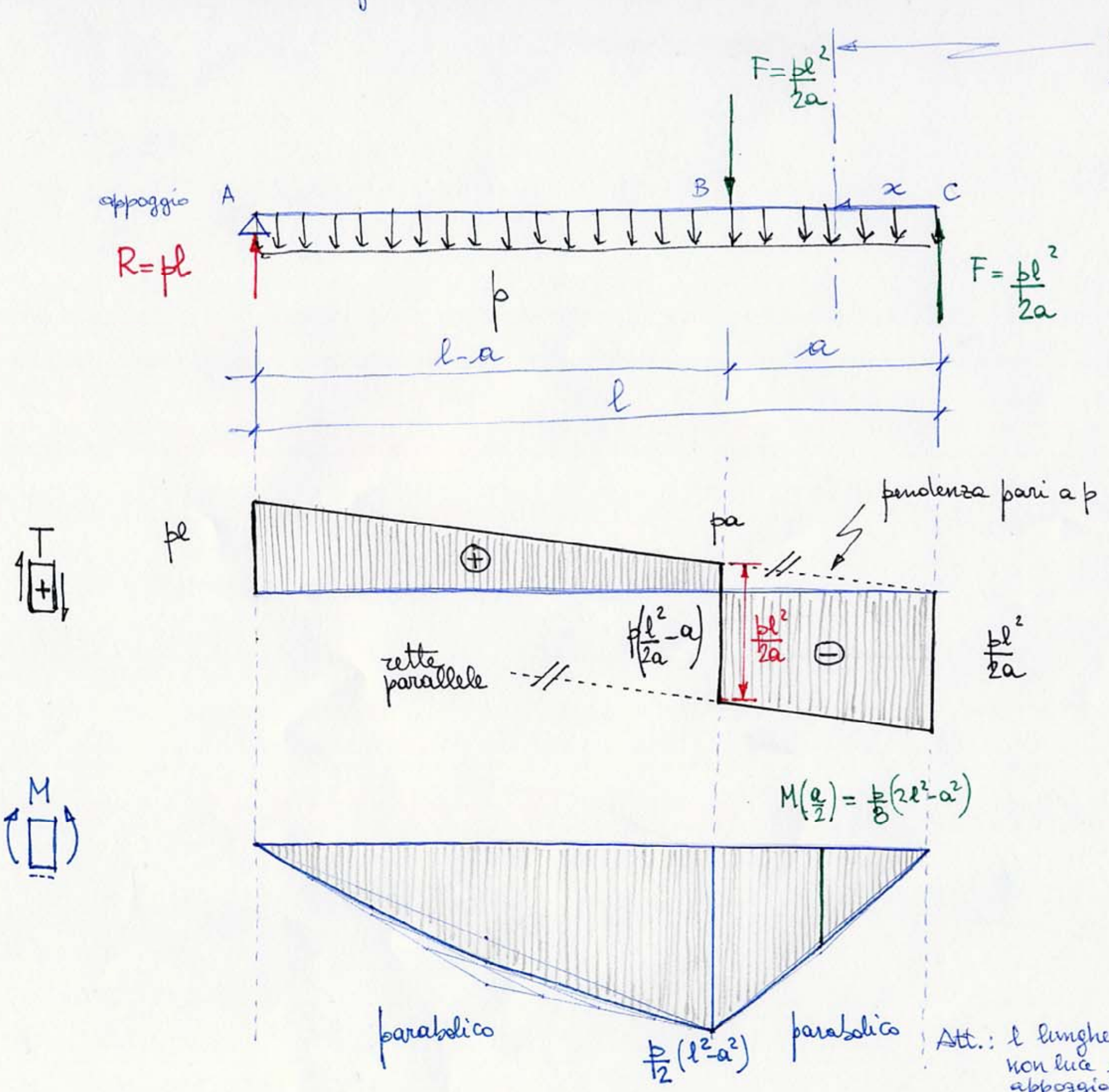
Si evince quindi l'importanza dello schema statico con la coppia $F \cdot a$, già posta in luce con lo schema di base avente due sole aste:



$$F \cdot a = \frac{p l^2}{2} \Rightarrow F = \frac{p l^2}{2a}$$

$$R = p l$$

Azioni interne nella singola asta di tale schema base:



Esempio:

- $a = \frac{l}{3}$

$$\frac{pl^2}{2a} = \frac{3}{2}pl = \frac{9}{6}pl$$

$$pa = \frac{1}{3}pl = \frac{2}{6}pl$$

$$p\left(\frac{l^2}{2a}-a\right) = \frac{7}{6}pl$$

$$\frac{p}{2}(l^2-a^2) = \frac{4}{9}pl^2 = \frac{1}{2.25}pl^2$$

$$\frac{p}{8}(2l^2-a^2) = \frac{17}{72}pl^2 \simeq \frac{1}{4.23}pl^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2.12}pl^2$$

Att.: l lunghezza di un'asta, non luce di trave appoggiata!

Commenti:

- $T_{max} = T_C = \frac{pl^2}{2a}$ per $\frac{pl^2}{2a} \geq pl \Rightarrow l \geq 2a \Rightarrow \boxed{a \leq \frac{l}{2}}$

Per $a < \frac{l}{2}$ il taglio massimo si produce all'estremo C

" $a = \frac{l}{2}$ si ottiene lo stesso taglio agli estremi A e C $(T_A = T_C)$

" $a > \frac{l}{2}$ il taglio massimo si produce all'estremo A

- In B, $T_B^{sn.} = pa \leq p\left(\frac{l^2}{2a} - a\right) = T_B^{ds.}$ per $2a \leq \frac{l^2}{2a} \Rightarrow 4a^2 \leq l^2 \Rightarrow \boxed{a \leq \frac{l}{2}}$

Per $a < \frac{l}{2}$ $T_B^{sn.} < T_B^{ds.}$

" $a = \frac{l}{2}$ $T_B^{sn.} = T_B^{ds.} = p\frac{l}{2}$

" $a > \frac{l}{2}$ $T_B^{sn.} > T_B^{ds.}$

T_B, a ds. o sn., rimane comunque sempre inferiore a T_A e T_C.

- Il taglio può annullarsi nel tratto BC per:

$$\frac{l^2}{2a} - a \leq 0 \Rightarrow l^2 \leq 2a^2 \Rightarrow \boxed{a \geq \frac{l}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}71\, l}$$

alla distanza $\frac{pl^2}{2a}/p = \frac{l^2}{2a}$ dall'estremo C: $T(x) = -\frac{pl^2}{2a} + px = 0$ per $\bar{x} = \frac{l^2}{2a}$

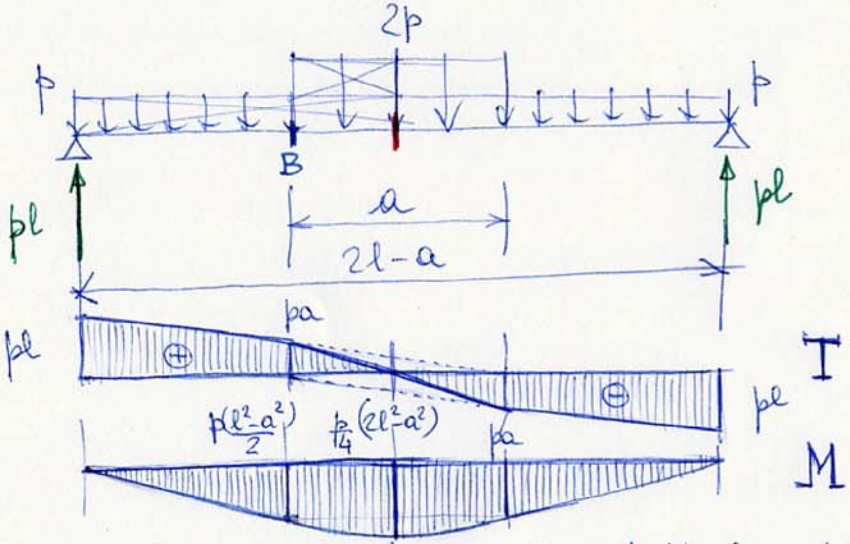
- In tale caso si ha un max rel. di M, con $M(x) = \frac{pl^2}{2a}x - p\frac{x^2}{2}$

$$M_{max} = M\left(\bar{x} = \frac{l^2}{2a}\right) = \frac{pl^2}{2a}\frac{l^2}{2a} - \frac{p}{2}\frac{l^4}{4a^2} = \frac{pl^4}{8a^2}$$

- Nel punto medio del tratto BC il momento risulta:

$$M\left(x=\frac{a}{2}\right)=\frac{pl^2}{2\cancel{a}}\frac{\cancel{a}}{2}-\frac{p}{2}\frac{a^2}{4}=\frac{p}{8}\left(2l^2-a^2\right)$$

- Nel caso di sistema a due aste precedentemente considerato, ciò è coerente col momento massimo che si produce nella seguente trave di luce $(2l-a)$:



In mezzeria:

$$\bullet\ M^*_{max}=pl\,\frac{2l-a}{2}-\frac{p}{2}\left(\frac{2l-a}{2}\right)^2-\frac{p}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$=\frac{p}{8}(2l-a)(4l-2l+a)-\frac{pa^2}{8}$$

$$=\frac{p}{8}(2l-a)(2l+a)-\frac{pa^2}{8}$$

$$=\frac{p}{8}\left(4l^2-a^2-a^2\right)$$

$$=\frac{p}{4}\left(2l^2-a^2\right)$$

Infatti, considerando il contributo delle due aste presenti nella sezione in mezzeria tra B e C si ottiene:

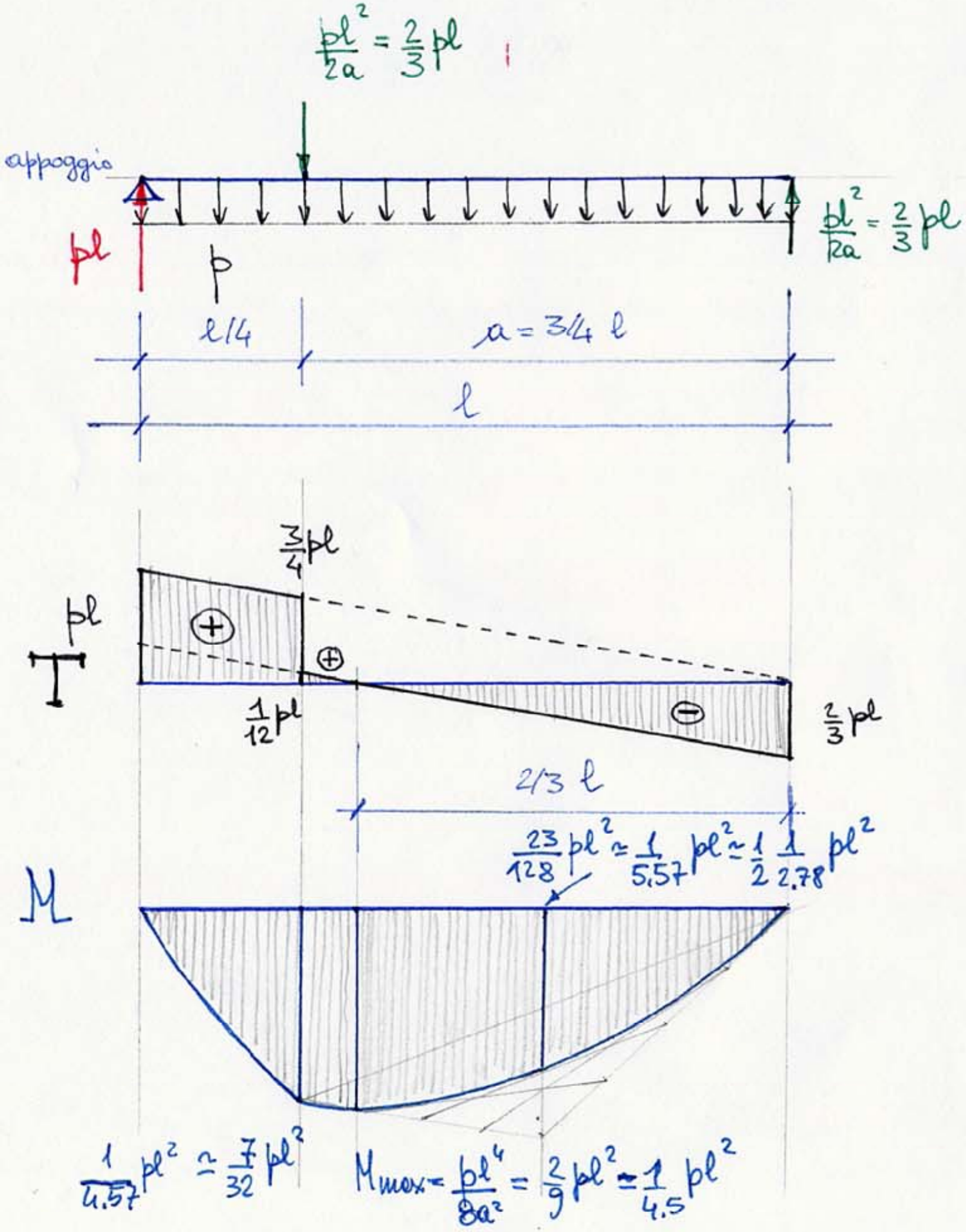
$$2\,M\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{p}{4}\left(2l^2-a^2\right)=M^*_{max}\quad \underline{ok}$$

- In B si ottiene coerentemente:

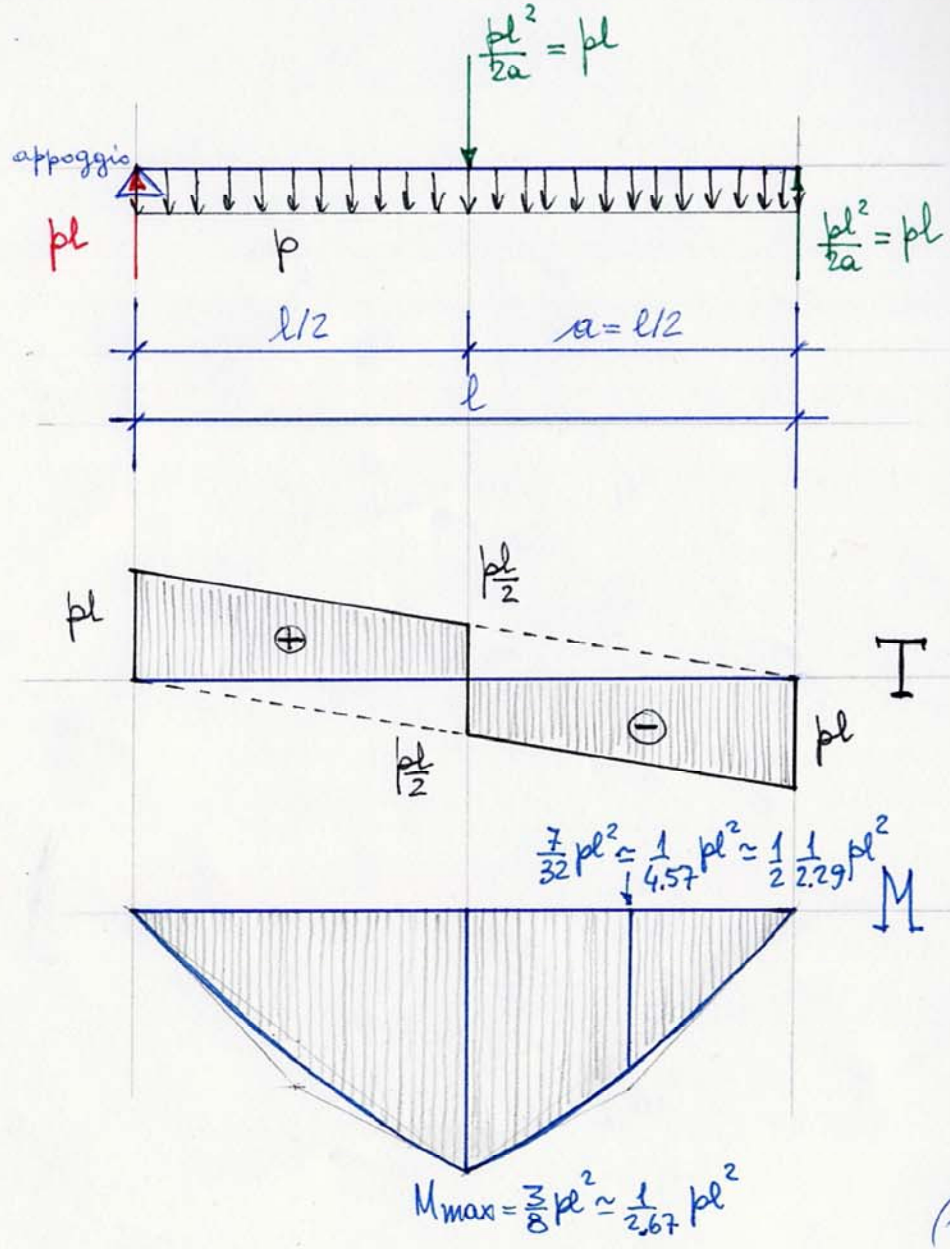
$$M_B=pl(l-a)-p\frac{(l-a)^2}{2}=p\frac{(l-a)}{2}(2l-l+a)=\frac{p(l-a)(l+a)}{2}=\frac{p(l^2-a^2)}{2}$$

– Due casi rappresentativi:

$$a = \frac{3}{4}\ell = 0.75\,\ell > \frac{1}{\sqrt{2}}\ell$$



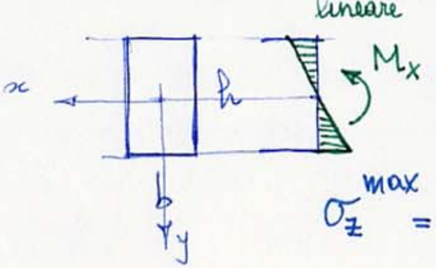
$$a = \frac{\ell}{2} < \frac{1}{\sqrt{2}}\ell$$



Verifiche di resistenza per l'asta ABC $\left(\text{per } a \le \frac{l}{2}\right)$

A momento: nella sezione B con $M_B = \frac{p}{2}(l^2 - a^2)$

per sezione rettangolare



sforzo normale

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \qquad I_x = \frac{1}{12} b h^3$$

$$\sigma_z^{max} = \frac{M_x}{I_x}\frac{h}{2} = \frac{M_x}{W_x} = \frac{6 M_x}{b h^2} \le \sigma_a$$

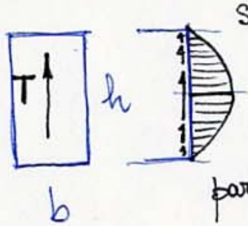
(per materiali con resistenza a trazione uguale a quella a compressione)

W_x: modulo di resistenza $\quad W_x = \frac{2 I_x}{h} = \frac{b h^2}{6}$

A taglio: nella sezione C con $T_C = \frac{p l^2}{2a}$

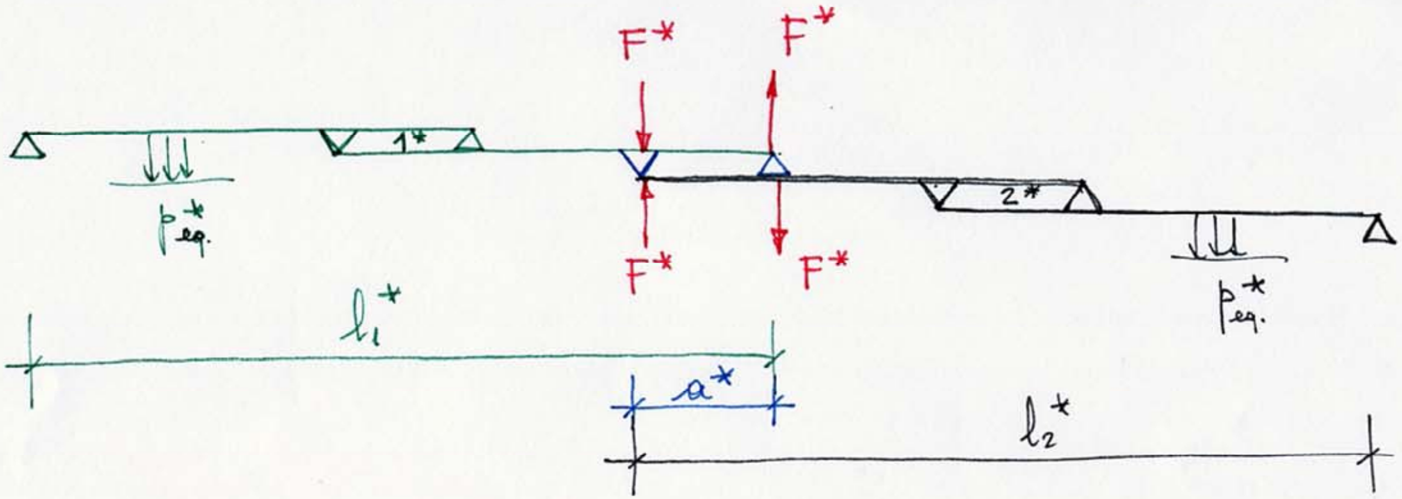
nella sezione B con $T_B = p\left(\frac{l^2}{2a} - a\right)$

per sezione rettangolare



$$\tau^{max} = \frac{3}{2}\frac{T}{bh} \le \tau_a$$

- Assemblaggio di due (o più) elementi composti con due aste.



Attenzione: Ancora $F^* a^* = \frac{p^* l_1^{*2}}{2} \Rightarrow F^* = \frac{p^* l_1^{*2}}{2a^*}$

che aumenta in ragione di l_1^*

- L'analisi svolta si può quindi ripetere ma le azioni interne presenti si incrementano in relazione all'aumento della luce coperta.

- Ovviamente non risulterà quindi possibile assemblare all'infinito elementi per coprire una luce qualsiasi - Un elemento modulare con certe proprietà date consentirà di coprire solo una determinata luce, mediante la sovrapposizione di un numero massimo caratteristico di moduli.