

DETERMINAZIONE ANALITICA E NUMERICA DI DIREZIONI DI LOCALIZZAZIONE IN MODELLI A DANNEGGIAMENTO SCALARE

Egidio Rizzi

Dipartimento di Ingegneria Strutturale - Politecnico di Milano

P.zza L. da Vinci 32, 20133 Milano

Le condizioni necessarie all' innesco di fenomeni biforcativi con discontinuit  nelle deformazioni incrementali possono essere analizzate mediante analisi spettrale di un tensore del secondo ordine \mathbf{Q} , spesso chiamato *tensore acustico* o *tensore di localizzazione*. Questo tensore, la cui definizione trae origine dalla teoria di propagazione delle onde (GURTIN (1972)),   definito come

$$\mathbf{Q} = \vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E}_t \cdot \vec{\mathbf{N}} \quad (1)$$

dove \mathbf{E}_t indica il tensore tangente del quarto ordine che compare nel legame incrementale sforzi/deformazioni per processi incrementali anelastici ("loading")

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_t : \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (2)$$

e $\vec{\mathbf{N}}$ rappresenta il vettore normale alla possibile superficie attraverso la quale si manifestano possibili discontinuit  delle variabili di campo. Il tensore acustico risulta simmetrico quando l' operatore tangente   simmetrico nel caso di leggi costitutive associate. Localizzazione delle deformazioni   ottenuta quando il tensore acustico cessa di essere definito positivo con l' annullamento del suo determinante. L' insorgenza di questa condizione   stata estensivamente studiata in plasticit  per leggi costitutive elastoplastiche in generale non associate (RUDNICKI E RICE (1975), BORR  E MAIER (1989), OTTOSEN E RUNESSON (1991)). Le direzioni critiche di localizzazione in corrispondenza delle quali il determinante del tensore acustico   minimo sono state calcolate in forma chiusa per una ampia classe di leggi elastoplastiche ed elastoplastiche con danno isotropo (BIGONI E HUECKEL (1991), BENALLAL E COMI (1993)). In corrispondenza di queste direzioni critiche il modulo di incrudimento necessario per l' innesco della prima insorgenza di localizzazione durante il processo di carico   massimo.

L' analisi di localizzazione pu  quindi essere estesa ad ogni formulazione costitutiva esprimibile nella forma incrementale (2). In particolare, oltre alle formulazioni elastoplastiche che descrivono in maniera accurata la resistenza del materiale, altre leggi

costitutive si rivolgono in principal modo alla descrizione della perdita di rigidezza del materiale man mano che il processo fessurativo si sviluppa durante il carico. Sono così possibili descrizioni “elasto-fracturing” od “elasto-damage” (DOUGILL (1976), CAROL ET AL. (1993)) espresse da una legge costitutiva in termini finiti in una forma secante del tipo

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (3)$$

dove \mathbf{E} é la rigidezza secante del materiale. In ultima analisi queste formulazioni, abbinate ad un modello elastoplastico possono costituire una realistica rappresentazione del comportamento del materiale in condizioni di scarico/ricarico (Fig. 1), con deformazione irreversibile allo scarico e contemporanea perdita di rigidezza (“elastic-plastic coupling”, MAIER E HUECKEL (1979)). La formulazione incrementale é ottenibile mediante differenziazione della legge secante (3), assumendo una “legge di fratturazione” per la perdita di rigidezza $\dot{\mathbf{E}} = \dot{\lambda} \bar{\mathbf{M}}$. La forma tipica dell’operatore tangente é formalmente analoga a quella relativa al caso elastoplastico basato sugli sforzi e può essere espressa come modificazione di rango uno del tensore di rigidezza secante (CAROL ET AL. (1993))

$$\mathbf{E}_{ef} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} : \mathbf{m} \otimes \mathbf{n} : \mathbf{E}}{H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}} \quad (4)$$

con il seguente significato dei simboli

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i = \dot{\lambda} \mathbf{m} \quad \mathbf{n} = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} ; \quad H = -\frac{\partial F}{\partial \lambda} \quad (5)$$

essendo $F = 0$ la condizione che definisce la soglia corrente di fratturazione del materiale nello spazio degli sforzi ed $\boldsymbol{\epsilon}_i$ la deformazione anelastica che traduce il fenomeno irreversibile legato alla degradazione della rigidezza del materiale, in modo che $\dot{\mathbf{E}} : \boldsymbol{\epsilon} = -\mathbf{E} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}_i$. Una forma duale si può ottenere nel caso di formulazione basata sulle deformazioni.

Le variabili di danno possono essere introdotte direttamente nella definizione del valore corrente di rigidezza secante, mediante una funzione continua e differenziabile $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{E}_o, \bar{\mathcal{D}})$ della rigidezza iniziale \mathbf{E}_o e delle variabili tensoriali di danno $\bar{\mathcal{D}}$. Quando la legge di danno $\dot{\bar{\mathcal{D}}} = \dot{\lambda} \bar{\mathcal{M}}$ é assegnata si può risalire alla “direzione” di fratturazione $\bar{\mathbf{M}}$ ed alla relativa rappresentazione in termini di “direzione” per l’incremento di deformazione anelastica \mathbf{m} che compare nell’espressione (4) dell’operatore tangente (CAROL ET AL. (1993))

$$\bar{\mathbf{M}} = \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} \star \bar{\mathcal{M}} \quad \mathbf{m} = -\mathbf{E}^{-1} : \bar{\mathcal{M}} \star \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \bar{\mathcal{D}}} : \boldsymbol{\epsilon} \quad (6)$$

dove il simbolo \star indica contrazione di tutti gli indici di $\bar{\mathcal{M}}$ e $\bar{\mathcal{D}}$.

Nel caso piú semplice la perdita di rigidezza é descritta da una unica variabile scalare λ che definisce la modificazione corrente della rigidezza iniziale $\mathbf{E} = \mathbf{E}_o + \lambda \bar{\mathbf{M}}$, con $\bar{\mathbf{M}}$ tensore costante del quarto ordine. Nella formulazione tradizionale di KACHANOV (1958) la variabile di danno assume un significato fisico ed esprime la riduzione dell' area effettivamente in grado di sopportare sforzo per un dato stato di danneggiamento. In questo caso $\bar{\mathbf{M}}$ é proporzionale ad \mathbf{E}_o e tutte le componenti di rigidezza sono modificate dallo stesso fattore $(1 - D)$:

$$\mathbf{E}_{ed} = (1 - D) \mathbf{E}_o \quad (7)$$

Il modello elasto-danno risulta associato quando la funzione di danno F é espressa in termini di una norma energetica del tipo $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{E}_o^{-1} : \boldsymbol{\sigma}$ per una formulazione basata sugli sforzi o $\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\epsilon}$ per la duale nelle deformazioni. L' espressione dell' operatore tangente per tutti i conseguenti modelli scalari contiene una modificazione di rango uno con prodotto tensoriale esterno di due tensori di sforzo (RIZZI (1993))

$$\begin{aligned} \text{Form. nelle deformazioni} &\Rightarrow \mathbf{E}_{ed} = (1 - D) \mathbf{E}_o - \beta(\boldsymbol{\epsilon}, D) \boldsymbol{\sigma}_o \otimes \boldsymbol{\sigma}_o \\ \text{Form. negli sforzi} &\Rightarrow \mathbf{E}_{ed} = (1 - D) \mathbf{E}_o - \gamma(\boldsymbol{\sigma}, D) \boldsymbol{\sigma} \otimes \boldsymbol{\sigma} \end{aligned} \quad (8)$$

dove le funzioni β e γ dipendono dalle particolari assunzioni del modello e $\boldsymbol{\sigma}_o = \mathbf{E}_o : \boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\sigma} / (1 - D)$ é lo sforzo in un materiale integro a paritá di deformazione.

Il tensore acustico per materiali elasto-fratturabili puó quindi essere analizzato. Considerando la forma generale (4) e la doppia contrazione con $\vec{\mathbf{N}}$

$$\mathbf{Q}_{ef} = \vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E}_{ef} \cdot \vec{\mathbf{N}} = \mathbf{Q}_e - \frac{\mathbf{b} \otimes \mathbf{a}}{h} \quad (9)$$

dove $\mathbf{Q}_e = \vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{N}}$ é il tensore acustico elastico e h , \mathbf{a} , \mathbf{b} , dipendono dal tipo di formulazione. Per esempio, in formulazioni negli sforzi $h = H + \mathbf{n} : \mathbf{E} : \mathbf{m}$, $\mathbf{a} = \mathbf{n} : \mathbf{E} \cdot \vec{\mathbf{N}}$, $\mathbf{b} = \vec{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{E} : \mathbf{m}$. La condizione $\det(\mathbf{Q}_{ef}) = 0$ é esprimibile alternativamente come

$$\eta_3^* = 1 - \frac{1}{h} \mathbf{a} \cdot \mathbf{Q}_e^{-1} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (10)$$

dove η_3^* é il terzo autovalore del tensore $\mathbf{Q}_e^{-1} \cdot \mathbf{Q}_{ef}$ ($\eta_1^* = \eta_2^* = 1$). Tale condizione puó essere risolta rispetto ad h , ottenendo i parametri di incrudimento necessari per la localizzazione per una assegnata direzione $\vec{\mathbf{N}}$. Il primo innesco di localizzazione é quindi ottenuto per il massimo valore dei parametri di incrudimento al variare di $\vec{\mathbf{N}}$.

Nel caso dei modelli a danneggiamento scalare in senso tradizionale il fattore comune $(1-D)$ può essere raccolto a primo membro ed il problema di massimizzazione è identico a quello elastoplastico per il quale sono disponibili soluzioni in forma chiusa (RIZZI (1993)). Anche il criterio geometrico di localizzazione recentemente introdotto da BENALLAL E COMI (1993) può essere utilizzato per una analoga derivazione (RIZZI (1993)). Per esempio, nel caso di **estensione monoassiale** in deformazioni piane, dove $\epsilon_1 > 0$, $\epsilon_2 = 0$ e $\sigma_3 = 0$, la direzione di localizzazione critica θ_{cr} tra l'asse di carico x_1 ed il vettore \vec{N} normale alla banda di taglio dipende dal coefficiente di Poisson (Fig. 2):

$$\tan^2 \theta_{cr} = \frac{\nu}{1-\nu} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \nu = 0.0 & \Rightarrow & \theta_{cr} = 0.00^\circ \\ \nu = 0.3 & \Rightarrow & \theta_{cr} = 33.21^\circ \\ \nu = 0.5 & \Rightarrow & \theta_{cr} = 45.00^\circ \end{cases} \quad (11)$$

Queste direzioni di localizzazione confermano i risultati numerici ottenuti con la implementazione del modello scalare di SIMO E JU (1987) in un programma ad EF. Il tensore acustico elasto-danno è valutato nei punti di Gauss degli elementi per una variabile direzione \vec{N} , partendo dall'espressione dell'operatore tangente nel punto medesimo. Il minimo del determinante del tensore acustico normalizzato individua le direzioni critiche di localizzazione. Nel caso di estensione monoassiale di un provino rettangolare, il determinante adimensionalizzato, che assume lo stesso valore in ogni punto di Gauss, per ogni passo di carico, è riportato in Fig. 3, in corrispondenza del primo sviluppo di danno. Per $\nu = 0.3$ la possibile superficie di discontinuità risulta inclinata di 56.79° rispetto all'asse di carico, in accordo con i risultati delle derivazioni analitiche.

RINGRAZIAMENTI

L'autore desidera ringraziare i Dr. G. Etse e P. Steinmann per avere messo a disposizione il loro codice di calcolo ad EF sviluppato presso l'Università di Karlsruhe.

BIBLIOGRAFIA

1. BENALLAL, A. E COMI, C. (1993). "Explicit solutions to localisation conditions via a geometrical method. Part 1 - The coaxial case." *Rapport Interne n° 143*, E.N.S. Cachan, France.
2. BIGONI, D. E HUECKEL, T. (1991). "Uniqueness and localization-II. Coupled elastoplasticity." *Int. J. of Solids and Structures*, Vol. 28 (2), 215-224.
3. BORRÉ, G. E MAIER, G. (1989). "On linear versus nonlinear flow rules in strain localization analysis." *Meccanica*, Vol. 24, 36-41.
4. CAROL, I., RIZZI, E. E WILLAM, K. (1993). "Elastic-fracturing and damage models based on a loading surface. A unified description." *Internal Report CU/SR-93/2*, CEAE Department, University of Colorado, Boulder, U.S.A.

5. DOUGILL, J. W. (1976). "On stable progressively fracturing solids." J. of Applied Mathematics and Physics, Vol. 27, 423-437.
6. GURTIN, M. E. (1972). "The linear theory of elasticity." Mechanics of Solids, Ed. Truesdell, C. , Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.
7. KACHANOV, L. M. (1958). "Time rupture process under creep conditions" (in Russian). Izv. Akad Nauk S.S.S.R., Otd Tekh Nauk Vol. 8, 26-31.
8. MAIER, G. E HUECKEL, T. (1979). "Nonassociated and coupled flow rules of elastoplasticity for rock-like materials." Int. J. of Rock Mechanics and Mining Sciences, Vol. 16, 77-92.
9. OTTOSEN, N. S., E RUNESSON, K. (1991). "Properties of discontinuous bifurcation solutions in elasto-plasticity." Int. J. of Solids and Structures, Vol. 27 (4), 401-421.
10. RIZZI, E. (1993). "Localization analysis of damaged materials." Internal Report CU/SR-93/5, CEAE Department, University of Colorado, Boulder, U.S.A.
11. RUDNICKI, J.W. E RICE, J.R. (1975). "Conditions for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials." J. for Mechanics of Physics and Solids, Vol. 23, 371-394.
12. SIMO, J. C. E JU, J. W. (1987). "Strain- and stress-based continuum damage models - I. Formulation." Int. J. of Solids and Structures, Vol. 23 (7), 821-840.
13. SIMO, J. C. E JU, J. W. (1987). "Strain- and stress-based continuum damage models - II. Computational aspects." Int. J. of Solids and Structures, Vol. 23 (7), 841-869.

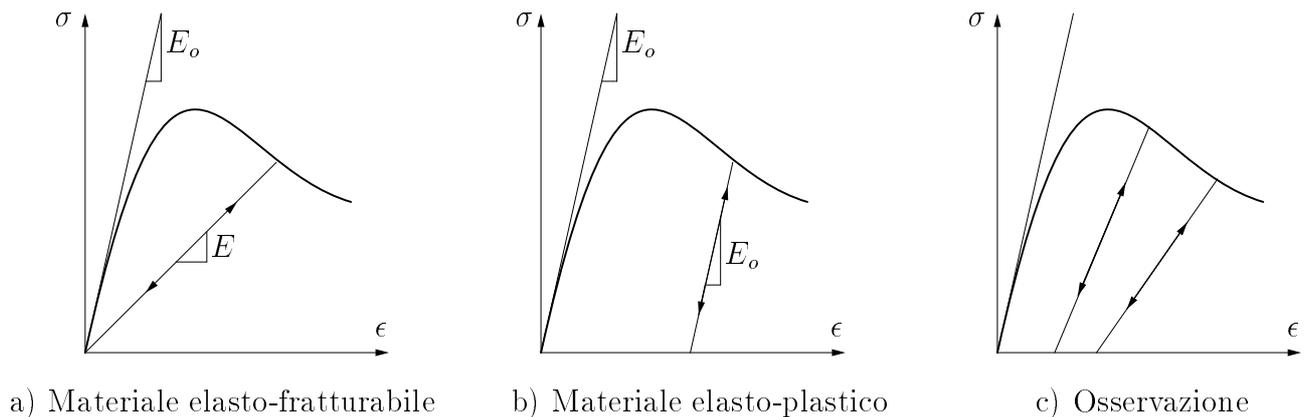


Figura 1: Rigidezze elastiche di scarico/ricarico

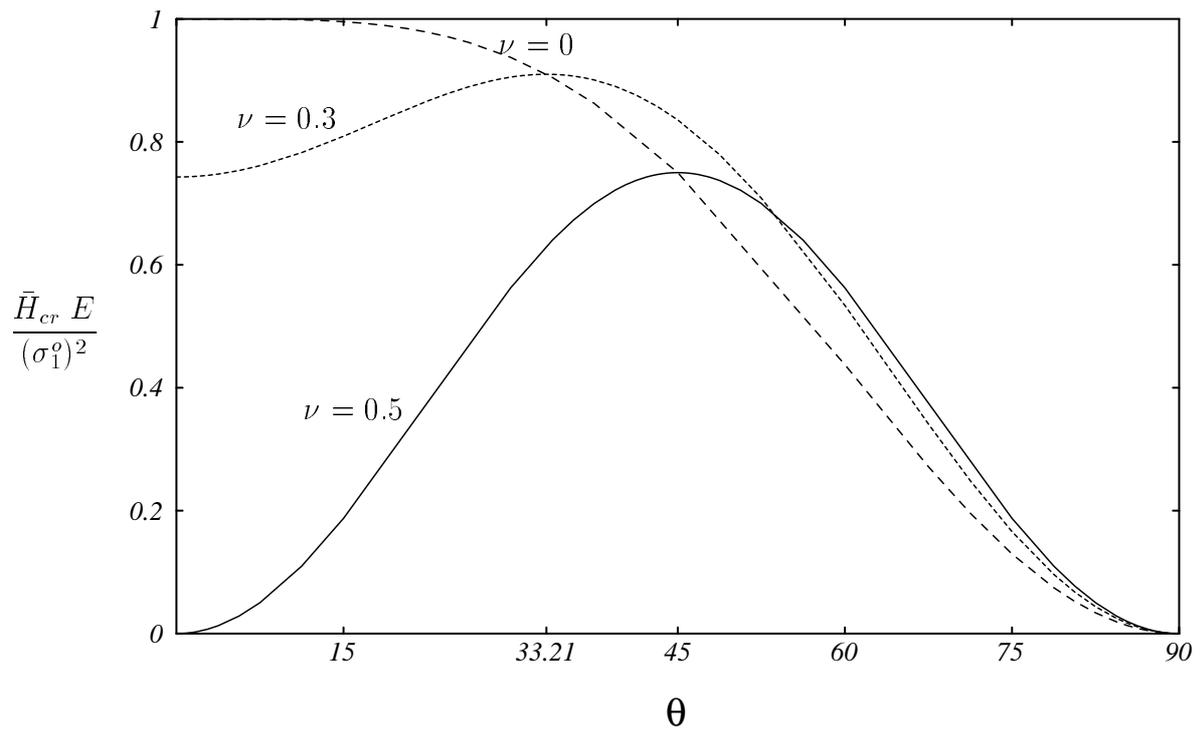


Figura 2: Max. di \bar{H}_{cr} : influenza di ν su θ_{df}

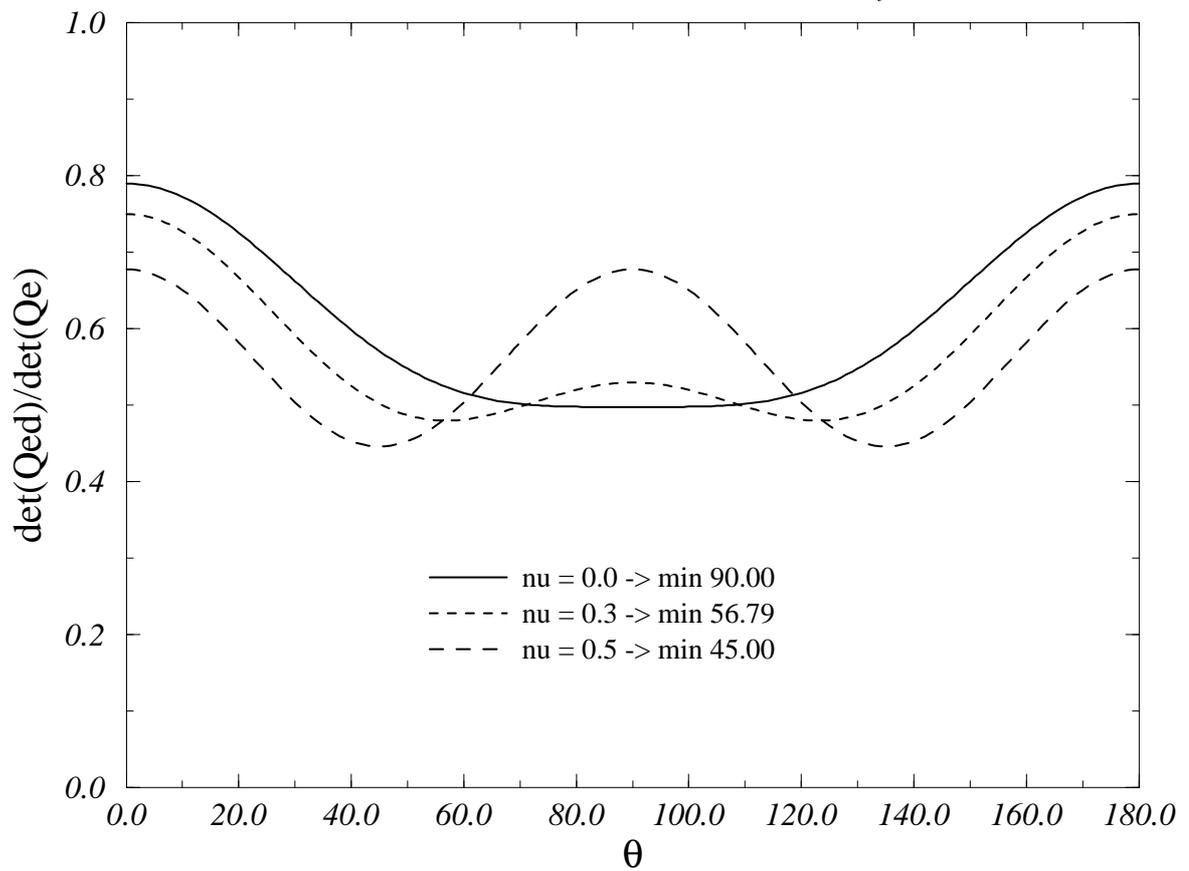


Figura 3: Analisi numerica: $\det(Q_{ed})$ nei GP dopo il primo danno